ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GUY MÉLARD

Propriétés du spectre évolutif d'un processus non stationnaire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 4 (1978), p. 411-424

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_4_411_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 4, 1978, p. 411-424. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Propriétés du spectre évolutif d'un processus non stationnaire

par

Guy MÉLARD
Institut de Statistique, Université Libre de Bruxelles,
C. P. 210, Campus de la Plaine, Boulevard du Triomphe,
B-1050 Bruxelles

RÉSUMÉ. — Nous étudions les propriétés du spectre évolutif, c'est-à-dire un spectre variant dans le temps, qu'on peut dériver de la représentation canonique d'un processus non stationnaire purement indéterminable à paramètre discret.

SUMMARY. — This paper is concerned with the properties of the evolutive, i. e. time-dependent, spectrum that can be derived from the canonical representation of a non-stationary purely non-deterministic discrete-time stochastic process.

0. INTRODUCTION

Un spectre fonction du temps a été calculé et utilisé (Granger et Hatanaka [5]) avant qu'une définition précise n'en soit donnée (Priestley [*13*]). Nous justifierons dans un prochain article [*10*] nos réserves à l'égard de la théorie de Priestley. Quand on sort du cadre des processus stationnaires, l'imagination peut se libérer. Il est donc possible de définir un spectre variant dans le temps de bien des manières et le choix d'une définition présente un certain arbitraire. De plus, d'autres approches ont donné naissance à des spectres qui ne dépendent pas du temps.

L'auteur [9] et Tjøsheim [*14*] ont indépendamment défini un spectre que nous appellerons spectre évolutif qui présente l'avantage d'être dérivé d'une façon rationnelle de la décomposition canonique, laquelle est unique. Le spectre évolutif incorpore à chaque instant l'information nouvelle mais le futur du processus n'y joue aucun rôle. La classe des processus stochastiques considérés est celle des processus à paramètre discret purement indéterminables. Tjøsheim a aussi étudié les processus à paramètre continu. De plus, il a montré que le spectre mérite ce nom au sens de la théorie des opérateurs d'un espace de Hilbert.

Cet article a pour but d'établir des propriétés que possède le spectre évolutif (section 2). Loynes [*8*] a dressé un inventaire des propriétés souhaitables pour un concept de spectre variant dans le temps. Nous nous y référerons. Auparavant nous introduisons les notations et les définitions (section 1). Nous terminons l'article par une discussion sur l'utilité du spectre évolutif en dépit de ses défauts (section 3).

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Soit $X = \{ X_t, t \in \mathbb{Z} \}$ un processus stochastique du second ordre, à valeurs complexes (a^* représente le nombre complexe conjugué du nombre complexe a). On considère l'espace de Hilbert $\mathscr{L}^2(X)$ sous-tendu par les X_t dont la covariance est le produit scalaire. Notons $\mathscr{S}^2 \{ . \}$ le sous-espace de $\mathscr{L}^2(X)$ sous-tendu par la famille de variables aléatoires $\{ . \}$. Les sous-espaces $\mathscr{L}^2(X, t) = \mathscr{S}^2 \{ X_u ; u \leqslant t \}$, $t \in \mathbb{Z}$, sont emboîtés les uns dans les autres. Supposons que $\mathscr{L}^2(X, -\infty) = 0$; on dit alors que le processus est purement indéterminable. L'innovation η_t est définie par $\eta_t = X_t - \hat{X}_{t-1}(1)$ où $\hat{X}_{t-1}(1)$ est la projection orthogonale de X_t dans $\mathscr{L}^2(X, t-1)$. Les innovations sont orthogonales deux à deux. Nous utilisons les innovations normées définies par $\xi_t = \eta_t / \| \eta_t \|$ si $\| \eta_t \| > 0$ et $\xi_t = 0$ si $\| \eta_t \| = 0$, la norme étant l'écart-type. La décomposition de Wold-Cramér, aussi appelée la représentation canonique du processus (Cramér [*2*]), exprime le développement de X_t dans la base orthonormée de $\mathscr{L}^2(X, t)$ constituée par les $\xi_t \neq 0$:

$$X_t = \sum_{u=-\infty}^{t} h_{tu} \xi_u , \tag{1a}$$

ou

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{tj} \xi_{t-j} . \tag{1b}$$

Nous utiliserons l'une ou l'autre de ces expressions selon la commodité, sachant que $\psi_{tj} = h_{t,t-j}$, $j = 0, 1, \ldots$. Moyennant la convention que $h_{tu} = 0$ pour tout t lorsque $\xi_u = 0$, la décomposition (1) est uniquement déterminée. Pour que les séries convergent en moyenne quadratique, il faut que $\sum_j |\psi_{tj}|^2 < \infty$. Si le processus est stationnaire au sens large, on substitue ψ_j à ψ_{tj} dans (1*b*) et ψ_{t-u} à h_{tu} dans (1*a*). La fonction de covariance du processus, $\Gamma_{st} = \operatorname{cov}(X_s, X_t)$, est donnée par l'expression

$$\Gamma_{st} = \sum_{u=-\infty}^{\min(s,t)} h_{su} h_{tu}^* . \tag{2}$$

Pour remplacer la représentation spectrale des processus stationnaires, on envisage une représentation de Karhunen [*7*] sur l'espace de Lebesgue $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ où $\Omega = [-\pi, \pi]$. Elle a la forme d'une intégrale stochastique

$$X_t = \int_\Omega \phi_t(\omega)\zeta(d\omega) , \tag{3}$$

où $\phi_t(.) \in L^2 = L^2(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$, l'espace des fonctions de carré sommable, et $\zeta(d\omega)$ est une mesure aléatoire à valeurs orthogonales, c'est-à-dire telle que

$$\forall\ B_1,\ B_2 \in \mathscr{B} : E[\zeta(B_1)\zeta^*(B_2)] = \mu(B_1 \cap B_2) .$$

La fonction de covariance du processus se représente par

$$\Gamma_{st} = \int_\Omega \phi_s(\omega)\phi_t^*(\omega) d\omega . \tag{4}$$

Parzen [*12*] a montré l'existence d'une multitude de représentations de Karhunen. Le théorème suivant met en évidence une représentation de Karhunen particulière induite par la décomposition de Wold-Cramér. Nous l'appellerons la représentation évolutive.

THÉORÈME. — Un processus stochastique à paramètre discret purement indéterminable, dont (1*a*) est la décomposition de Wold-Cramér en son processus innovation normé, admet une représentation de Karhunen sur l'espace de Lebesgue $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$, avec $\Omega = [-\pi, \pi]$, la fonction $\phi_t(\omega)$ étant définie par

$$\phi_t(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{u=-\infty}^{t} h_{tu} e^{i\omega u} . \tag{5a}$$

Démonstration. — En vertu du théorème de Riesz-Fischer, il existe une fonction $\phi_t(\omega) \in L^2$ définie par (5*a*). Si on l'introduit dans le second membre de (4), on retrouve (2) par le théorème de Parseval.

De cette façon, on fait correspondre l'innovation normée ξ_t à la fonction $(2\pi)^{-1/2} \exp(i\omega t) \in L^2$, pour tout t tel que $\xi_t \neq 0$, ce qui définit un isomorphisme entre $\mathscr{L}^2(X)$ et un sous-espace $L^2(\phi) \subset L^2$. Grâce à l'unicité de la décomposition de Wold-Cramér et la particularité de l'isomorphisme choisi, la représentation évolutive peut être considérée comme privilégiée. Une autre expression de (5*a*), dérivée de (1*b*), est la suivante :

$$\phi_t(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{tj} e^{i\omega(t-j)} . \tag{5b}$$

Nous utiliserons aussi la fonction $A_t(\omega)$ définie par

$$A_t(\omega) = \phi_t(\omega) e^{-i\omega t} \tag{6}$$

qui ne dépend pas de t dans le cas d'un processus stationnaire.

Il nous est maintenant possible de définir le *spectre évolutif*, $f_t(\omega)$, de la façon suivante :

$$f_t(\omega) = |\phi_t(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{u=-\infty}^{t} h_{tu} e^{i\omega u} \right|^2 \tag{7a}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{tj} e^{-i\omega j} \right|^2 . \tag{7b}$$

Dans la suite de cet article, les symboles seront surmontés d'indices $^{(1)}$ ou $^{(2)}$ lorsque deux processus $\{ X_t^{(1)} \}$ et $\{ X_t^{(2)} \}$ seront considérés.

2. PROPRIÉTÉS DU SPECTRE ÉVOLUTIF

Loynes [*8*] a établi une liste des propriétés souhaitables pour un concept idéal de spectre évolutif. Il a considéré quelques définitions existantes, dont celle de Priestley, et il a étudié si elles satisfont à ces propriétés. Il n'a pas pu aller très loin dans cette étude car les définitions envisagées ne se prêtent pas aisément aux investigations. Nous présentons maintenant les propriétés du spectre évolutif tel que défini à la section 1, en faisant suivre chacune de sa référence dans la classification de Loynes.

PROPRIÉTÉ A. — *La variance du processus en t s'écrit*, en vertu de (4):

$$\operatorname{var}(X_t) = \int_\Omega |\phi_t(\omega)|^2 d\omega = \int_\Omega f_t(\omega) d\omega, \tag{8}$$

d'où $f_t(\omega)d\omega$ est la contribution de l'intervalle $(\omega, \omega + d\omega)$ à la variance du processus en t (Loynes : A2).

PROPRIÉTÉ B. — *Si le processus est stationnaire, la définition de* $f_t(\omega)$ *coïncide avec celle de la fonction de densité spectrale* (Loynes : A5).

PROPRIÉTÉ C. — *Une estimation* biaisée *du spectre évolutif* lissé à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel *peut être obtenue à partir d'une réalisation finie unique*, comme on le montrera par ailleurs [*11*] (Loynes : A7).

PROPRIÉTÉ D. — *Le spectre évolutif est une fonction réelle et non négative de t et de* ω (Loynes : A1, B8).

PROPRIÉTÉ E. — *Si* $\{X_t\}$ *est un processus réel, alors* $f_t(\omega) = f_t(-\omega)$. Dans le cas réel, il sera donc suffisant d'étudier l'intervalle de fréquences $[0, \pi]$ (Loynes : B11*c*).

PROPRIÉTÉ F. — *Le spectre évolutif est la transformée de Fourier d'une « quantité apparemment sensée »* (Loynes : A8). En effet $f_t(\omega)$ est la fonction de densité spectrale du processus $\{X_s^{(t)} ; s \in \mathbb{Z}\}$ où $X_s^{(t)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{tj}\xi_{s-j}$.
C'est donc la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance de ce processus stationnaire. Notons qu'il n'y a pas de relation simple entre le spectre évolutif et la fonction de covariance de X.

PROPRIÉTÉ G. — *Si* $X_t^{(2)} = X_t^{(1)} \exp(-i\omega_0 t)$, *alors* $f_t^{(2)}(\omega) = f_t^{(1)}(\omega + \omega_0)$, *où l'argument est exprimé modulo* 2π (Loynes : B9). Ceci demande une démonstration. Remarquons d'abord que $\mathscr{L}^2(X^{(2)}, t) = \mathscr{L}^2(X^{(1)}, t)$. Un isomorphisme est défini dans $\mathscr{L}^2(X^{(1)})$ par $\xi_t^{(2)} = \xi_t^{(1)} \exp(-i\omega_0 t)$. La décomposition de Wold-Cramér de $\{X_t^{(1)}\}$, sous la forme (1*a*), fournit pour $\{X_t^{(2)}\}$:

$$X_t^{(2)} = h_{tt}^{(1)}\xi_t^{(2)} + \sum_{u=-\infty}^{t-1} h_{tu}^{(1)} e^{i\omega_0(u-t)} \xi_u^{(2)} .$$

Or, si $\xi_t^{(1)} \in \mathscr{L}^2(X^{(1)}, t)$, alors $\xi_t^{(2)} \in \mathscr{L}^2(X^{(2)}, t)$, donc les $\xi_t^{(2)}$ sont les innovations normées. Il en résulte que

$$\begin{aligned} f_t^{(2)}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left| \sum_{u=-\infty}^{t} h_{tu}^{(1)} e^{i\omega_0(u-t)} e^{i\omega u} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\left| \sum_{u=-\infty}^{t} h_{tu}^{(1)} e^{i(\omega+\omega_0)u} \right|^2 = f_t^{(1)}(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ H. — *Si* $X_t^{(2)} = X_{t+h}^{(1)}$, *alors* $f_t^{(2)}(\omega) = f_{t+h}^{(1)}(\omega)$ (Loynes : B10).

PROPRIÉTÉ I. — *Si* $X_t^{(2)} = X_t^{(1)*}$, *alors* $f_t^{(2)}(\omega) = f_t^{(1)}(-\omega)$ (Loynes : B11*b*).

Les démonstrations, semblables à celle de la propriété G, sont laissées au lecteur.

PROPRIÉTÉ J. — *Si* $X_t^{(2)} = \sum_{k=-m}^{t} g_k X_{t-k}^{(1)}$, *m fini, alors* $f_t^{(2)}(\omega)$ *peut, sous certaines conditions, s'exprimer approximativement en fonction de* $f_t^{(1)}(\omega)$ (Loynes : A3). Le processus $\{ X_t^{(2)} \}$ est donc le processus $\{ X_t^{(1)} \}$ passé au travers d'un filtre linéaire $\{ g_k \}$. En vertu de la propriété H, il suffit de considérer le cas où $m = 0$. Supposons que la série

$$X_t^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k X_{t-k}^{(1)} \tag{9}$$

converge en moyenne. Nous avons alors

$$\begin{aligned} X_t^{(2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k \sum_{u=-\infty}^{t-k} h_{t-k,u}^{(1)} \xi_u^{(1)} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{t} \left(\sum_{k=0}^{t-u} g_k h_{t-k,u}^{(1)} \right) \xi_u^{(1)}, \end{aligned} \tag{10}$$

où la série converge également en moyenne. Ceci montre que

$$\mathscr{L}^2(X^{(2)}, t) \subset \mathscr{L}^2(\xi^{(1)}, t) = \mathscr{L}^2(X^{(1)}, t).$$

L'inclusion en sens inverse n'est pas nécessairement vraie, ce qui équivaut à dire que les innovations normées du processus $\{ X_t^{(2)} \}$ ne sont pas nécessairement $g_0\xi_t^{(1)}/|g_0|$. Par exemple, si $X_t^{(1)} = \xi_t^{(1)}$ est un bruit blanc stationnaire et $X_t^{(2)} = X_t^{(1)} - 2X_{t-1}^{(1)} = \xi_t^{(1)} - 2\xi_{t-1}^{(1)}$, les $\xi_t^{(1)}$ ne sont pas les innovations du processus stationnaire $\{X_t^{(2)}\}$ car la condition (Doob [*4*], p. 577) que le polynôme $1 - 2z$ ait ses zéros extérieurs au disque unité du plan de Gauss n'est pas remplie. Les innovations $\xi_t^{(2)}$ peuvent être obtenues dans certains cas particuliers, notamment dans l'exemple cité. Dans certains cas encore plus particuliers, tel celui où le processus a un passé nul, $X_t^{(1)} = 0$ pour $t \leqslant t_0$ avec t_0 fixé, les $\xi_t^{(1)}$ sont aussi les innovations de $\{X_t^{(2)}\}$, à un facteur près. En vertu de (7*a*), on a alors

$$f_t^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{u=-\infty}^{t}\left(\sum_{k=0}^{t-u} g_k h_{t-k,u}^{(1)}\right)e^{i\omega u}\right|^2. \tag{11}$$

Sous certaines conditions, il est possible de poursuivre de façon *approchée*. Supposons d'abord que le filtre linéaire $\{g_k\}$ soit fini, c'est-à-dire $g_k = 0$ pour $k > K$ (K fini). Définissons

$$M = \sum_{k=0}^{K} |k|\,|g_k|, \tag{12}$$

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^{K} g_k e^{-i\omega k}. \tag{13}$$

Supposons qu'il existe une fonction non négative $B(\omega)$, définie et bornée sur Ω, telle qu'on ait pour $A_t^{(1)}(\omega)$ définie par (6) :

$$|A_t^{(1)}(\omega) - A_{t-k}^{(1)}(\omega)| \leqslant |k|\,B(\omega) \tag{14}$$

quand $0 \leqslant k \leqslant K$ et t appartient à un ensemble fini S de $\mathbb{Z}$ où la propriété est étudiée. Remplaçons $X_{t-k}^{(1)}$ dans (10) par sa représentation évolutive (3); il vient

$$\begin{aligned} X_t^{(2)} &= \sum_{k=0}^{K} g_k \int_\Omega \phi_{t-k}^{(1)}(\omega)\zeta(d\omega) \\ &= \frac{|g_0|}{g_0}\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{K} g_k A_{t-k}^{(1)}(\omega)e^{-i\omega k}\right)e^{i\omega t}\zeta(d\omega). \end{aligned} \tag{15}$$

Si les innovations de $\{X_t^{(2)}\}$ sont proportionnelles aux innovations de

$\{X_t^{(1)}\}$, la représentation (15) est la représentation évolutive de $\{X_t^{(2)}\}$, par conséquent

$$f_t^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{K} g_k A_{t-k}^{(1)}(\omega)e^{-i\omega k}\right|^2 . \tag{16}$$

Nous pouvons écrire

$$A_{t-k}^{(1)}(\omega) = A_t^{(1)}(\omega) + r_{tk}(\omega), \tag{17}$$

où

$$|r_{tk}(\omega)| \leqslant |k| B(\omega) \tag{18}$$

grâce à (14). Définissons

$$R_t(\omega) = \sum_{k=0}^{K} g_k r_{tk}(\omega)e^{-i\omega k} . \tag{19}$$

Il résulte de (17), (19) et (13) que

$$\sum_{k=0}^{K} g_k A_{t-k}^{(1)}(\omega)e^{-i\omega k} = A_t^{(1)}(\omega)G(\omega) + R_t(\omega) \tag{20}$$

puis, de (18) et (12), que

$$|R_t(\omega)| \leqslant \sum_{k=0}^{K} |g_k| \, |r_{tk}(\omega)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{K} |k| \, |g_k|\right)B(\omega) = MB(\omega) . \tag{21}$$

L'insertion de (20) dans (16) conduit à

$$2\pi f_t^{(2)}(\omega) = |G(\omega)A_t^{(1)}(\omega)|^2 + G(\omega)A_t^{(1)}(\omega)R_t^*(\omega) + G^*(\omega)A_t^{(1)*}(\omega)R_t(\omega) + |R_t(\omega)|^2 . \tag{22}$$

Nous obtenons donc

$$f_t^{(2)}(\omega) = |G(\omega)|^2 f_t^{(1)}(\omega) + Q_t(\omega), \tag{23}$$

où, en vertu de (21) et (22),

$$2\pi |Q_t(\omega)| \leqslant 2|G(\omega)| \, |A_t^{(1)}(\omega)| MB(\omega) + M^2B^2(\omega) . \tag{24}$$

Si le processus est stationnaire au sens large, $B(\omega)$ peut être choisie identiquement nulle et on retrouve dans (23) la propriété bien connue : $f^{(2)}(\omega) = |G(\omega)|^2 f^{(1)}(\omega)$. Si le processus est *non stationnaire* et si les conditions énoncées ci-dessus sont remplies, on peut remplacer (11) par l'approximation suivante

$$f_t^{(2)}(\omega) \approx |G(\omega)|^2 f_t^{(1)}(\omega), \tag{25}$$

qui, lorsque $t \in S$, sera d'autant plus valable que le processus est proche d'un processus stationnaire dans le sens que la fonction $B(\omega)$ rend le second terme de (23) négligeable par rapport au premier.

Le développement précédent peut être étendu au cas où les g_k dépendent du temps (on n'a donc plus un filtre linéaire). Soit

$$X_t^{(2)} = \sum_{k=0}^{K} g_{tk} X_{t-k}^{(1)} . \tag{26}$$

Si on introduit M_t et $G_t(\omega)$ comme dans (12) et (13) en remplaçant g_k par g_{tk}, il vient aisément, au lieu de (25),

$$f_t^{(2)}(\omega) = |\, G_t(\omega) \,|^2 f_t^{(1)}(\omega) + Q_t(\omega) , \tag{27}$$

où l'inégalité en (24) est remplacée par la suivante

$$2\pi \,|\, Q_t(\omega) \,| \leqslant 2 \,|\, G_t(\omega) \,|\; |\, A_t^{(1)}(\omega) \,|\, M_t B(\omega) + M_t^2 B^2(\omega) . \tag{28}$$

L'approximation (25) devient

$$f_t^{(2)}(\omega) \approx |\, G_t(\omega) \,|^2 f_t^{(1)}(\omega) \tag{29}$$

sous la condition supplémentaire que M_t ne devienne pas trop grand pour certains $t \in S$.

PROPRIÉTÉ K. — *Soient* $\{ X_t^{(1)} \}$ *et* $\{ X_t^{(2)} \}$ *deux processus purement indéterminables stationnaires au sens large. Considérons*

$$X_t = \begin{cases} X_t^{(1)} & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ X_t^{(2)} & \text{si} \quad t > 0 . \end{cases} \tag{30}$$

Excepté dans des cas triviaux, $\{ X_t \}$ n'est pas stationnaire. *On se demande si*

$$f_t(\omega) = \begin{cases} f^{(1)}(\omega) & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ f^{(2)}(\omega) & \text{si} \quad t > 0 . \end{cases} \tag{31}$$

Par définition de $f_t(\omega)$ c'est une évidence quand $t \leqslant 0$. Afin de pouvoir répondre à la question quand $t > 0$ il nous faut d'abord définir la relation entre $\{ X_t^{(1)} \}$ et $\{ X_t^{(2)} \}$. Supposons d'abord que ces deux processus aient des innovations proportionnelles, $\eta_t^{(2)} = k\eta_t^{(1)}$, où k est un nombre réel positif. On a alors $\xi_t = \xi_t^{(1)} = \xi_t^{(2)}$ pour tout t. Les coefficients ψ_{tj} de la décomposition de Wold-Cramér (1*b*) de $\{ X_t \}$ sont égaux à $\psi_j^{(1)}$ si $t \leqslant 0$ et à $\psi_j^{(2)}$ si $t > 0$ ($j = 0, 1, \ldots$), ce qui prouve la véracité de (31) dans le cas étudié. La propriété ne subsiste pas si k est un nombre complexe quelconque car alors $\xi_t^{(2)} = k\xi_t^{(1)}/|k| = k\xi_t/|k|$ quand $t \leqslant 0$ et la décomposition de Wold-Cramér de $\{X_t\}$ s'exprime, pour $t > 0$, par

$$X_t = \sum_{u=1}^{t} \psi_{t-u}^{(2)}\xi_u + \sum_{u=-\infty}^{0} \psi_{t-u}^{(2)} \frac{k}{|k|}\xi_u .$$

Supposons maintenant que les processus $\{X_t^{(1)}\}$ et $\{X_t^{(2)}\}$ sont non corrélés, cov $(X_t^{(1)}, X_s^{(2)}) = 0$ pour tout couple (t, s), et que $\{X_s^{(2)}\}$ peut s'écrire sous forme autorégressive, comme suit :

$$X_t^{(2)} - \phi_1 X_{t-1}^{(2)} - \phi_2 X_{t-2}^{(2)} - \dots - \phi_p X_{t-p}^{(2)} = \eta_t^{(2)}$$

où les $\eta_t^{(2)}$ constituent une suite de variables aléatoires non corrélées, de variances égales. Les $\eta_t^{(2)}$ sont clairement les innovations du processus $\{X_t^{(2)}\}$. Intéressons-nous maintenant à $\{X_t\}$ quand $t > 0$. La projection orthogonale de $X_t = X_t^{(2)}$ dans

$$\mathscr{L}^2(X, t-1) = \mathscr{L}^2(X^{(1)}, 0) \oplus \mathscr{S}^2\{X_s^{(2)} ; s = 1, \dots, t\}$$

se réduit à la projection orthogonale de $X_t^{(2)}$ dans $\mathscr{S}^2\{X_s^{(2)} ; s = 1, \dots, t\}$. Quand $t > p$, elle vaut $\phi_1 X_{t-1}^{(2)} + \dots + \phi_p X_{t-p}^{(2)}$ d'où il résulte que $\eta_t = \eta_t^{(2)}$ et que les coefficients h_{tu} de la décomposition de Wold-Cramér (1*a*) de $\{X_t\}$ sont égaux à $\psi_{t-u}^{(2)}$ dès que $t > p$ et $u > p$. Considérons maintenant la différence entre $f_t(\omega)$ et $f^{(2)}(\omega)$ quand $t > p$:

$$\begin{aligned}
2\pi\,|f_t(\omega) - f^{(2)}(\omega)| &= \left| \left| \sum_{u=1}^{t} h_{tu}e^{i\omega u} \right|^2 - \left| \sum_{u=-\infty}^{t} \psi_{t-u}^{(2)}e^{i\omega u} \right|^2 \right| \\
&= \left| \left| \sum_{u=1}^{p} h_{tu}e^{i\omega u} + \sum_{u=p+1}^{t} \psi_{t-u}^{(2)}e^{i\omega u} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. - \left| \sum_{u=-\infty}^{p} \psi_{t-u}^{(2)}e^{i\omega u} + \sum_{u=p+1}^{t} \psi_{t-u}^{(2)}e^{i\omega u} \right|^2 \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{u=1}^{p} h_{tu}e^{i\omega u} \right|^2 + \left| \sum_{u=-\infty}^{p} \psi_{t-u}^{(2)}e^{i\omega u} \right|^2 \\
&\quad + 2 \left| \sum_{u=1}^{p} h_{tu}e^{i\omega u} \right| \left| \sum_{u=p+1}^{t} \psi_{t-u}^{(2)}e^{i\omega u} \right| \\
&\quad + 2 \left| \sum_{u=-\infty}^{p} \psi_{t-u}^{(2)}e^{i\omega u} \right| \left| \sum_{u=p+1}^{t} \psi_{t-u}^{(2)}e^{i\omega u} \right| .
\end{aligned}$$

Le processus purement indéterminable $\{X_t^{(2)}\}$ est autorégressif d'où on tire que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^{(2)} z^j$ (z complexe) converge absolument et uniformément quand $|z| \leqslant 1$ et donc que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j^{(2)}| < \infty$. Il en découle que la quantité

$$\left| \sum_{u=p+1}^{t} \psi_{t-u}^{(2)} \mathrm{e}^{i\omega u} \right| = \left| \sum_{j=0}^{t-p-1} \psi_j^{(2)} \mathrm{e}^{-i\omega j} \right| \leqslant \sum_{j=0}^{t-p-1} |\psi_j^{(2)}| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j^{(2)}|$$

est uniformément bornée en t et aussi que

$$\left| \sum_{u=-\infty}^{p} \psi_{t-u}^{(2)} e^{i\omega u} \right| = \left| \sum_{j=t-p}^{\infty} \psi_j^{(2)} e^{-i\omega j} \right|$$

tend vers 0 quand $t \to \infty$. D'autre part, montrons que la quantité

$$\left| \sum_{u=1}^{p} h_{tu} e^{i\omega u} \right| \leqslant \left(p \sum_{u=1}^{p} |h_{tu}|^2 \right)^{1/2}$$

tend vers 0 quand $t \to \infty$. En effet, la variance de X_t peut se décomposer en deux termes

$$\operatorname{var}(X_t) = \sum_{u=1}^{p} |h_{tu}|^2 + \sum_{j=0}^{t-p-1} |\psi_j^{(2)}|^2$$

et le second tend, quand $t \to \infty$, vers $\operatorname{var}(X_t^{(2)}) = \operatorname{var}(X_t)$. Il résulte de ce qui précède que $f_t(\omega) \to f^{(2)}(\omega)$ quand $t \to \infty$.

3. DISCUSSION ET CONCLUSION

Certaines des propriétés souhaitables pour un spectre évolutif, énoncées par Loynes, ne sont pas vérifiées outre que le spectre évolutif n'est pas déterminé directement par la fonction de covariance.

Il n'y a pas de *bijection* entre la classe des spectres évolutifs et celle des fonctions de covariance (Loynes : A4). Le contre-exemple suivant le montre. Soit $\{ \varepsilon_t \}$ un processus constitué de variables aléatoires non corrélées, de variance 1. Définissons le processus $\{ X_t^{(2)} \}$ comme suit :

$$X_t^{(2)} = \begin{cases} \varepsilon_t - 0{,}5\varepsilon_{t-1} & t \neq 1 \\ 0{,}5\varepsilon_1 - \varepsilon_0 & t = 1 . \end{cases}$$

D'autre part, considérons le processus stationnaire $\{ X_t^{(1)} \}$ défini par $X_t^{(1)} = \varepsilon_t - 0{,}5\varepsilon_{t-1}$. On peut vérifier que $f_t^{(2)}(\omega) = f_t^{(1)}(\omega)$ pour tout t et tout ω.

D'autres propriétés énoncées par Loynes ne sont aucunement satisfaites, à savoir :

$$\begin{array}{llll} \text{si} \quad X_t^{(2)} = X_{-t}^{(1)}, & \text{alors} & f_t^{(2)}(\omega) = f_{-t}^{(1)}(-\omega) & \text{(Loynes : B11}a\text{)} \\ \text{si} \quad X_t^{(2)} = X_{-t}^{(1)*}, & \text{alors} & f_t^{(2)}(\omega) = f_{-t}^{(1)}(\omega) & \text{(Loynes : B11).} \end{array}$$

En effet, l'inversion du sens du temps ne conserve pas le processus innovation. Ces propriétés ne sont d'ailleurs pas souhaitables car en contradiction avec la propriété H ou propriété de translation.

Il est évident que l'interprétation physique de la fréquence n'est pas conservée mais se retrouve à peu près dans un intervalle de temps S si une condition du type de (14) exprime que l'écart par rapport à la stationnarité n'est pas trop important.

L'intérêt du spectre évolutif dans le domaine des séries chronologiques est évident. En effet, le spectre évolutif décrit comment varie dans le temps le carré de l'amplitude des composantes du processus correspondant à chaque bande de fréquence. Plusieurs études économiques qui l'utilisent ont été publiées mais l'absence jusqu'ici d'un concept théorique satisfaisant a nui évidemment à une poursuite des recherches. Des travaux de l'auteur indiquent que de nombreuses séries chronologiques économiques qui possèdent une tendance en dispersion peuvent être représentées par des modèles ARIMAG qui sont des modèles ARIMA (Box et Jenkins [*1*]) mais portant sur un bruit blanc non stationnaire, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires non corrélées dont les variances dépendent du temps. Considérons le cas simple que voici

$$X_t = (1 - \Theta B)\eta_t , \tag{32}$$

où B est l'opérateur de retard, tel que $BX_t = X_{t-1}$. Si $\| \eta_t \| = g_t$, (32) s'écrit

$$X_t = (1 - \Theta B) g_t \xi_t . \tag{33}$$

On peut vérifier ([9], [6] pour une étude plus générale) que si $\lim_{j=\infty} \Theta^j g_{t-j}=0$ on est assuré que (33) est la décomposition de Wold-Cramér du processus. Il en résulte que le spectre évolutif est donné par

$$f_t(\omega) = \frac{1}{2\pi} | g_t - \Theta g_{t-1} e^{i\omega} |^2 . \tag{34}$$

Si on choisit Θ et la fonction g il devient possible d'engendrer des séries chronologiques artificielles à l'aide de (33), ce qui permet de compléter l'étude des propriétés statistiques des méthodes d'estimation du spectre évolutif.

Nous pouvons finalement conclure que le spectre évolutif présente un intérêt pratique et possède des propriétés attrayantes même si certaines des propriétés essentielles de la fonction de densité spectrale stationnaire sont valables par approximation ou bien sont perdues. Ce qui nous paraît important, c'est que l'étude ait été possible ce qui prouve que le concept est maniable. A. De Schutter-Herteleer [3] a d'ailleurs pu étendre ces résultats aux processus multivariés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. E. P. BOX et G. M. JENKINS, *Time Series Analysis, Forecasting and Control.* San Francisco, Holden Day, 1970.

[2] H. CRAMÉR, On some classes of nonstationary stochastic processes. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. **2**, p. 57-78, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1961.

[3] A. DE SCHUTTER-HERTELEER, Une généralisation de concepts spectraux non stationnaires. *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, t. **19**, 1977, p. 365-377.

[4] J. L. DOOB, *Stochastic processes.* New York, Wiley, 1953.

[5] C. W. J. GRANGER (avec la collaboration de M. HATANAKA), *Analyse spectrale des séries temporelles en économie*, Paris, Dunod, 1969 (traduction).

[6] M. HALLIN et G. MÉLARD, Indéterminabilité pure et inversibilité des processus autorégressifs, moyenne mobile à coefficients dépendant du temps. *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, t. **19**, 1977, p. 385-392.

[7] K. KARHUNEN, Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Scient. Fennicae*, Ser. A-I, t. **37**, 1947, p. 7-79.

[8] R. M. LOYNES, On the concept of the spectrum for non-stationary processes. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, t. **30**, 1968, p. 1-20 (avec discussion : p. 21-30).

[9] G. MÉLARD, Processus purement indéterminables à paramètre discret : approches fréquentielle et temporelle. Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1975 (non publié).

[10] G. MÉLARD, Theoretical problems with the evolutionary spectrum. Soumis pour publication.

[*11*] G. MÉLARD, On estimating the evolutive spectrum of a non-stationary process. Soumis pour publication.
[*12*] E. PARZEN, *Statistical inference on time series by Hilbert space methods, I.* Technical Report n° 23, Stanford, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University. Reprinted in E. PARZEN, *Time series analysis papers*, p. 251-382. San Francisco, Holden-Day, 1967.
[*13*] M. B. PRIESTLEY, Evolutionary spectra and non-stationary processes. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, t. **27**, 1965, p. 204-229 (avec discussion : p. 229-237).
[*14*] D. TJØSTHEIM, Spectral generating operators for non-stationary processes. *Adv. Appl. Prob.*, t. **8**, 1976, p. 831-846.

(Manuscrit reçu le 26 avril 1978)