

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. FORTET

Condition de Doeblin et quasi-compacité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, n° 4 (1978), p. 379-390

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_4_379_0

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Condition de Doeblin et quasi-compacité

par

R. FORTET (*)

Laboratoire de Probabilités, Tour 56,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et $\mathcal{M}$ l'espace de Banach des fonctions d'ensemble m σ -additives à variation totale bornée sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$; une probabilité de transition $P(x; dy)$ de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, détermine un opérateur P dans $\mathcal{M}$, par : $m \xrightarrow{P} n$ avec :

$$n(e) = \int_{\mathcal{X}} P(x; e) m(dx).$$

Il est connu que la « condition de Doeblin » est suffisante pour que P soit quasi-compact ; cependant à ma connaissance, les démonstrations publiées (cf. par exemple [1], p. 192 et suivantes) nécessitent quelque hypothèse restrictive sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. L'objet du présent article est de fournir une démonstration libre de toute restriction.

SUMMARY. — Let $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ be a measurable space, and $\mathcal{M}$ be the Banach space of the set functions over $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, which are σ -additive with bounded total variation. A transition probability $P(x; dy)$ from $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ into $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, determines an operator P in $\mathcal{M}$, by : $m \xrightarrow{P} n$, with :

$$n(e) = \int_{\mathcal{X}} P(x; e) m(dx).$$

(*) Laboratoire associé au C. N. R. S. (N° 224) « Processus stochastiques et applications ».

It is known that « Doeblin's Condition » is sufficient, for P being quasi-compact; published proofs however, assume some restrictive assumption about $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. The aim of the present paper, is to establish a proof, free of any assumption.

1° PRÉLIMINAIRES

Soient : $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espace mesurable ; $\mathcal{M}$ l'espace de Banach, avec sa norme habituelle, des fonctions (numériques complexes) m de $e \in \mathcal{B}$, σ -additives et à variation totale bornée sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. $m \in \mathcal{M}$ est une mesure, si $\forall e \in \mathcal{B}$, $m(e)$ est réel ≥ 0 ; $\mathcal{M}^+ \subset \mathcal{M}$ désignera l'ensemble des mesures. A $m \in \mathcal{M}$, s'associent sa variation absolue $|m| \in \mathcal{M}^+$, et sa norme ou variation totale $\|m\|$ ($= |m|(\mathcal{X})$) dans $\mathcal{M}$.

« Opérateur » signifiera : une application linéaire bornée d'un espace de Banach B_1 dans un espace de Banach B_2 ; si $B_2 = B_1$, nous dirons : opérateur dans B_1 .

Rappelons qu'un opérateur A dans B_1 est dit *quasi-compact* si $\exists$ un entier $r > 0$ et un opérateur compact U dans B_1 , tels que : $\|A^r - U\| < 1$. Le transformé d'un élément a par un opérateur A sera noté $A \circ a$.

Soient $m \in \mathcal{M}^+$, $n \in \mathcal{M}$, et :

$$\forall e \in \mathcal{B}, \quad n(e) = A(e) + \Delta(e) \quad (1,1)$$

la décomposition de Lebesgue de n par rapport à m , où : $A(\cdot)$ est la partie de n absolument continue par rapport à m , et $\Delta(\cdot)$ sa partie disjointe de m . On a :

$$\forall e \in \mathcal{B}, \quad |n|(e) = |A|(e) + |\Delta|(e).$$

Si $m_1, m_2 \in \mathcal{M}^+$, on a :

$$\forall e \in \mathcal{B}, \quad |m_1 + m_2|(e) = |m_1|(e) + |m_2|(e). \quad (1,2)$$

Pour $m_1, m_2 \in \mathcal{M}^+$, nous écrirons : $m_1 < m_2$, si : $\forall e \in \mathcal{B}$, $m_1(e) \leq m_2(e)$.

π -opérateurs. — Un opérateur Φ dans $\mathcal{M}$, est un π -opérateur, si : $\forall m \in \mathcal{M}^+$, $\Phi \circ m \in \mathcal{M}^+$. Si Φ est un π -opérateur, si $m_1, m_2 \in \mathcal{M}^+$ et si $m_1 < m_2$, $\Phi \circ m_1 < \Phi \circ m_2$.

μ -opérateurs. — Un opérateur Φ dans $\mathcal{M}$, est un μ -opérateur, si Φ est un π -opérateur, et si :

$$\forall m \in \mathcal{M}, \quad \forall e \in \mathcal{B}, \quad |(\Phi \circ m)(e)| \leq (\Phi \circ |m|)(e).$$

Si Φ est un μ -opérateur :

$$1^\circ \quad \forall e \in \mathcal{B}, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \quad |\Phi \circ m|(e) \leq (\Phi \circ |m|)(e);$$

$$2^\circ \quad |\Phi \circ m| < \Phi \circ |m|, \quad \|\Phi \circ m\| \leq \|\Phi \circ |m|\|.$$

Réciproquement, si Φ est un opérateur dans $\mathcal{M}$, si

$$\forall m \in \mathcal{M} \quad |\Phi \circ m| < \Phi \circ |m|,$$

Φ est un μ -opérateur.

Si Φ, Ψ sont des μ -opérateurs, $\Psi\Phi$ est un μ -opérateurs.

Exemple (1,1)

Soient : $m_0 \in \mathcal{M}^+$, $m \in \mathcal{M}$, et : $m(\cdot) = A(\cdot) + \Delta(\cdot)$ la décomposition de Lebesgue (1,1) de m par rapport à m_0 ; soient : D l'application qui, à m fait correspondre A ; S l'application qui à m fait correspondre Δ . D, S sont des μ -opérateurs.

Exemple (1,2)

Soit $H(\cdot, \cdot)$ une fonction de $(x, e) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$, bornée et telle que :

1° $\forall x \in \mathcal{X}$, $H(x, \cdot)$ est une mesure.

2° $\forall e \in \mathcal{B}$, $H(\cdot, e)$ est une fonction $\mathcal{B}$ -mesurable.

A $m \in \mathcal{M}$, faisons correspondre $n \in \mathcal{M}$ par :

$$n(\cdot) = \int_{\mathcal{X}} H(x, \cdot) m(dx); \quad (1,3)$$

nous définissons ainsi un opérateur H dans $\mathcal{M}$; de :

$$\forall e \in \mathcal{B}, \quad |n(e)| \leq \int_{\mathcal{X}} H(x, e) |m|(dx)$$

résulte :

$$|n|(e) \leq \int_{\mathcal{X}} H(x, e) |m|(dx),$$

donc : sous les conditions 1°, 2°, H est un μ -opérateur. ■

Soient Φ, Ψ des opérateurs dans $\mathcal{M}$:

— si Φ, Ψ sont des π -opérateurs, $\Phi + \Psi$ est un π -opérateur;

— si Φ, Ψ sont des μ -opérateurs, $\Phi + \Psi$ est un μ -opérateur.

L'espace $\mathcal{M}_0$:

Soit $m_0 \in \mathcal{M}^+$ déterminée quelconque; nous désignerons par $\mathcal{M}_0$ l'en-

semble des $m \in \mathcal{M}$, qui sont absolument continues par rapport à m_0 ; soient $m \in \mathcal{M}_0$, et $\sigma(\cdot)$ la densité de m par rapport à m_0 ; on a :

$$\sigma(\cdot) \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0);$$

la formule :

$$\forall e \in \mathcal{B}, \quad m(e) = \int_e \sigma(x) m_0(dx)$$

est une application bijective et isométrique de $L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0)$ sur $\mathcal{M}_0$, qui est un sous-espace de Banach de $\mathcal{M}$.

Les notions de π -opérateur, de μ -opérateur s'adaptent au cas de $\mathcal{M}_0$ au lieu de $\mathcal{M}$. ■

En règle générale, pour un ensemble e , $\tilde{e}$ désignera son complémentaire.

2° LA CONDITION DE DOEBLIN

Soit $P(x; dy)$ une probabilité de transition dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$:

$\forall x \in \mathcal{X}$, $P(x; \cdot)$ est une mesure sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ avec : $P(x; \mathcal{X}) = 1$;

$\forall e \in \mathcal{B}$, $P(\cdot; e)$ est $\mathcal{B}$ -mesurable.

Définissons les itérées $P(h|x; dy)$ ($h = 1, 2, \dots$) par la récurrence :

$$\begin{aligned} P(1|x; dy) &= P(x; dy); \quad P(h+1|x; dy) = \int_{\mathcal{X}} P(h|z; dy) P(x; dz) \\ &= \int_{\mathcal{X}} P(z; dy) P(h|x; dz); \end{aligned}$$

par la formule :

$$\forall e \in \mathcal{B}, \quad n(e) = \int_{\mathcal{X}} P(x; e) m(dx),$$

$P(x; dy) = P(1|x; dy)$ définit un opérateur P dans $\mathcal{M}$; plus généralement, la formule :

$$\forall e \in \mathcal{B}, \quad n(e) = \int_{\mathcal{X}} P(h|x; e) m(dx),$$

définit un opérateur dans $\mathcal{M}$, qui n'est autre que P^h . On a :

$$\|P\| = \|P^h\| = 1. \quad \blacksquare$$

r étant un entier > 0 , P satisfait à la condition (D_r) de Doeblin, si $\exists \eta > 0$ et une mesure de probabilité $m_0(dx)$ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, tels que : $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall \omega \in \mathcal{B}$ tel que $m_0(\omega) \leq \eta$, $P(r|x; \omega) \leq 1 - \eta$.

P satisfait à la condition (D) de Doeblin, si $\exists$ un entier $r > 0$ et fini, tel que P satisfait à (D_r) . ■

Avec les notations ci-dessus, supposons dorénavant que P satisfait à la condition (D_1) .

Sur $(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B})$, considérons :

- la mesure produit $m_0 \times m_0$;
- la mesure n_0 définie par :

$$\forall e \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \quad n_0(e) = \int \int_e P(x; dy) m_0(dx);$$

introduisons la décomposition de Lebesgue de n_0 par rapport à $m_0 \times m_0$, soit :

$$n_0 = A_0 + \Delta_0,$$

où A_0 , de densité $\rho_0(x, y)$, est la partie absolument continue, tandis que Δ_0 est la partie disjointe.

Soit $N \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ tel que : $(m_0 \times m_0)(N) = 0$ et que : $\forall e \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, $\Delta_0(e) = \Delta_0(e \cap N)$; $\forall x \in \mathcal{X}$, soit :

$$N_x = \{ (x', y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid (x', y') \in N, x' = x \} \dots$$

On a :

LEMME (2,1). — $\exists U_1 \in \mathcal{B}$ tel que : $m_0(U_1) = 0$ et que : $\forall x \notin U_1$, $m_0(N_x) = 0$. ■

Définissons $\Omega \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$; et $\forall x \in \mathcal{X}$, $\Omega_x \in \mathcal{B}$, par :

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid \rho_0(x, y) > \frac{1}{\eta} \right\}$$

$$\Omega_x = \{ (x', y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid (x', y') \in \Omega, x' = x \}.$$

$\forall A \in \mathcal{B}$, on a :

$$m_0(A) = n_0(A \times \mathcal{X}) \geq \int_A \left[\int_{\Omega_x} \rho_0(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx) \geq \frac{1}{\eta} \int_A m_0(\Omega_x) m_0(dx);$$

donc :

LEMME (2,2). — $\exists U_2 \in \mathcal{B}$, tel que $m_0(U_2) = 0$ et que : $\forall x \notin U_2$, $m_0(\Omega_x) \leq \eta$. ■

Posons :

$$1^\circ \quad \rho_1(x, y) = \begin{cases} \rho_0(x, y) & \text{si } (x, y) \notin \Omega, \\ \frac{1}{\eta} & \text{si } (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (2,1)$$

$$2^\circ \quad \rho_2(x, y) = \rho_0(x, y) - \rho_1(x, y),$$

de sorte que :

$$\rho_2(x, y) \geq 0, \quad \rho_2(x, y) = 0 \quad \text{si } (x, y) \notin \Omega.$$

$$3^\circ \quad \mathbf{M} = \mathbf{N} \cup \Omega, \quad \mathbf{M}_x = \mathbf{N}_x \cup \Omega_x. \quad \blacksquare$$

Pour tout $e \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} n_0(e) &= \iint_e P(x; dy) m_0(dx) \\ &= \iint_e \rho_1(x, y) m_0(dx) m_0(dy) + \iint_e \rho_2(x, y) m_0(dx) m_0(dy) + \Delta_0(e). \end{aligned}$$

Prenons $e = \mathbf{A} \times \omega$, avec : $\mathbf{A}, \omega \in \mathcal{B}$; on a :

$$n_0(\mathbf{A} \times \omega) = n_0((\mathbf{A} \times \omega) \cap \mathbf{M}) + n_0((\mathbf{A} \times \omega) \cap \check{\mathbf{M}});$$

$$\Delta_0((\mathbf{A} \times \omega) \cap \check{\mathbf{M}}) = 0; \quad \rho_2(x, y) = 0 \quad \text{si } \{x, y\} \in \check{\mathbf{M}}; \quad \text{donc :}$$

$$n_0[(\mathbf{A} \times \omega) \cap \check{\mathbf{M}}] = \int_{\mathbf{A}} \left[\int_{\omega \cap \check{\mathbf{M}}_x} \rho_1(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx); \quad (2,1)$$

comme :

$$\int_{\omega \cap \mathbf{M}_x} \rho_2(x, y) m_0(dy) = \int_{\omega \cap \Omega_x} \rho_2(x, y) m_0(dy);$$

et que :

$$\Delta_0[(\mathbf{A} \times \omega) \cap \mathbf{M}] = \Delta_0[(\mathbf{A} \times \omega) \cap \mathbf{N}],$$

il vient :

$$\begin{aligned} n_0[(\mathbf{A} \times \omega) \cap \mathbf{M}] &= \int_{\mathbf{A}} \int_{\omega \cap \mathbf{M}_x} P(x; dy) m_0(dx) = \int_{\mathbf{A}} P(x; \omega \cap \mathbf{M}_x) m_0(dx) \\ &= \int_{\mathbf{A}} \left[\int_{\omega \cap \mathbf{M}_x} \rho_1(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx) \\ &\quad + \int_{\mathbf{A}} \left[\int_{\omega \cap \Omega_x} \rho_2(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx) + \Delta_0[(\mathbf{A} \times \omega) \cap \mathbf{N}]; \quad (2,2) \end{aligned}$$

mais si $x \notin \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$, on a :

$$m_0(\omega \cap \mathbf{M}_x) \leq m_0(\mathbf{N}_x) + m_0(\Omega_x) = m_0(\Omega_x) \leq \eta;$$

donc :

$$P(x; \omega \cap \mathbf{M}_x) < 1 - \eta \quad \text{si } x \notin \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2; \quad (2,3)$$

d'ailleurs $m_0(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2) = 0$; posons :

$$\Phi_0(\mathbf{A}; \omega) = \int_{\mathbf{A}} \left[\int_{\omega \cap \Omega_x} \rho_2(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx) + \Delta_0[(\mathbf{A} \times \omega) \cap \mathbf{N}];$$

de (2,2) et (2,3), on tire :

$$0 \leq \Phi_0(A, \omega) \leq (1 - \eta)m_0(A), \quad \forall A, \omega \in \mathcal{B}.$$

Donc, pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ fixé, il existe une fonction $\phi_0(x; \omega)$ qui, en x , est mesurable — $\mathcal{B}$, telle que :

$$0 \leq \phi_0(x, \omega) \leq 1 - \eta \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{X},$$

et que :

$$\Phi_0(A, \omega) = \int_A \phi_0(x; \omega) m_0(dx) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}. \quad (2,4)$$

D'autre part, l'addition de (2,1) et (2,2) donne :

$$\begin{aligned} n_0(A \times \omega) &= \int_A P(x; \omega) m_0(dx) \\ &= \int_A \left[\int_{\omega} \rho_1(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx) + \Phi_0(A, \omega), \end{aligned} \quad (2,5)$$

pour tous $A, \omega \in \mathcal{B}$.

De (2,4) et (2,5), il résulte donc que :

LEMME (2,3). — Pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ fixé, il existe $L(\omega) \in \mathcal{B}$ et une fonction $\phi_0(x; \omega)$ de $\{x, \omega\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{B}$; tels que :

$$1^\circ \quad m_0[L(\omega)] = 0;$$

$$2^\circ \quad \phi_0(\cdot; \omega) \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable, avec :}$$

$$\forall x \in \mathcal{B}, \quad 0 \leq \phi_0(x; \omega) \leq 1 - \eta.$$

$$3^\circ \quad \forall x \notin L(\omega), \quad P(x; \omega) = \int_{\omega} \rho_1(x, y) m_0(dy) + \phi_0(x; \omega).$$

3. Désignons par Θ l'opérateur dans $\mathcal{M}$ qui, à $m \in \mathcal{M}$, fait correspondre $l \in \mathcal{M}$ par :

$$\forall e \in \mathcal{B}, \quad l(e) = \int_{\mathcal{X}} \left[\int_e \rho_1(x, y) m_0(dy) \right] m(dx) = \int_e \left[\int_{\mathcal{X}} \rho_1(x, y) m(dx) \right] m_0(dy);$$

posons :

$$\Phi = P - \Theta.$$

Soient : $\mathcal{M}_0$ le sous-espace de Banach de $\mathcal{M}$, ensemble des $m \in \mathcal{M}$ absolument continues par rapport à m_0 (cf. § 1); Φ_0 la restriction de Φ à $\mathcal{M}_0$.

Soit $m \in \mathcal{M}_0$, de densité $\sigma(\cdot)$ par rapport à m_0 ; soit l la transformée de m par P ; $\forall \omega \in \mathcal{B}$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} l(\omega) &= \int_{\mathcal{X}} P(x; \omega) m(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X}} P(x; \omega) \sigma(x) m_0(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X} - L(\omega)} P(x; \omega) \sigma(x) m_0(dx) + \int_{L(\omega)} P(x; \omega) \sigma(x) m_0(dx); \quad (3,1) \end{aligned}$$

d'après le Lemme (2,3), $m_0[L(\omega)] = 0$; donc (3,1) se réduit à :

$$l(\omega) = \int_{\mathcal{X} - L(\omega)} P(x; \omega) \sigma(x) m_0(dx);$$

toujours d'après le Lemme (2,3), ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} l(\omega) &= \int_{\mathcal{X} - L(\omega)} \left[\int_{\omega} \rho_1(x, y) m_0(dy) \right] \sigma(x) m_0(dx) \\ &\quad + \int_{\mathcal{X} - L(\omega)} \phi_0(x; \omega) \sigma(x) m_0(dx); \end{aligned}$$

donc, toujours parce que $m_0[L(\omega)] = 0$, on a :

$$\begin{aligned} l(\omega) &= \int_{\mathcal{X}} \left[\int_{\omega} \rho_1(x, y) m_0(dy) \right] \sigma(x) m_0(dx) + \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x; \omega) \sigma(x) m_0(dx) \\ &= (\Theta \circ m)(\omega) + \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x; \omega) \sigma(x) m_0(dx); \end{aligned}$$

en introduisant les opérateurs D, S de la décomposition de Lebesgue par rapport à m_0 (cf. § 1), il vient :

LEMME (3,1). — La restriction Φ_0 de Φ à $\mathcal{M}_0$ s'écrit :

$$\forall \omega \in \mathcal{B}, \quad (\Phi_0 \circ m)(\omega) = \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x; \omega) (D \circ m)(dx). \quad \blacksquare$$

Toujours avec $m \in \mathcal{M}_0$ et les mêmes notations, posons :

$$r = \Phi_0 \circ m, \quad r(\omega) = (\Phi_0 \circ m)(\omega)$$

soit $\{\omega_j, j = 1, 2, \dots\}$ une partition finie de ω ; on a :

$$\begin{aligned} \forall j, \quad |r(\omega_j)| &\leq \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x; \omega_j) |\sigma(x)| m_0(dx), \\ \sum_j |r(\omega_j)| &\leq \int_{\mathcal{X}} \left[\sum_j \phi_0(x; \omega_j) \right] |\sigma(x)| m_0(dx); \end{aligned}$$

pour *tout* x , $P(x; \omega)$ et $\int_{\omega} \rho_1(x, y) m_0(dy)$ sont des mesures en ω ; pour tout $x \in \bigcup_j L(\omega_j)$, on a donc :

$$\sum_j \phi_0(x; \omega_j) = \phi_0\left(x; \bigcup_j \omega_j\right) = \phi_0(x; \omega);$$

or :

$$m_0\left[\bigcup_j L(\omega_j)\right] = 0;$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \left[\sum_j \phi_0(x; \omega_j) \right] |\sigma(x)| m_0(dx) &= \int_{\mathcal{X} - \bigcup_j L(\omega_j)} \left[\sum_j \phi_0(x; \omega_j) \right] |\sigma(x)| m_0(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X} - \bigcup_j L(\omega_j)} \phi_0(x; \omega) |\sigma(x)| m_0(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x; \omega) |\sigma(x)| m_0(dx); \end{aligned}$$

donc :

$$|r|(\omega) \leq \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x; \omega) |\sigma(x)| m_0(dx),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} |r|(\omega) &\leq (1 - \eta) \|m\|, \quad \|r\| \leq (1 - \eta) \|m\|, \\ |\Phi_0(m)| &< \Phi_0(\|m\|). \end{aligned}$$

LEMME (3,2). — La restriction Φ_0 de Φ à $\mathcal{M}_0$, est un μ -opérateur, de norme $\leq (1 - \eta)$. ■

Posons :

$$\delta(\omega) = (\text{SP} \circ |m|)(\omega);$$

soit $l(\cdot) \in \mathcal{M}^+$ définie par :

$$\forall \omega \in \mathcal{B}, \quad l(\omega) = \int_{\mathcal{X}} P(x; \omega) |m|(dx);$$

$\delta(\omega)$ est la partie disjointe, par rapport à m_0 , de $l(\cdot)$; il existe donc $V \in \mathcal{B}$ tel que :

$$m_0(V) = 0, \quad \delta(\omega) = \delta(\omega \cap V);$$

or :

$$\delta(\omega \cap V) \leq l(\omega \cap V) = \int_{\mathcal{X}} P(x; \omega \cap V) |m|(dx);$$

$m_0(\omega \cap V) \leq m_0(V) = 0 < \eta$, donc : $P(x; \omega \cap V) \leq 1 - \eta$; il vient :

$$\delta(\omega) \leq (1 - \eta) |m|(\mathcal{X}) = (1 - \eta) \|m\| :$$

LEMME (3,3). — L'opérateur SP est de norme $\leq (1 - \eta)$. ■

On peut écrire :

$$P = DP + SP, \quad (3,4)$$

$$P^2 = PDP + PSP = \Theta DP + Q, \quad (3,5)$$

avec :

$$Q = \Phi DP + PSP.$$

P, D, S, Θ sont des μ -opérateurs; $\forall m \in \mathcal{M}$, $DP \circ m \in \mathcal{M}_0$; d'après (3,3) et (3,2) :

$$|\Phi DP \circ m| = |\Phi_0 DP \circ m| < \Phi_0 \circ |DP \circ m| < \Phi_0 DP \circ |m|;$$

en particulier :

$$\|\Phi_0 DP \circ m\| \leq \|\Phi_0 DP \circ |m|\| \leq (1 - \eta) \|DP \circ |m|\|;$$

d'après l'Exemple (1,1), (3,4) et (1,2) :

$$\|P \circ |m|\| = \|DP \circ |m|\| + \|SP \circ |m|\|;$$

et puisque $\|P\| = 1$:

$$\|\Phi DP \circ m\| \leq (1 - \eta) \|P \circ |m|\| - (1 - \eta) \|SP \circ |m|\|$$

$$\begin{aligned} \|Q \circ m\| &\leq \|\Phi DP \circ m\| + \|PSP \circ m\| \\ &\leq (1 - \eta) \|P \circ |m|\| - (1 - \eta) \|SP \circ |m|\| + \|SP \circ |m|\| \\ &\leq (1 - \eta) \|m\| + \eta \|SP \circ |m|\|. \end{aligned}$$

Du Lemme (3,3) résulte :

$$\|Q \circ m\| \leq (1 - \eta^2) \|m\|,$$

donc :

$$\|Q\| \leq (1 - \eta^2). \quad \blacksquare \quad (3,6)$$

D'après (3,5) :

$$\begin{aligned} P^3 &= P(\Theta DP + Q) = P\Theta DP + PQ \\ &= (\Theta + \Phi)\Theta DP + PQ \\ &= \Theta^2 DP + (\Phi\Theta DP + PQ); \end{aligned} \quad (3,7)$$

or :

$$\|\Phi\Theta DP \circ m\| \leq \|\Phi_0 \circ |\Theta DP \circ m|\| \leq (1 - \eta) \|\Theta DP \circ |m|\|;$$

et d'après (3,5) :

$$\|P^2 \circ |m|\| = \|\Theta DP \circ |m|\| + \|Q \circ |m|\|;$$

il vient donc :

$$\begin{aligned} \|\Phi\Theta DP \circ m\| &\leq (1-\eta)\|P^2 \circ |m|\| - (1-\eta)\|Q \circ |m|\|, \\ \|(\Phi\Theta DP + PQ) \circ m\| &\leq (1-\eta)\|P^2 \circ |m|\| - (1-\eta)\|Q \circ |m|\| + \|PQ \circ |m|\|; \end{aligned}$$

soit puisque $\|P^2\| = \|P\| = 1$:

$$\|(\Phi\Theta DP + PQ) \circ m\| \leq (1-\eta)\|m\| + \eta\|Q \circ |m|\|,$$

donc avec le Lemme (3,2) et (3,6) :

$$\|(\Phi\Theta DP + PQ) \circ m\| \leq (1-\eta^3)\|m\|,$$

d'où :

$$\|\Phi\Theta DP + PQ\| \leq (1-\eta^3). \quad \blacksquare \quad (3,8)$$

Considérons maintenant l'opérateur $\Theta^2 DP$; désignons par :

- $\mathcal{I}$ l'isométrie de $\mathcal{M}_0$ sur $L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0)$ qui, à $m \in \mathcal{M}_0$, fait correspondre dans $L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0)$, la densité de m par rapport à m_0 ;
- ρ_0 (*) l'opérateur dans $L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0)$ qui, à $f \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0)$, fait correspondre $g \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0)$ par la formule :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad g(x) = \int_{\mathcal{X}} \rho_1(x, y) f(y) m_0(dy).$$

Notons que :

- 1° Si $m \in \mathcal{M}_0$, $\Theta \circ m = (\mathcal{I}^{-1} \rho_0 \mathcal{I}) \circ m$;
- 2° $\forall m \in \mathcal{M}$, $DP \circ m \in \mathcal{M}_0$;
- 3° $\forall m \in \mathcal{M}$, $\Theta \circ m \in \mathcal{M}_0$.

On peut écrire :

$$\Theta^2 DP = \mathcal{I}^{-1} \rho_0 \mathcal{I} \mathcal{I}^{-1} \rho_0 \mathcal{I} DP = \mathcal{I}^{-1} \rho_0^2 \mathcal{I} DP.$$

Compte tenu de la définition (2,1) de $\rho_1(x, y)$, un théorème classique permet d'affirmer que, dans $L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0)$, ρ_0^2 est un opérateur compact; $\mathcal{I}^{-1}$, étant une isométrie, transforme tout ensemble relativement compact de $L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_0)$, en un sous-ensemble relativement compact de $\mathcal{M}_0$, donc en un sous-ensemble relativement compact de $\mathcal{M}$; ainsi, $\Theta^2 DP$ est un opérateur compact dans $\mathcal{M}$; de (3,7) et (3,8) résulte :

LEMME (3,4). — Si P satisfait à la condition (D_1) , P est quasi compact. $\blacksquare$

Maintenant, dire que P satisfait à la condition (D_r) , équivaut à dire que P' satisfait à la condition (D_1) ; donc :

(*) Nous adoptons cette solution pour différencier le « rhô » majuscule de la lettre P majuscule.

THÉORÈME (3,1). — Si P satisfait à la condition (D), P est quasi compact ; plus précisément, si P satisfait à la condition (D_r) avec (m_0, η) comme ci-dessus, P^{3r} se met sous la forme : $P^{3r} = U + V$, où U est un opérateur compact, et où $\|V\| \leq 1 - \eta^3$. ■

L'intérêt de la quasi-compacité de P , déjà marquée dans des travaux relativement anciens de Krylov, Bogoliubov, Fortet, Yosida, est rappelée dans l'article récent [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. L. DOOB, *Stochastic processes*. John Wiley edit., N. Y., 1962.
- [2] A. BRUNEL et D. REVUZ, Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, section B, t. 10, 1974, p. 301.

(Manuscrit reçu le 19 mai 1978)