

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

F. LEDRAPPIER

En général, un semi-flot spécial est exact

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, n° 4 (1978), p. 465-478

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_4_465_0

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

En général, un semi-flot spécial est exact

par

F. LEDRAPPIER (*)

Université Pierre et Marie Curie. Laboratoire de Calcul des Probabilités,
4, place Jussieu. Tour 56, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Considérons un endomorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue, une fonction intégrable minorée par $\delta > 0$, et le semi-flot spécial associé. Nous donnons une condition sur T pour que l'ensemble des fonctions telles que le semi-flot est exact soit générique dans L^1_δ .

SUMMARY. — We consider the construction of a semi-flow under a function above an endomorphism of a Lebesgue space. For many systems we prove that the set of functions for which the semi-flow is exact is a set of second category in L^1_δ .

Soit T un endomorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue $(X, \mathcal{A}, m)$. Soient $\delta > 0$, L^1_δ l'espace des fonctions F intégrables sur X , minorées par δ . Nous considérons l'action de $\mathbb{R}_+$ obtenue par la construction du semi-flot spécial $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{m}, \theta)$ sous une fonction F au-dessus du $(X, \mathcal{A}, m, T)$, et nous voulons étudier la classe $\mathcal{F}$ des fonctions F de L^1_δ telles que la σ -algèbre asymptotique $\bigwedge_t \theta_t^{-1} \tilde{\mathcal{A}}$ est grossière.

Si $\mathcal{A} = T^{-1}\mathcal{A} \pmod{0}$ la classe $\mathcal{F}$ est vide. Au contraire si il existe une partition P , « assez » indépendante de $T^{-1}\mathcal{A}$ et telle que $\mathcal{A} = \sigma(T^{-n}P, n \geq 0)$, différentes conditions assurent que certaines fonctions appartiennent à $\mathcal{F}$ ([2], [10], [3]).

(*) Membre du Laboratoire associé au C. N. R. S., n° 224 « Processus Stochastiques et Applications ».

Nous ferons l'hypothèse suivante sur la décroissance des $T^{-n}\mathcal{A}$:

Le système $(X, \mathcal{A}, m, T)$ satisfait la condition (C) si $\mathcal{A} \neq T^{-1}\mathcal{A} \pmod{0}$ et s'il existe une suite A_n croissante de partitions finies, engendrant $\mathcal{A}$ et vérifiant.

$$H(A_n | \sigma(T^{-p}A_n, p > 0)) - H(A_n | T^{-1}\mathcal{A}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

cf. (Roklin [7]).

Nous avons alors le résultat suivant :

THÉOREME 1. — Sous la condition (C), la classe $\mathcal{F}$ des fonctions telles que la σ -algèbre $\bigwedge_{i=1}^{\infty} \theta_i^{-1}\mathcal{A}$ est grossière est une intersection dénombrable d'ouverts denses de L^1_{δ} .

La démonstration que la classe $\mathcal{F}$ est un G_{δ} repose sur une formule explicite de l'espérance conditionnelle par rapport à $\theta_i^{-1}\mathcal{A}$ (cf. th. 2 § 1).

D. Ornstein et M. Smorodinsky ([5]) ont montré que le flot spécial bâti sous F est un K -flot pour un ensemble dense de fonctions F dans L^1 . Nous avons besoin ici d'étendre ce résultat à un semi-flot, autrement dit de considérer les fonctions mesurables par rapport à une sous σ -algèbre décroissante (§ 4). Pour cela, il nous faut montrer un « théorème de Sinai relativisé » (§ 3). Nous montrons ensuite que la classe $\mathcal{F}$ est dense grâce à la condition (C).

1. NOYAU ASSOCIÉ A UN SEMI-FLOT SPÉCIAL

Soit T un endomorphisme surjectif d'un espace de Lebesgue $(X, \mathcal{A}, m)$.

PROPOSITION 1. — Soit $P(,)$ un noyau de transition de $(X, \mathcal{A})$ sur $(X, \mathcal{A})$ vérifiant.

$$(*) \text{ pour tout } A \text{ de } \mathcal{A} \int P(x, A) dm(x) = m(A)$$

$$(**) \text{ pour } m \text{ presque tout } x \text{ de } X, \text{ pour tous } A \text{ et } B \text{ de } \mathcal{A}$$

$$P(x, A \cap T^{-1}B) = 1_B(x)P(x, A)$$

Alors la famille $x \rightarrow P(Tx, \cdot)$ est une famille de probabilités conditionnelles régulières pour la σ -algèbre $T^{-1}\mathcal{A}$.

Démonstration. — Il faut vérifier les propriétés suivantes :

- i) pour tout x , $P(Tx, \cdot)$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$
- ii) pour tout A de $\mathcal{A}$, $x \rightarrow P(Tx, A)$ est $T^{-1}\mathcal{A}$ mesurable

$$\text{iii) pour tous } A, B \text{ de } \mathcal{A}, m(A \cap T^{-1}B) = \int_{T^{-1}B} P(Tx, A) dm(x)$$

Les propriétés i) et ii) sont évidentes, la propriété iii) se déduit du calcul suivant :

$$\begin{aligned} m(A \cap T^{-1}B) &= \int P(x, A \cap T^{-1}B) dm(x) \text{ d'après (*)} \\ &= \int_B P(x, A) dm(x) \text{ d'après (**)} \\ &\quad \int_{T^{-1}B} P(Tx, A) dm(x) \text{ par invariance de } m \end{aligned}$$

Un noyau de transition satisfaisant (*) et (**) est dit associé à $(X, \mathcal{A}, m, T)$.

Soit P un noyau associé à $(X, \mathcal{A}, m, T)$, le noyau P^n défini par récurrence par : $P^n(x, \cdot) = \int P^{n-1}(y, \cdot) P(x, dy)$ est associé à $(X, \mathcal{A}, m, T^n)$.

Remarquons que la condition (**) peut s'écrire pour toute fonction f mesurable bornée sur $X \times X$, m presque tout x de X ,

$$(**)' \quad \int f(y, Ty) P(x, dy) = \int f(y, x) P(x, dy)$$

Soient $\delta > 0$ et F une fonction intégrable minorée par δ . Nous notons Ω_F le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}$ formé des (x, s) tels que $0 \leq s < F(x)$, $\mathcal{A}_F$ la trace sur Ω_F de la σ -algèbre produit de $\mathcal{A}$ par les boréliens de $\mathbb{R}$, $\bar{m}_F$ la trace sur Ω_F de la mesure produit de m sur $(X, \mathcal{A})$ par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le semi-flot spécial bâti sous F au-dessus de $(X, \mathcal{A}, m, T)$ est l'action ${}_F\theta$ de $\mathbb{R}_+$ définie par :

$${}_F\theta_t(x, s) = T^p x, s + t - \sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x)$$

sur l'ensemble des (x, s) où

$$\sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x) \leq s + t < \sum_{i=0}^p F(T^i x)$$

Nous noterons $(\Omega, \mathcal{A}, \bar{m}, \theta)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur la fonction F .

Le but de ce paragraphe est de donner un noyau associé à $(\Omega, \mathcal{A}, \bar{m}, \theta)$.

Nous avons :

THÉOREME 2. — Soit $P(x, \cdot)$ une probabilité de transition associé à

$(X, \mathcal{A}, m, T)$. Pour F donnée le noyau $Q_t(\cdot, \cdot)$ suivant est associé à $(\Omega, \mathcal{A}, \bar{m}, T\theta_t)$ pour (x, s) dans Ω et $\bar{A} \in \mathcal{A}$ mesurable, $Q_t((x, s), \bar{A})$ est donné par :

$$(***) \quad Q_t((x, s), \bar{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int 1_{\bar{A}} \left(y, s + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) - t \right) P^n(x, dy)$$

Démonstration. — Il faut vérifier les propriétés suivantes :

- i) pour tout $\bar{A}$ de $\mathcal{A}$, $(x, s) \rightarrow Q_t((x, s), \bar{A})$ est $\mathcal{A}$ mesurable
- ii) $Q_t[(x, s), \cdot]$ est $\bar{m}$ presque partout une mesure bornée
- iii) pour tout $\bar{A}$ de $\mathcal{A}$, $\int Q_t((x, s), \bar{A}) d\bar{m}(x, s) = \bar{m}(\bar{A})$
- iv) pour tous $\bar{A}, \bar{B}$ dans $\mathcal{A}$, (x, s) dans Ω ,

$$Q_t((x, s), \bar{A} \cap \theta_t^{-1} \bar{B}) = 1_{\bar{B}}(x, s) Q_t((x, s), \bar{A}).$$

La propriété i) est évidente, pour vérifier ii) comme $Q_t((x, s), \cdot)$ est donné par la somme d'une série de mesures positives, il suffit de vérifier que $Q_t((x, s), \Omega) < \infty$. Or nous avons :

$$Q_t((x, s), \Omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p P^n \left(x, \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} F_0 T^i < t - s \leq \sum_{i=0}^{n-1} F_0 T^i \right\} \right).$$

En appliquant la propriété (**) à P^{p-n} nous pouvons écrire pour $n \leq p$, A dans $\mathcal{A}$, m presque tout x dans X :

$$\begin{aligned} P^p(x, T^{-(p-n)} A) &= \int P^n(x, dy) P^{p-n}(y, T^{-(p-n)} A) \\ &= \int P^n(x, dy) 1_A(y) P^{p-n}(y, X) \\ &= P^n(x, A). \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$Q_t((x, s), \Omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p P^p \left(x, \left\{ \sum_{j=p-n+1}^{p-1} F_0 T^j < t - s \leq \sum_{j=p-n}^{p-1} F_0 T^j \right\} \right)$$

Nous avons à prendre la somme des $P^p(x, \cdot)$ mesures d'ensembles dis-joints, nous obtenons : $Q_t((x, s), \Omega) \leq 1$, ce qui prouve ii).

Pour vérifier iii), il suffit de montrer pour tout A de $\mathcal{A}$, $u > 0$, en notant : $A_u = \{ (x, s), x \in A, 0 \leq s < u, s < F(x) \}$,

$$\int Q_t((x, s), A_u) d\bar{m}(x, s) = \bar{m}(A_u).$$

Nous avons :

$$\int Q_t((x, s), A_u) d\bar{m}(x, s) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X dm(x) \left(\int_0^{F(x)} ds \left(\int 1_{A_u} \left(y, s - t + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) \right) P^n(x, dy) \right) \right)$$

$$\text{soit, en posant } B(n, s, t, u) = \left\{ y \mid 0 \leq s - t + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) < u \wedge F(y) \right\},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X dm(x) \int_A \left(\int_0^{F(x)} 1_B(y) ds \right) P^n(x, dy).$$

En utilisant (**)' et (*) pour chaque P^n cette expression devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_A \left(\int_0^{F(T^n y)} 1_{B(n, s, t, u)}(y) ds \right) dm(y)$$

et il est facile de vérifier que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{F(T^n y)} 1_{B(n, s, t, u)}(y) ds = u \wedge F(y)$$

ce qui montre la formule demandée. Enfin la vérification de *iv)* est immédiate. Remarquons que si $\delta < 1$ et F est à valeurs entières, nous obtenons un noyau associé à la tour bâtie sous F au-dessus de $(X, \mathcal{A}, m, T)$.

2. LA CLASSE $\mathcal{F}$ EST UN $G\delta$

PROPOSITION 2. — Soit T un endomorphisme d'un espace de Lebesgue $(X, \mathcal{A}, m)$. La classe $\mathcal{F}$ des fonctions F telles que la σ -algèbre $\bigwedge_{i=0}^{\infty} T^{-i} \mathcal{A}_F$ est grossière est une intersection dénombrable d'ouverts dans L_{δ}^1 .

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'il existe une probabilité de transition, essentiellement unique associée à $(X, \mathcal{A}, m, T)$.

En effet soit $R(\cdot, \cdot)$ une famille de probabilités conditionnelles régulières pour la σ -algèbre $T^{-1} \mathcal{A}$ vérifiant donc presque partout :

$$R(x, A \cap T^{-1} B) = 1_{T^{-1} B}(x) R(x, A)$$

L'application $x \rightarrow R(x, \cdot)$ est $T^{-1} \mathcal{A}$ mesurable donc de la forme $P(Tx, \cdot)$ pour une certaine probabilité de transition $P(\cdot, \cdot)$. La probabilité

$P(,)$ ainsi définie est associée à T . Nous allons déduire du théorème 2 des noyaux associés aux transformations ${}_F\theta_t$ et estimer, d'après la proposition 1. les probabilités conditionnelles de tout $\bar{A}$ de $\mathcal{A}$ par rapport à $\theta_t^{-1}\mathcal{A}$. Pour A dans $\mathcal{A}$, q réel notons :

$A_q = \{ (x, s) \mid x \in A, 0 \leq s < q \}$. Soient A, A' dans $\mathcal{A}$, q, q', t réels positifs, F dans L^1_δ . Notons $D(A, A', q, q', t, F)$ la quantité :

$$D(A, A', q, q', t, F) = \int_{A' \wedge q'} Q({}_F\theta_t(x, s), A_q) d\bar{m}_F(x, s)$$

où Q est défini par la formule (**).

LEMME 1. — Fixons A, A', q, q', t . L'application $F \rightarrow D(A, A', q, q', t, F)$ est continue sur L^1_δ .

Démonstration. — Nous avons :

$$D(A, A', q, q', t, F) = \sum_{n, p \geq 0} \int_{A'} dm(x) \left(\int_A P^n(T^p x, dy) b_{n,p}(x, y, t, F) \right)$$

où $b_{n,p}(x, y, t, F)$ est la longueur de l'ensemble des s compris entre 0 et $q' \wedge F(x)$ et tels que :

$$\sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x) \leq s + t < \sum_{i=0}^p F(T^i x)$$

et

$$0 \leq s - \sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x) + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) < F(y) \wedge q$$

Si $p > -\frac{t}{\delta} + 1$ ou si $p \leq -\frac{t}{\delta} + 1$ et $n \geq -\frac{t}{\delta} + 2$, il est immédiat que $b_{n,p} = 0$.

Pour les autres valeurs de n, p soient F et G deux fonctions de L^1_δ . La différence $|b_{n,p}(x, y, t, F) - b_{n,p}(x, y, t, G)|$ est majorée par la mesure de l'ensemble des $s, 0 \leq s < q'$, tels que l'une au moins des différences :

$$\begin{aligned} & s - F(x), \quad s + t - \sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x), \quad s + t - \sum_{i=0}^p F(T^i x), \\ & s - \sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x) + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y), \quad s - \sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x) + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) - F(y) \wedge q, \end{aligned}$$

change de signe si on change F en G . La mesure de cet ensemble est majorée par :

$$|F(x) - G(x)| + 3 \left| \sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x) - \sum_{i=0}^{p-1} G(T^i x) \right| + \left| \sum_{i=0}^p F(T^i x) - \sum_{i=0}^p G(T^i x) \right| \\ + 2 \left| \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) - \sum_{i=0}^{n-1} G(T^i y) \right| + |F(y) - G(y)|$$

En sommant sur n, p et en intégrant il vient :

$$|D(A, A', q, q', t, F) - D(A, A', q, q', t, G)| \\ \leq \sum_{n \leq \frac{t}{\delta} + 2} \sum_{p \leq \frac{t}{\delta} + 1} \int dm(x) \left(\left| P^n(T^p x, dy) | b_{n,p}(x, y, t, F) - b_{n,p}(x, y, t, G) | \right| \right) \\ \leq \sum_{n, p \leq \frac{t}{\delta} + 2} (4p + 2n + 3) \int |F - G| dm.$$

D'où le lemme.

LEMME 2. — Fixons A, A', q, q' . L'application

$$F \rightarrow \frac{\bar{m}_F({}^A q) \bar{m}_F({}^{A'} q')}{\int F dm} \text{ est continue sur } L_\delta^1.$$

Démonstration. — Immédiate.

D'après la proposition 1 et le théorème 2 d'autre part nous avons pour tout A, A', q, q', t, F :

$$D(A, A', q, q', t, F) = \int_{A_{q'}} E_{\bar{m}_F}^{t, F \theta_t^{-1}, \mathcal{F}_F} 1_{A_q}(x, s) d\bar{m}_F(x, s).$$

Notons $\mathbb{B}_F$ la σ -algèbre $\bigwedge_t F \theta_t^{-1} \mathcal{F}_F$. Quand n tend vers l'infini $D(A, A', q, q', n, F)$ converge vers $\int_{A_{q'}} E_{\bar{m}_F}^{\mathbb{B}_F} 1_{A_q}(x, s) d\bar{m}_F(x, s)$.

Appelons $\mathcal{C}(A, A', q, q')$ l'ensemble des fonctions F de L_δ^1 telles que :

$$\int_{A_{q'}} E_{\bar{m}_F}^{\mathbb{B}_F} 1_{A_q}(x, s) d\bar{m}_F(x, s) = \frac{\bar{m}_F({}^A q) \bar{m}_F({}^{A'} q')}{\int F dm}$$

L'ensemble $\mathcal{C}(A, A', q, q')$ est l'ensemble où s'annule la limite d'une

suite de fonctions continues (lemme 1 et 2), c'est une intersection dénombrable d'ouverts de L_δ^1 . Soit $\mathcal{A}_\sigma$ une algèbre dénombrable engendrant $\mathcal{A}$. La classe $\mathcal{F}$ coïncide avec :

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_\sigma} \bigcap_{A' \in \mathcal{A}_\sigma} \bigcap_{qq' \in Q_+} \mathcal{C}(A, A', q, q').$$

La classe $\mathcal{F}$ est bien une intersection dénombrable d'ouverts.

3. THÉORÈME DE SINAÏ RELATIVISÉ

Soient π un vecteur de probabilité. L'entropie $H(\pi)$ est la quantité $H(\pi) = -\sum \pi(i) \log \pi(i)$.

Soient T un (endo)morphisme d'un espace de Lebesgue $(X, \mathcal{A}, m)$, $P = \{p_1, \dots, p_q\}$ une partition mesurable de X , $\mathcal{C}$ une sous σ -algèbre T invariante de $\mathcal{A}$. Notons $\pi_p^\mathcal{C}(x)$ le vecteur (aléatoire) de probabilité défini par : $\pi_{p_i}^\mathcal{C}(x) = E_m^{\sigma(\mathcal{C}, T^j P, j < 0)} 1_{p_i}(x)$, $1 \leq i < q$. L'entropie moyenne conditionnelle de la partition P par rapport à la σ -algèbre $\mathcal{C}$ est la quantité :

$$h(P | \mathcal{C}) = \int H(\pi_p^\mathcal{C}(x)) dm(x)$$

Nous établirons le résultat suivant (« théorème de Sinaï relativisé » (cf. [8], [4] et [9])).

THÉORÈME 3. — Soit T un automorphisme ergodique de l'espace de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mathcal{A}$ une sous σ -algèbre décroissante telle que : $\bigcap_n T^n \mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ une sous σ^- algèbre T invariante.

Soit π un vecteur de probabilité $\pi = \pi_1, \dots, \pi_p$ avec $H(\pi) \leq \sup \{ h(P | \mathcal{C}), P \text{ partition finie de } X \}$. Il existe une partition β , $\mathcal{A}$ mesurable distribuée comme π , telle que les partitions $T^i \beta (i \in \mathbb{N})$ sont indépendantes et engendrent une σ -algèbre indépendante de $\mathcal{C}$.

Si la σ -algèbre $\mathcal{C}$ est grossière, le théorème 3 est un théorème de Sinaï [8]. Si on ne demande pas à la partition d'être $\mathcal{A}$ mesurable, le résultat est dû à Ornstein [4]. Remarquons également que ce théorème 3 est utile pour généraliser le théorème de Sinaï au cas d'entropie infinie. Pour le démontrer, nous adapterons la démonstration d'Ornstein et Weiss du théorème de Sinaï (cf. [6]).

Démonstration. — Avec les notations précédentes, notons :

$$d(\pi, \pi') = \sum_i |\pi_i - \pi'_i|$$

la distance usuelle sur les vecteurs de probabilités et

$$D(\pi, P | \mathcal{C}) = \int d(\pi, \pi_p^{\mathcal{C}}(x)) dm(x).$$

L'espace Z des partitions finies ordonnées est muni de la distance

$$|P - P'| = \sum_i m(P_i \Delta P'_i).$$

LEMME 3. — La fonction $D(\pi, P | \mathcal{C})$ est semi-continue inférieurement sur Z .

En effet (cf. [6] lemme 4) la fonction $D(\pi, P | \mathcal{C})$ est limite croissante de fonctions continues.

LEMME 4. — Soit P_n une suite convergente vers P , de partitions à p éléments telles que $D(\pi, P_n | \mathcal{C}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. Alors $D(\pi, P | \mathcal{C}) = 0$. Nous allons donc construire, en suivant [6], une suite convergente de partitions $P_n \mathcal{A}$ mesurables telles que $D(\pi, P_n | \mathcal{C})$ tende vers 0.

LEMME 5. — (Thouvenot [9]). Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ergodique, $\mathcal{C}$ une sous σ -algèbre T invariante, π un vecteur de probabilité avec

$$H(\pi) \leq \sup \{ h(P | \mathcal{C}) | P \in Z \}.$$

Il existe une partition β distribuée comme π , telle que les $T^i \beta$ soient indépendants et engendrent une σ -algèbre indépendante de $\mathcal{C}$.

LEMME 6. — ([6] lemme 6). Soit π un vecteur de probabilité $H(\pi) > 0$. Il existe une suite π_i avec :

- i) $H(\pi_1) < H(\pi_2) < \dots < H(\pi)$
- ii) $d(\pi_i, \pi) \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$
- iii) Si $d(\pi', \pi_{i+1}) \leq 2d(\pi_i, \pi_{i+1})$, alors $H(\pi') < H(\pi)$
- iv) $\sum_{i=0}^{\infty} d(\pi_i, \pi_{i+1}) < \infty$

LEMME 7. — Soient $\pi = \{ \pi(1), \dots, \pi(p) \}$ un vecteur de probabilité fixé, P une partition avec p atomes, $\mathcal{A}$ mesurable et telle que :

$$h(P | \mathcal{C}) \leq \sup_{Q \in Z} h(Q | \mathcal{C}) - c, \quad \delta \text{ tel que } H(\delta, 1 - \delta) < c.$$

Supposons que l'ensemble des x tels que pour certains indices $i(x)$,

$j(x)$ on ait : $\pi_{p_i}^{\mathcal{C}}(x) - \pi(i) > \delta$, $\pi_{p_j}^{\mathcal{C}}(x) - \pi(j) < -\delta$ est de mesure plus grande que δ , alors il existe $\bar{P}$ dans $\mathcal{A}$ avec

$$i) \quad D(\pi, \bar{P} | \mathcal{C}) \leq D(\pi, P | \mathcal{C}) - \delta^2$$

$$ii) \quad |P - \bar{P}| \leq 4(D(\pi, P | \mathcal{C}) - D(\pi, \bar{P} | \mathcal{C})).$$

Démonstration. — (cf. [6] lemme 9). Soit $\mathcal{D}$ la σ -algèbre invariante engendrée par $\mathcal{C}$ et P .

Soit Q une partition $Q = \{C, X \setminus C\}$ telle que $\mu(Q) = \delta$, les $T^i Q$ sont indépendants et engendrent une σ -algèbre indépendante de $\mathcal{D}$ (lemme 5). Soit, pour tout couple (i, j) , B_{ij} l'ensemble où $i(x) = i$ et $j(x) = j$. B_{ij} est $\mathcal{D}$ mesurable.

Posons :

$$P'_i \cap B_{ij} = (P_i \cap B_{ij}) \setminus (P_i \cap B_{ij} \cap C)$$

$$P'_j \cap B_{ij} = (P_j \cap B_{ij}) \cup (P_i \cap B_{ij} \cap C)$$

Nous avons immédiatement sur B_{ij} :

$$E_{\mu}^{\sigma(\mathcal{C}, T^{kP} k < 0)} 1_{p_i} = \pi_{p_i}^{\mathcal{C}}(x) - \delta$$

$$E_{\mu}^{\sigma(\mathcal{C}, T^{kP} k < 0)} 1_{p_j} = \pi_{p_j}^{\mathcal{C}}(x) + \delta$$

et

$$|P - P'| = \sum_e \mu(P_e \Delta P'_e) = \sum_e \int E^{\sigma(\mathcal{C}, T^{kP} k < 0)} |1_{P_e} - 1_{P'_e}| d\mu = 2\delta \sum_{ij} \mu(B_{ij})$$

De même :

$$\int d(\pi, \{E_{\mu}^{\sigma(\mathcal{C}, T^{kP} k < 0)} 1_{p_i}\}) d\mu = D(\pi, P | \mathcal{C}) - 2\delta \sum_{ij} \mu(B_{ij}).$$

Par indépendance des $T^k Q$, $k < 0$ et le fait que $\sigma(\mathcal{C}, T^k P', k < 0)$ est moins fine que $\sigma(\mathcal{C}, T^k P \vee Q, k < 0)$, nous avons construit P' avec :

$$D(\pi, P | \mathcal{C}) - D(\pi, P' | \mathcal{C}) \geq |P - P'| \geq 2\delta^2.$$

Choisissons enfin η tel que $\eta > \delta^2$ et si $|\bar{P} - P'| < \eta$ alors

$$D(\pi, \bar{P} | \mathcal{C}) \leq D(\pi, P' | \mathcal{C}) + \delta^2 \quad (\text{lemme 3}).$$

Les propriétés de P' ne changent pas si on change Q en $T^{-m}Q$. Choisissons m assez grand pour qu'il existe $\bar{Q}$ $\mathcal{A}$ mesurable avec $|\bar{Q} - T^{-m}Q| < \eta$ et faisons la construction précédente avec $\bar{Q}$ au lieu de Q . Nous obtenons $D(\pi, P | \mathcal{C}) - D(\pi, \bar{P} | \mathcal{C}) \geq \delta^2$ et

$$\begin{aligned} |P - \bar{P}| &\leq D(\pi, P | \mathcal{C}) - D(\pi, \bar{P} | \mathcal{C}) + \delta^2 + \eta \\ &\leq (D(\pi, P | \mathcal{C}) - D(\pi, \bar{P} | \mathcal{C})). \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

LEMME 8. — Soient $\delta_2, C > 0$ tels que si $d(\pi^1, \pi_2) < \delta_2$,

$$H(\pi^1) \leq \sup_{Q \in \mathcal{Z}} h(Q | \mathcal{C}) - C.$$

Pour tout $\delta_1 > 0$, il existe δ tel que si P est une partition avec p éléments $\mathcal{A}$ mesurable et telle que : $\delta_1 \leq D(\pi_2, P | \mathcal{C}) < \delta_2$, alors peut trouver $\bar{P}$ $\mathcal{A}$ mesurable satisfaisant :

- i) $D(\pi_2, \bar{P} | \mathcal{C}) \leq D(\pi_2, P | \mathcal{C}) - \delta$
- ii) $|P - \bar{P}| \leq 4(|D(\pi_2, P | \mathcal{C}) - D(\pi_2, \bar{P} | \mathcal{C})|).$

Démonstration. — (cf. [6] lemme 8).

Il suffit de vérifier que la partition P et le vecteur π_2 satisfont aux hypothèses du lemme 7 avec $\bar{\delta}$ suffisamment petit, et de prendre $\delta = \bar{\delta}^2$.

LEMME 9. — Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que si $D(\pi_1, P_1 | \mathcal{C}) < \varepsilon_1$ pour une partition $P_1 \mathcal{A}$ mesurable à p éléments, pour tout $\varepsilon_2 > 0$, il existe P_2 $\mathcal{A}$ mesurable à p éléments avec :

- i) $D(\pi_2, P_2 | \mathcal{C}) < \varepsilon_2$
- ii) $|P_1 - P_2| \leq 4d(\pi_1, \pi_2).$

Démonstration. — (cf. [6] lemme 7).

Prenons $\varepsilon_1 = d(\pi_1, \pi_2)$. D'après le lemme 6 iii) $\delta_2 = 2d(\pi_2, \pi_1)$ satisfait aux hypothèses du lemme 8 et

$$D(\pi_2, P_1 | \mathcal{C}) \leq D(\pi_1, P_1 | \mathcal{C}) + d(\pi_1, \pi_2) < \delta_2.$$

En choisissant $\delta_1 = \varepsilon_2$, le lemme 8 montre que nous pouvons obtenir $D(\pi_2, P_2 | \mathcal{C}) \leq \varepsilon_2$ et avoir $|P_1 - P_2| \leq 4D(\pi_2, P_1 | \mathcal{C}) \leq 4d(\pi_1, \pi_2)$.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème. Soit π_i donné par le lemme 6 et $\varepsilon_i = d(\pi_i, \pi_{i+1})$. Nous commençons par construire P_0 telle que $D(\pi_1, P_0 | \mathcal{C}) = 0$ (lemme 5) puis nous prenons P_1 $\mathcal{A}$ mesurable suffisamment proche de $T^{-m}P_0$ pour que $D(\pi_1, P_1 | \mathcal{C}) < \varepsilon_1$. Le lemme 9 nous donne alors une suite convergente de partitions P_n $\mathcal{A}$ mesurable et telle que $D(\pi, P_n | \mathcal{C})$ tende vers 0.

D'après le lemme 4, la partition β limite des P_n est la partition cherchée.

4. LA CLASSE $\mathcal{F}$ EST DENSE

Nous rappelons d'abord les propriétés suivantes :

Notons $\pi(X, \mathcal{A}, m, T)$ la σ -algèbre engendrée par les partitions finies d'entropie moyenne nulle.

PROPOSITION 3. — (Roklin [7] p. 38). Si le système $(X, \mathcal{A}, m, T)$ satisfait (C), alors les σ -algèbres $\bigvee_n T^{-n} \mathcal{A}$ et $\pi(X, \mathcal{A}, m, T)$ coïncident.

PROPOSITION 4. — (Blanchard [1] proposition 2-1). Considérons un système $(X, \mathcal{A}, m, T)$ satisfaisant (C), F une fonction intégrable sur $(X, \mathcal{A}, m)$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \bar{m}, \theta)$ le semi-flot spécial bâti sous F au-dessus de $(X, \mathcal{A}, m, T)$. Le système $(\Omega, \mathcal{A}, \bar{m}, \theta)$ satisfait la condition (C).

Un flot $(\Omega, \mathcal{A}, m, \theta)$ est appelé un K-flot si la σ -algèbre $\pi(X, \mathcal{A}, m, \theta)$ est grossière.

Le théorème 1 se montre en utilisant les propositions 2, 3, 4 et la proposition 5 ci-dessous :

PROPOSITION 5. — Soit T un automorphisme de l'espace de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, \mu)$ $\mathcal{A}$ une sous σ -algèbre propre croissante de $\mathcal{B}$ telle que $\bigvee_n T^n \mathcal{A} = \mathcal{B}$. La classe des fonctions $F \mathcal{A}$ mesurables, intégrables, minorées par δ telles que le flot spécial bâti sous F est un K-flot, est *dense* dans $L^1_\delta(\mathcal{A}, \mu)$.

Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ la proposition 5 est due à Ornstein et Smorodinsky [5]. Nous allons d'ailleurs suivre leur démonstration en construisant F dans $\mathcal{A}$.

Les outils sont les lemmes suivants de [5] :

LEMME 10. — ([5] lemme 2). Soit T une transformation ergodique d'entropie positive. Soient P, Q deux partitions finies telles que : $h(P) < h(P \vee Q)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition finie $\bar{Q}$ avec $|Q - \bar{Q}| < \varepsilon$, $h(P \vee \bar{Q}) < h(P \vee Q)$.

LEMME 11. — ([5] lemme 5). Soit T_0 un automorphisme ergodique de l'espace $(X_0, \mathcal{B}_0, \mu_0)$. Soient P une partition finie génératrice de X_0 et f une fonction positive P mesurable. Soit $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1, T_1)$ le schéma de Bernoulli engendré par des variables aléatoires ξ_i , i entier, indépendantes équidistribuées telles que ξ_0 est non arithmétique et bornée. Soit U le flot spécial bâti au-dessus du système produit

$$(X_0 \times X_1, \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_1, \mu_0 \times \mu_1, T_0 \times T_1)$$

sous la fonction g , $g(x_0, x_1) = f(x_0) + \xi_0(x_1)$. Le flot U est un K-flot.

LEMME 12. — Soient T un automorphisme ergodique de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mathcal{A}$ une sous σ -algèbre propre de $\mathcal{B}$ croissante et telle que $\bigvee_n T^n \mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$. Il existe $F \mathcal{A}$ mesurable $1 \leq F \leq 1 + \varepsilon$, telle que le flot bâti sous F au-dessus de $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est un K-flot.

Démonstration (cf. [5] Théorème 2). — Remarquons d'abord que le système est d'entropie non nulle car il existe une σ -algèbre strictement crois-

sante. Soit A_n une suite dense dans $\mathcal{A}$. Par application répétée du lemme 10 et du théorème 3, nous construisons une suite d'ensembles $A'_n, D_n, \mathcal{A}$ mesurables tels que la suite A'_n est dense, $0 < \mu(D_n) < \frac{1}{2^n}$, les ensembles $T^i D_n$ sont indépendants et engendrent une σ -algèbre indépendante de

$$\sigma(T^j D_k \ k < n, \ T^j A'_k \ k \leq n).$$

Choisissons ε' irrationnel $\varepsilon' < \varepsilon$, et posons $F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (1 + \varepsilon')^{1_{D_n}}$.

Le flot est alors un K-flot d'après le lemme 11.

Démonstration de la proposition 5. — Soit F une fonction de L^1_δ , $\varepsilon > 0$.

Nous allons construire $F' \mathcal{A}$ mesurable avec $\int |F' - F| < \varepsilon$, $F' \geq \delta$ et telle que le flot spécial bâti sous F' soit un K-flot. Choisissons d'abord $G \geq \delta$ mesurable prenant des valeurs proportionnelles à un nombre $d > 0$ et telle que $\int |G - F| < \varepsilon/2$. Considérons la tour $(X_G, \mathcal{B}_G, m_G, T_G)$ bâtie sous G au-dessus de $(X, \mathcal{A}, m)$ et soit $\mathcal{A}_G$ la sous σ -algèbre de $\mathcal{B}_G$ engendrée par les fonctions $f(x)b(n)$, $f \mathcal{A}$ mesurable.

La σ -algèbre $\mathcal{A}_G$ est décroissante par T_G et vérifie $\bigcap_n T_G^n \mathcal{A}_G = \mathcal{B}_G$.

Soit G' une fonction $\mathcal{A}_G$ -mesurable, satisfaisant $1 \leq G' \leq 1 + \varepsilon/2d$ et telle que le flot spécial bâti sous G' au-dessus de $(X_G, \mathcal{B}_G, m_G, T)$ soit un K-flot. La fonction $F' = G + d(G' - 1)$ est la fonction cherchée.

En appliquant la proposition 5 à l'extension naturelle d'un endomorphisme, nous obtenons :

COROLLAIRE. — Soit T un endomorphisme de l'espace de Lebesgue $(X, \mathcal{A}, m)$ tel que $\mathcal{A} \neq T^{-1}\mathcal{A} \pmod{0}$. La classe des fonctions F intégrables, minorées par δ et telles que la σ -algèbre $\pi(\Omega, \mathcal{A}, \bar{m}, \theta)$ est grossière est dense dans $L^1_\delta(\mathcal{A}, m)$.

D'après les propositions 3 et 4, la classe $\mathcal{F}$ coïncide avec la classe des fonctions F de L^1_δ telles que la σ -algèbre $\pi(\Omega, \mathcal{A}, \bar{m}, \theta)$ est grossière. Cette classe est dense d'après le corollaire et ceci achève la démonstration du théorème 1.

Remarquons également que en jouant sur $\mu(D_n)$ dans le lemme 12, il est possible de construire une tour aussi petite que l'on veut qui soit K-système. Le théorème 1 est encore vrai pour la classe des fonctions $\mathcal{F}$ à valeurs entières, l'espace $\Omega(X \times \mathbb{N})$ et la mesure $\bar{m}$ produit de m sur X et de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire pour les tours de X .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BLANCHARD, Partitions extrémales des flots d'entropie finie. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **36**, 1976, p. 129-136.
- [2] B. M. GUREVIC, Some existence conditions for K-decompositions for special flows. *Trans. Moscow Math. Soc.*, t. **17**, 1967, p. 99-120.
- [3] M. RATNER, Bernoulli flows over maps of the interval (preprint).
- [4] D. ORNSTEIN, Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic. *Advances in Math.*, t. **5**, 1970, p. 339-349.
- [5] D. S. ORNSTEIN and M. SMORODINSKY, Ergodic flows of positive entropy can be time changed to become K-flows. *Israël Journal of Maths*, t. **26**, 1977, p. 75-83.
- [6] D. S. ORNSTEIN and B. WEISS, Unilateral codings of Bernoulli systems. *Israël Journal of Maths*, t. **21**, 1975, p. 159-166.
- [7] V. A. ROKLIN, Lectures on the entropy theory of measure preserving transformations. *Russian Maths Surveys*, t. **22**, 1967, p. 1-52.
- [8] Ya G. SINAI, Weak isomorphism of transformations with invariant measure. *Math. S. B.*, t. **63**, 1964, p. 23-42 ; *A. M. S. Translations*, t. **57**, 1966, p. 123-143.
- [9] J.-P. THOUVENOT, Quelques propriétés des systèmes dynamiques qui se décomposent en un produit de deux systèmes dont l'un est un schéma de Bernoulli. *Israël Journal of Maths*, t. **21**, 1975, p. 177-207.
- [10] H. TOTOKI, On a class of special flows. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **15**, 1970, p. 157-167.

(Manuscrit reçu le 12 juin 1978)