

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J.-C. LOOTGIETER

Sur la répartition des suites de Kakutani (II)

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, n° 3 (1978), p. 279-302

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_3_279_0

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur la répartition des suites de Kakutani (II)

par

J.-C. LOOTGIETER (*)

20, rue du Commandant René Mouchotte, G. 201,
75014 Paris, France

SOMMAIRE. — Cet article est la suite d'un article antérieur [9] : nous démontrons essentiellement que toute suite de Kakutani associée à une loi de base possédant une composante absolument continue non nulle est équi-répartie.

SUMMARY. — This paper is the continuation of a precedent paper [9] : it is proved that every Kakutani's sequence based on a law possessing a non-zero absolute component is uniformly distributed.

INTRODUCTION

Rappelons (cf. [9]) qu'étant donnée une loi de probabilité μ sur l'intervalle $[0, 1]$ la suite de Kakutani associée est définie par : X_1 est choisi suivant la loi μ , X_2 est choisi dans l'intervalle de longueur maximale (situé le plus à gauche) déterminé par la subdivision $0, X_1, 1$ de l'intervalle $[0, 1]$ suivant une loi homothétique de μ , ..., X_{n+1} est choisi dans l'intervalle de longueur maximale (situé le plus à gauche) déterminé par la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ qu'induisent les points $0, X_1, X_2, \dots, X_n, 1$ suivant une loi homothétique de μ , etc.

(*) *Université Paris VI. Laboratoire de Calcul des Probabilités, Tour 56. 4, Place Jussieu. 75230 Paris Cedex 05.*

Dans [9] et [11] a été indépendamment prouvé que si la loi de base μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ la suite de Kakutani $\{X_n, n \geq 1\}$ est p. s. équi-répartie.

Dans la partie I de [9] une étude générale des suites de Kakutani a été amorcée : il y est démontré que l'espérance mathématique $\theta(x)$ et la variance $v(x)$ du rang aléatoire $\mathcal{C}(x)$ minimum de points de la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ qui assure que la longueur maximale des intervalles déterminés par la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ qu'induisent les points $0, X_1, X_2, \dots, X_{\mathcal{C}(x)}, 1$ est strictement inférieure à $1/x$ (pour $0 \leq x < 1$ $\mathcal{C}(x) = 0$) sont solutions d'équations intégrales qui relèvent de la théorie classique du renouvellement telle qu'elle est exposée dans [3] ou [10].

Une étape commune à [9] et [11] pour établir l'équi-répartition p. s. de la suite de Kakutani $\{X_n, n \geq 1\}$, quand sa loi de base est la loi uniforme sur $[0, 1]$, est que

$$(1.0) \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathcal{C}(x)}{x} = 2 \quad \text{p. s. .}$$

Revenant au cas d'une loi de base μ quelconque ($\mu(0) + \mu(1) < 1$) une lecture attentive de [9] montre que s'il existait une constante $C > 0$ finie (dépendant de μ) telle que

$$(2.0) \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathcal{C}(x)}{x} = C \quad \text{p. s. ,}$$

la suite de Kakutani associée $\{X_n, n \geq 1\}$ serait équi-répartie p. s. .

Nous conjecturons en fait, qu'en dehors de cas exceptionnels (cf. assertion ii) de la proposition 1.I dans cet article), que la limite p. s. (2.0) a toujours lieu ; nous n'avons pu démontrer en général la limite p. s. (2.0) que dans le cas où la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle (le cas où μ est de la forme δ_α a été étudié dans [9]).

I. PRÉLIMINAIRES

§ 1. Dans toute la suite le cas où la loi de base μ est concentrée en les extrémités 0 et 1 de l'intervalle $[0, 1]$ est écarté.

Comme dans [9] nous posons

$$\begin{aligned} \sigma &= (1 - \mu(0) - \mu(1))^{-1}, \\ \bar{\mu}(A) &= \frac{1}{2}(\mu(A) + \mu(1 - A)) \quad \text{pour tout borélien } A \text{ de }]0, 1[, \\ m &= \sigma \bar{\mu}. \end{aligned}$$

Soit $\mu = \mu_a + \mu_s + \mu_d$ (resp. $\bar{\mu} = \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d$) (resp. $m = m_a + m_s + m_d$) la décomposition de μ (resp. $\bar{\mu}$) (resp. m) en ses composantes absolument continue, purement singulière et discrète. Il est clair que, pour $i = a, s$ ou d ,

$$m_i = \sigma \bar{\mu}_i.$$

Quand $\|\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s\| > 0$, soit

$$m_{as} = \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s / \|\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s\|$$

la normalisée de $\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s$. La mesure discrète m_d peut visiblement être explicitée sous la forme

$$(1.1) \quad m_d = \frac{1}{2} \sum_{k \in S} p_k (\delta_{\alpha_k} + \delta_{1-\alpha_k}),$$

avec $p_k > 0$, $\sum_{k \in S} p_k \leq 1$, $0 < \alpha_k \leq \frac{1}{2}$, les α_k étant distincts, S étant dénombrable fini ou non.

Comme les probabilités m et m_{as} sont symétriques par rapport au point $\frac{1}{2}$, il va de soi que

$$(2.1) \quad \int_0^1 x m(dx) = \int_0^1 x m_{as}(dx) = \frac{1}{2}.$$

Soient G et G_{as} les fonctions de répartition respectives de m et m_{as} ; il est clair que $G_{as}(x)$ est continue selon x et que

$$(3.1) \quad G_{as}(1-x) = 1 - G_{as}(x).$$

Dans toute la suite $G(x)$ sera prise *continue à gauche*, si bien que la fonction de répartition de la probabilité $\tilde{\eta}$, définie par

$$(4.1) \quad \tilde{\eta} = \text{image de } m \text{ par l'application } y \rightarrow -\text{Log } y,$$

prise *continue à droite* a pour expression

$$(5.1) \quad \int_0^x \tilde{\eta}(dt) = 1 - G(e^{-x}).$$

Enfin posons pour tout $\beta \geq 0$

$$(6.1) \quad \rho_\beta(dx) = 2(\exp - \beta x) \tilde{\eta}(dx).$$

De (2.1) et (4.1) résulte visiblement que $\|\rho_\beta\| < 1$, $= 1$ ou > 1 suivant que $\beta > 1$, $= 1$ ou < 1 .

§ 2. Compte tenu des notations introduites dans le § 1, la proposition 2. I de [9] assure que l'espérance mathématique $\theta(x)$ et la variance $v(x)$ du temps d'arrêt $\mathcal{E}(x)$ vérifient les équations intégrales

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \theta(x) &= 2 \int_0^1 \theta(xy) m(dy) + \sigma & \text{si } x \geq 1, = 0 & \text{si } x < 1, \\ v(x) &= 2 \int_0^1 v(xy) m(dy) + (\sigma - 1) + J_1(x) & \text{si } x \geq 1, = 0 & \text{si } x < 1, \end{aligned}$$

où

$$J_1(x) = \int_0^1 (\theta(x) - 1 - \theta(xy) - \theta(x(1-y)))^2 m(dy).$$

De la définition de la fonction aléatoire $\mathcal{E}$ (cf. [9]) résulte immédiatement que $\theta(x)$ et $v(x)$ sont, selon x , bornées sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et continues à droite.

Posons

$$(8.1) \quad T_0(x) = \theta(e^x) \quad \text{et} \quad W_0(x) = v(e^x).$$

Compte tenu de (6.1) les équations intégrales (7.1) conduisent aux équations de convolution

$$(9.1) \quad \begin{aligned} T_0(x) &= T_0 * \rho_0(x) + \sigma & \text{si } x \geq 0, = 0 & \text{si } x < 0, \\ W_0(x) &= W_0 * \rho_0(x) + (\sigma - 1) + J_1(e^x) & \text{si } x \geq 0, = 0 & \text{si } x < 0. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant un résultat élémentaire. Considérons d'une manière générale l'équation de convolution

$$(10.1) \quad Z(x) = Z * \omega(x) + z(x),$$

où ω est une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $z(x)$ une fonction mesurable complexe bornée sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$, nous avons le lemme classique suivant (cf. [3]) :

LEMME 1. I. — *L'équation de convolution (10.1) admet une solution unique $Z(x)$ qui soit bornée sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$; elle est donnée par le produit de convolution*

$$Z(x) = U_\omega * z(x),$$

$$\text{où } U_\omega = \sum_{n \geq 0} \omega^{*n}.$$

Soit $Y_1(x)$ la fonction d'Heaviside égale à 1 pour $x \geq 1$ et à 0 pour $x < 1$.

Pour $\beta \geq 0$ et $0 \leq y \leq 1$ posons

$$(11.1) \quad F_y(x, \beta) = e^{-\frac{1}{2}\beta x} (\theta(e^x)y - \theta(e^x y)),$$

$$(12.1) \quad E_y(x) = \theta(e^x) - \theta(e^x y) - \theta(e^x(1-y)) - Y_1(e^x).$$

Si ξ est une mesure bornée complexe sur $[0, 1]$ nous posons

$$(13.1) \quad E_\xi(x) = \int_0^1 E_y(x) \xi(dy),$$

ce qui a un sens, car il est clair que, pour x fixé, $E_y(x)$ est bornée selon y .

Il est clair que la fonction $F_y(x, \beta)$ est, uniformément par rapport à $\beta \geq 0$ et $0 \leq y \leq 1$, bornée selon x sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$; de même $E_\xi(x)$ est, pour ξ fixée, bornée selon x sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$.

Posons

$$(15.1) \quad \begin{aligned} f_y(x, \beta) &= e^{-\frac{1}{2}\beta x} \sigma(Y_1(e^x)y - Y_1(e^x y)), \\ e_y(x) &= (\sigma - 1)Y_1(e^x) + 2(1 - G(e^{-x})) - \sigma(Y_1(e^x y) + Y_1(e^x(1-y))), \\ e_\xi(x) &= \int_0^1 e_y(x) \xi(dy). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$(16.1) \quad e_\xi(x) = ((\sigma - 1)Y_1(e^x) + 2(1 - G(e^{-x}))) \int_0^1 \xi(dt) - \sigma \left(\int_{e^{-x}}^1 \xi(dy) + \int_0^{1-e^{-x}} \xi(dy) \right).$$

Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME 2.I. — $F_y(x, \beta)$ et $E_\xi(x)$ sont respectivement les solutions uniques qui soient bornées sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et nulles pour $x < 0$ des équations de convolution

$$(1) \quad Z(x) = Z * \rho_{\beta/2}(x) + f_y(x, \beta),$$

$$(2) \quad Z(x) = Z * \rho_0(x) + e_\xi(x).$$

Démonstration. — De (8.1) et de la première équation de convolution de (9.1) résulte que pour $y \geq 0$

$$\theta(e^x)y = \int_0^x \theta(e^{x-t})y\rho_0(dt) + \sigma Y_1(e^x)y,$$

$$\theta(e^x y) = \int_0^x \theta(e^{x-t}y)\rho_0(dt) + \sigma Y_1(e^x y),$$

d'où visiblement

$$F_y(x, 0) = \int_0^x F_y(x-t, 0) \rho_0(dt) + f_y(x, 0),$$

et de (6.1) déroule que

$$F_y(x, \beta) = \int_0^x F_y(x-t, \beta) \rho_{\beta/2}(dt) + f_y(x, \beta).$$

Si de plus on impose $y \leq 1$ il est clair que $f_y(x, \beta) = 0$ pour $x < 0$ et de surcroît $f_y(x, \beta)$ est visiblement bornée selon x sur $\mathbb{R}_+$.

Par suite du lemme 1.I résulte que $F_y(x, \beta)$ satisfait les conditions du lemme 2.I.

De même il est facile de voir que

$$E_y(x) = E_y * \rho_0(x) + e_y(x),$$

puis intégrant les deux membres de l'égalité précédente selon y par rapport à la mesure bornée ξ on vérifie sans difficultés que $E_\xi(x)$ vérifie les conditions du lemme 2.I.

§ 3. Que dire des lois de base μ pour lesquelles $\bar{\mu}$ est portée par une progression géométrique de points de $]0, 1[$ (ce qui est équivalent à dire que l'image η de $\bar{\mu}$ par l'application $y \rightarrow -\text{Log } y$ est arithmétique)? Nous conjecturons comme réponse que le support de $\bar{\mu}$ consiste en deux points de la forme c^p et c^q avec p et q entiers ≥ 1 , $0 < c < 1$ et $c^p + c^q = 1$; quelle que soit la réponse que l'on puisse donner, désignant en ce cas par γ le pas de la mesure η (γ est le plus grand réel > 0 tel que η soit portée par $\gamma \cdot \mathbb{N}$), l'assertion ii) de la proposition suivante reste vraie :

PROPOSITION 1.I. — Si l'on pose

$$H(\mu) = - \int_0^1 x \text{Log } x + (1-x) \text{Log } (1-x) \mu(dx)$$

on a :

i) Si $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{H(\mu)}.$$

ii) Si $\bar{\mu}$ est portée par une progression géométrique

$$\liminf_{x \uparrow +\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{\gamma e^{-\gamma}}{1 - e^{-\gamma}} \frac{1}{H(\mu)}, \quad \limsup_{x \uparrow +\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{\gamma}{1 - e^{-\gamma}} \frac{1}{H(\mu)}$$

et

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\theta(xy)}{\theta(x)} = y$$

pourvu que $\bar{\mu}(y) > 0$ ou que $y = 0$ ou 1.

Démonstration. — Posons $T_1(x) = e^{-x}\theta(e^x)$; de la première équation de convolution de (9.1) résulte donc que :

$$(17.1) \quad T_1(x) = T_1 * \rho_1(x) + \sigma e^{-x}.$$

Assertion *i*). ρ_1 étant une probabilité non-arithmétique sur $\mathbb{R}_+^*$, une simple application d'un théorème limite de la théorie classique du renouvellement (cf. [3] ou proposition 3. I de [9]) à l'équation de convolution (17.1) conduit à

$$(18.1) \quad \lim_{x \uparrow +\infty} T_1(x) = \sigma \int_0^{+\infty} y \rho_1(dy).$$

Revenant à la loi de base μ on vérifie facilement que

$$\int_0^{+\infty} y \rho_1(dy) = \sigma H(\mu).$$

De (18.1) résulte alors visiblement l'assertion *i*).

Assertion *ii*). La probabilité ρ_1 est donc arithmétique et a pour pas γ ; en ce cas (cf. [3] ou proposition 3. I de [9]) on a

$$(19.1) \quad \lim_{n \uparrow +\infty} T_1(x + n\gamma) = \gamma \sigma \frac{\sum_{k/x + k\gamma \geq 0} \exp - (x + k\gamma)}{\int_0^{+\infty} y \rho_1(dy)}.$$

A partir de (19.1) il est facile d'obtenir les évaluations de $\liminf_{x \uparrow +\infty} \theta(x)/x$ et $\limsup_{x \uparrow +\infty} \theta(x)/x$ de la proposition 1. I.

En répétant les techniques utilisées dans la démonstration de la proposition 2. III de [9] (cf. cas où $\bar{\mu} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{1-\alpha})$ avec $\text{Log}(1-\alpha)/\text{Log } \alpha \in \mathbb{Q}$) on obtient sans difficultés que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\theta(xy)}{\theta(x)} = y \quad \text{si } \bar{\mu}(y) > 0.$$

Le cas où $y = 0$ ou 1 est trivial.

La proposition suivante donne les propriétés immédiates du comportement asymptotique de $v(x)$ quand $x \uparrow +\infty$.

PROPOSITION 2. I. — *On a :*

- i) $v(x) = o(x^2)$ quand $x \uparrow +\infty$.
- ii) *En dehors du cas où μ est de la forme $a\delta_\alpha + b\delta_{1-\alpha}$ pour lequel $v(x) \equiv 0$ selon x , on a $\liminf_{x \uparrow +\infty} v(x)/x > 0$.*

Démonstration. — Les résultats de la proposition 2.I n'interviendront pas dans la suite ; leur seul intérêt réside dans le fait qu'ils fournissent des *bornes asymptotiques* pour $v(x)$ quand $x \uparrow +\infty$ et qu'en particulier l'assertion i) assure que $\mathcal{C}(x)/x$ converge *en probabilité* vers $1/H(\mu)$ quand $x \uparrow +\infty$ dans le cas où $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique (cf. remarque 1.I qui suit). Nous nous contenterons de donner la démonstration de l'assertion i) et laissons au lecteur le soin de la démonstration de l'assertion ii).

Posons $W_2(x) = e^{-2x}v(e^x)$. De (6.1), (8.1) et de la seconde équation de convolution de (9.1) résulte que si l'on pose $w_2(x) = (\sigma - 1)e^{-2x} + e^{-2x}J_1(e^x)$ pour $x \geq 0$, $= 0$ pour $x < 0$, on a

$$W_2(x) = W_2 * \rho_2(x) + w_2(x).$$

En s'appuyant sur la proposition 1.I et le théorème de convergence dominée de Lebesgue on vérifie facilement que :

$$\lim_{x \uparrow +\infty} w_2(x) = 0.$$

D'autre part la mesure positive ρ_2 a une variation totale $\|\rho_2\| < 1$, si bien que la mesure

$$U_{\rho_2} = \sum_{n \geq 0} \rho_2^{*n}$$

est *bornée* ; du lemme 1.I résulte que $W_2 = U_{\rho_2} * w_2$ et par suite du théorème de convergence dominée de Lebesgue l'on déduit que $\lim_{x \uparrow +\infty} W_2(x) = 0$. D'où l'assertion i) en revenant à $v(x)$.

Remarque 1.I. — Se donnant $\varepsilon > 0$, l'assertion i) de la proposition 2.I et l'inégalité de Biénaïmé impliquent

$$P \left\{ \left| \frac{\mathcal{C}(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \right| > \varepsilon \right\} = o(1).$$

De l'assertion i) de la proposition 1.I résulte alors que si $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique on a :

$$(20.1) \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathcal{C}(x)}{x} = \frac{1}{H(\mu)} \quad \text{en probabilité.}$$

Comme le montre l'étude du cas où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ (cf. [9]) (20.1) est insuffisant pour déduire l'équi-répartition p. s. de la suite de Kakutani $\{X_n, n \geq 1\}$: dans la partie II qui suit nous allons obtenir, sous certaines hypothèses, une meilleure majoration asymptotique

de $v(x)$ que celle fournie par l'assertion *i*) de la proposition 2. I, puis déduire dans la partie III la convergence p. s. dans (20. 1) et par suite l'équi-répartition p. s. de la suite de Kakutani $\{X_n, n \geq 1\}$.

II. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA VARIANCE $v(x)$

Le but de cette partie est d'obtenir une meilleure borne asymptotique que celle donnée par l'assertion *i*) de la proposition 2. I. Le point de départ réside dans les équations de convolution (9. 1).

§ 1. Dans le cas où $\mu_a + \mu_s \neq 0$ nous considérons l'espace de Hilbert $L^2(m_{as})$ des fonctions complexes de carré m_{as} -intégrables; rappelons que m_{as} est la normalisée de $\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s$ et que nous avons noté par G_{as} sa fonction de répartition. En s'appuyant sur le fait que $G_{as}(x)$ est continue selon x le lecteur démontrera facilement le lemme suivant :

LEMME 1. II. — La suite $\{\exp 2i\pi n G_{as}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de $L^2(m_{as})$.

Considérons la transformée de Mellin de la probabilité m (rappelons que $m = \sigma\bar{\mu}$ et que m est portée par $]0, 1[$) définie par

$$(1.2) \quad \mathcal{M}(z) = \int_0^1 y^z m(dy) \quad \text{pour } z \text{ complexe, } \operatorname{Re}. z \geq 0,$$

soit en revenant à la loi de base μ , on a

$$2\mathcal{M}(z) = \sigma \int_{0+}^{1-} y^z + (1-y)^z \mu(dy).$$

Il est clair que $\mathcal{M}(z)$ est selon z continue dans le demi-plan $\operatorname{Re}. z \geq 0$ et analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re}. z > 0$; il va de soi que $\mathcal{M}(z)$ coïncide avec la transformée de Fourier holomorphe de l'image $\tilde{\eta}$ de la probabilité m par l'application $y \rightarrow -\operatorname{Log} y$:

$$(2.2) \quad \mathcal{M}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} \tilde{\eta}(dx).$$

L'équation

$$(3.2) \quad 1 - 2\mathcal{M}(z) = 0$$

admet visiblement $z = 1$ comme racine simple et il est clair que

$$(4.2) \quad 1 > 2|\mathcal{M}(z)| \quad \text{pour } \operatorname{Re}. z > 1.$$

Dans le cas où la loi de base μ est discrète, m coïncide avec m_a et suivant la notation (1.1) du § 1 de la partie I l'équation (3.2) prend la forme explicite

$$(5.2) \quad \sum_{k \in S} p_k (1 - \alpha_k^z - (1 - \alpha_k)^z) = 0.$$

Le premier membre de l'équation (5.2) est visiblement une fonction analytique presque-périodique au sens de Bohr [2] dans le demi-plan $\text{Re}.z > 0$ et s'annule pour $z = 1$; par suite, compte tenu de (4.2), l'équation (5.2) admet une infinité de solutions dans toute bande $\beta < \text{Re}.z \leq 1$ avec $0 \leq \beta < 1$ (cf. Bohr [2] ou Jessen et Tornehave [4]).

Supposons que la loi de base μ soit discrète et portée par $]0, 1[$; on peut toujours construire une suite de probabilités $\{\mu_n, n \geq 1\}$ sur $[0, 1]$ absolument continues convergeant étroitement vers μ . La suite des transformées de Mellin $\{\mathcal{M}_n(z), n \geq 1\}$ définies par

$$\mathcal{M}_n(z) = \int_0^1 y^z \bar{\mu}_n(dy)$$

converge alors uniformément sur toute partie bornée du demi-plan $\text{Re}.z \geq 0$ vers la transformée de Mellin

$$\mathcal{M}(z) = \int_0^1 y^z \bar{\mu}(dy).$$

Il est alors facile de voir que si l'on se donne un voisinage borné quelconque $V(z_0)$ d'une racine $z_0 \neq 1$ de l'équation

$$1 - 2\mathcal{M}(z) = 0,$$

pour n assez grand l'équation

$$1 - 2\mathcal{M}_n(z) = 0$$

admettra une racine dans $V(z_0)$: ceci est une conséquence immédiate du théorème de Rouché.

Des considérations précédentes résulte que si l'on se donne $\beta < 1$, arbitrairement proche de 1, on peut toujours trouver des lois de base μ absolument continues sur $[0, 1]$ telles que l'équation (3.2) admette au moins une racine dans la bande $\beta < \text{Re}.z < 1$.

Suite à la proposition 2.1 il est raisonnable de se demander s'il est possible que $v(x)$ soit $O(x^\beta)$ quand $x \uparrow +\infty$ pour un β , $1 \leq \beta < 2$; le théorème suivant donne une condition nécessaire que doit satisfaire la loi de base μ pour qu'il en soit ainsi sous l'hypothèse $\mu_a + \mu_s \neq 0$.

THÉORÈME 1. II. — Supposons que $\mu_a + \mu_s \neq 0$. Alors l'assertion i) implique l'assertion ii) :

- i) $v(x) = 0(x^\beta)$ quand $x \uparrow + \infty$ pour un β fixé, $1 \leq \beta < 2$.
- ii) L'équation $1 - 2\mathcal{M}(z) = 0$ admet $z = 1$ comme unique solution dans le demi-plan $\operatorname{Re}.z > \beta/2$.

Démonstration. — On a vu (cf. (9.1)) que $W_0(x) = v(e^x)$ satisfait l'équation de convolution.

$$W_0(x) = W_0 * \rho_0(x) + (\sigma - 1) + J_1(e^x) \quad \text{si } x \geq 0, = 0 \quad \text{si } x < 0.$$

Introduisant la notation (12.1) du § 2 de la partie I on a

$$J_1(e^x) = \int_0^1 (E_y(x))^2 m(dy).$$

Il est clair que :

$$J_1(e^x) \geq \| \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s \| \int_0^1 (E_y(x))^2 m_{as}(dy).$$

Si l'assertion i) est réalisée il va de soi que

$$(6.2) \quad \int_0^1 (E_y(x))^2 m_{as}(dy) = 0 \quad (\exp \beta x).$$

Pour x fixé $E_y(x)$ est borné selon y donc appartient à $L^2(m_{as})$; du lemme 1. II résulte qu'au sens de la norme sur $L^2(m_{as})$ on a

$$E_y(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(x) \exp 2i\pi n G_{as}(y),$$

les coefficients de Fourier $C_n(x)$ étant donnés par

$$(7.2) \quad C_n(x) = \int_0^1 E_y(x) (\exp - 2i\pi n G_{as}(y)) m_{as}(dy),$$

et l'égalité de Parseval donnant

$$\int_0^1 (E_y(x))^2 m_{as}(dy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n(x)|^2.$$

De (6.2) résulte alors que

$$(8.2) \quad C_n(x) = 0 \left(\exp \frac{1}{2} \beta x \right).$$

Introduisons les mesures bornées $\xi_n(dy) = (\exp - 2i\pi n G_{as}(y)) m_{as}(dy)$.

Compte tenu de la notation (13.1) on a

$$C_n(x) = E_{\xi_n}(x),$$

et les fonctions $e_{\xi_n}(x)$ définies par (16.1) prennent la forme particulière (rappelons que $G_{as}(1-y) = 1 - G_{as}(y)$) après calculs :

$$e_{\xi_n}(x) = \begin{cases} (\sigma-1)Y_1(e^x) + 2(1-G(e^{-x}) - 2\sigma(1-G_{as}(e^{-x}))) & \text{si } n=0, \\ \frac{\sigma}{\pi n} \sin 2\pi n G_{as}(e^{-x}) & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Appliquant le lemme 2.I, pour $n \neq 0$, les coefficients de Fourier $C_n(x)$ vérifient les équations de convolution

$$(9.2) \quad C_n(x) = C_n * \rho_0(x) + \frac{\sigma}{\pi n} \sin 2\pi n G_{as}(e^{-x}) \quad \text{si } x \geq 0, 0 \text{ si } x < 0.$$

La relation (8.2) permet de prendre la transformée holomorphe de Fourier des deux membres des équations (9.2) pour $\text{Re}.z > \beta/2$; après calculs on obtient

$$(10.2) \quad (1 - 2\mathcal{M}(z)) \int_0^{+\infty} e^{-zx} C_n(x) dx = \frac{\sigma}{\pi n} \int_0^1 x^{z-1} \sin 2\pi n G_{as}(x) dx.$$

Soit z_0 , $\text{Re}.z_0 > \beta/2$, tel que $1 - 2\mathcal{M}(z_0) = 0$; de (10.2) résulte que

$$(11.2) \quad \int_0^1 x^{z_0-1} \sin 2\pi n G_{as}(x) dx = 0 \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{Z}.$$

Le théorème de Stone-Weierstrass implique alors que pour toute fonction continue réelle sur $[0, 1]$ telle que $g(1-x) = -g(x)$ on a

$$\int_0^1 x^{z_0-1} g(G_{as}(x)) dx = 0.$$

Mais comme $G_{as}(1-x) = 1 - G_{as}(x)$, il vient que pour toute fonction continue réelle à support compact dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a

$$(12.2) \quad \int_0^{1/2} (x^{z_0-1} - (1-x)^{z_0-1}) g(G_{as}(x)) dx = 0.$$

De (12.2) l'on déduit sans peine que $x^{z_0-1} - (1-x)^{z_0-1} = 0$ m_{as} -p. s. selon x ; la fonction $f(x) = x^{z_0-1} - (1-x)^{z_0-1}$ s'annule donc sur une partie de $[0, 1]$ ayant une puissance supérieure à celle du dénombrable; comme $f(x)$ admet visiblement un prolongement analytique dans la bande

$0 < \operatorname{Re}.z < 1$, $f(x)$ est nécessairement constante selon x , ce qui ne peut avoir lieu que si $z_0 = 1$.

La démonstration du théorème 1.II est donc achevée.

Remarque 1.II. — Dans le cas où la loi de base μ est discrète, ce qui revient à dire que $m = m_{\delta}$ nous obtenons que l'assertion i) de la proposition 1.II implique la condition (C) suivante :

$$\begin{array}{|l} \text{Toute solution } z, \text{ comptée avec son ordre de multiplicité, de l'équa-} \\ \text{tion} \\ (C) \quad \sum_{k \in S} p_k (1 - \alpha_k^z - (1 - \alpha_k)^z) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}.z > \beta/2 \\ \text{est solution du système} \\ 1 - \alpha_k^z - (1 - \alpha_k)^z = 0 \quad \text{quel que soit } k \in S. \end{array}$$

La condition (C) est trivialement vérifiée quand l'ensemble d'indices S se réduit à un point : on se retrouve alors dans la situation où μ est de la forme $a\delta_{\alpha} + b\delta_{1-\alpha}$ et pour laquelle $v(x) \equiv 0$ selon x (cf. proposition 2.I) ; sinon nous n'avons pas pu trouver d'autres exemples réalisant la condition (C) pour un $\beta < 2$ alors qu'il est très facile d'en construire pour lesquels la condition (C) ne peut être réalisée pour aucun $\beta < 2$. Il semble que la condition (C) soit impossible en général et que par suite, en dehors du cas $\mu = a\delta_{\alpha} + b\delta_{1-\alpha}$ pour une loi de base discrète μ on ne puisse avoir $v(x) = 0(x^{\beta})$ pour un $\beta < 2$ (dépendant de μ). Nous n'avons pas pu éclaircir cette situation qui semble trancher avec celle où la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle (cf. corollaire 3.II).

Remarque 2.II. — Dans le théorème 1.II il semble difficile d'obtenir davantage que l'assertion ii) : ainsi, si l'on suppose que μ est absolument continué, du théorème de Riemann-Lebesgue et de l'assertion ii) l'on déduit sans peine que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\left\{ \liminf_{\substack{|z| \uparrow + \infty \\ \operatorname{Re}.z \geq (\varepsilon + \beta)/2}} |1 - 2\mathcal{M}(z)| > 0 \right.$$

et que par suite l'on déduira (cf. corollaire 2.II qui suit) $v(x) = 0(x^{\varepsilon + \beta})$.

§ 2. Nous allons maintenant donner une réciproque du théorème 1.II essentiellement pour les lois μ possédant une composante absolument continue μ_a non nulle.

Si Λ est une mesure bornée réelle sur $\mathbb{R}$, $\Lambda = \Lambda_a + \Lambda_s + \Lambda_d$ désigne la décomposition de Λ en ses composantes absolument continue, purement

singulière et discrète ; $\|\Lambda_s\|$ désigne la variation totale de Λ_s , $\phi(it)$ et $\phi_d(it)$ les transformées de Fourier ($t \in \mathbb{R}$) de Λ et Λ_d

$$\phi(it) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \Lambda(dx), \quad \phi_d(it) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \Lambda_d(dx).$$

Nous aurons besoin du théorème suivant de Wiener et Pitt [12] et de deux lemmes simples :

THÉORÈME 2. II. — Si l'on a

- i) $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\phi(it)| > 0$,
- ii) $\|\Lambda_s\| < \inf_{t \in \mathbb{R}} |\phi_d(it)|$

alors $\phi^{-1}(it)$ est la transformée de Fourier d'une mesure bornée Λ^{-1} .

LEMME 2. II. — Si $\phi(it)$ possède un prolongement continu dans le demi-plan complexe $\text{Re}.z \geq 0$ borné et analytique dans $\text{Re}.z > 0$, alors $|\Lambda|(\mathbb{R}^*) = 0$ ($|\Lambda|$ désigne la valeur absolue de Λ).

Pour la démonstration de ce lemme se reporter à [6].

LEMME 3. II. — Si $\phi(it)$ possède un prolongement $\phi(z)$ dans la bande $0 \leq \text{Re}.z \leq \varepsilon$ borné, continu, analytique dans la bande $0 < \text{Re}.z < \varepsilon$ et si $\phi(it + \varepsilon)$ est la transformée de Fourier d'une mesure bornée Λ_ε sur $\mathbb{R}$, alors $(\exp - \varepsilon x)\Lambda(dx) = \Lambda_\varepsilon(dx)$; en d'autres termes Λ intègre $\exp - \varepsilon x$ sur $\mathbb{R}_-$.

La démonstration du lemme 3. II est basée sur la formule d'inversion de Fourier : nous laissons au lecteur le soin de la démonstration.

Considérons l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ définie comme suit :

$$\mathcal{H}(\beta) \left\{ \begin{array}{ll} a) & 0 \leq \beta < 2. \\ b) & \text{La seule solution dans le demi-plan complexe } \text{Re}.z \geq \beta/2 \\ & \text{de l'équation} \\ & 1 - 2\mathcal{M}(z) = 0 \\ & \text{est } z = 1. \\ c) & \liminf_{\substack{|z| \uparrow + \infty \\ \text{Re}.z \geq \beta/2}} |1 - 2\mathcal{M}(z)| > 0. \\ d) & 2\sigma \int_0^1 x^{\beta/2} \bar{\mu}_s(dx) < \inf_{t \in \mathbb{R}} \left| 1 - 2\sigma \int_0^1 x^{it + \beta/2} \bar{\mu}_d(dx) \right|. \end{array} \right.$$

LEMME 4. II. — Si la loi de base μ admet une composante absolument continue μ_a non nulle il existe $\beta_0 < 2$ tel que pour tout β , $\beta_0 \leq \beta < 2$, l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ soit réalisée.

Démonstration. — Condition b). Comme $m = \sigma(\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)$, l'équation $1 - 2\mathcal{M}(z) = 0$ prend la forme explicite

$$(13.2) \quad 1 = 2\sigma \int_0^1 x^z \bar{\mu}_a(dx) + 2\sigma \int_0^1 x^z (\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)(dx).$$

Supposons que l'équation (13.2) admette dans toute bande $\beta/2 \leq \operatorname{Re} z < 1$, avec $0 \leq \beta < 2$, une solution ; la fonction $\mathcal{M}(z)$ étant analytique, il existerait une suite de complexes $\{z_n, n \geq 1\}$ solutions de l'équation (13.2) telle que $\lim_{n \uparrow +\infty} |z_n| = +\infty$ et $\lim_{n \uparrow +\infty} \operatorname{Re} z_n = 1$. Le théorème de Riemann-Lebesgue implique

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \int_0^1 x^{z_n} \bar{\mu}_a(dx) = 0,$$

et de (13.2) résulterait que

$$(14.2) \quad 1 = \lim_{n \uparrow +\infty} 2\sigma \int_0^1 x^{z_n} (\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)(dx).$$

Mais d'autre part, comme $\lim_{n \uparrow +\infty} \operatorname{Re} z_n = 1$, il est clair que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \uparrow +\infty} 2\sigma \left| \int_0^1 x^{z_n} (\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)(dx) \right| &\leq 2\sigma \int_0^1 x (\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)(dx) \\ &\leq 1 - 2\sigma \int_0^1 x \bar{\mu}_a(dx) \\ &< 1, \end{aligned}$$

si l'on suppose que $\bar{\mu}_a \neq 0$. D'où une contradiction avec (14.2).

Condition c). La négation pour tout $\beta < 2$ de la condition c) conduirait au même type de contradiction.

Condition d). Il est clair que

$$(15.2) \quad \lim_{\beta \uparrow 2} 2\sigma \left(\int_0^1 x^{\beta/2} \bar{\mu}_s(dx) + \int_0^1 x^{\beta/2} \bar{\mu}_d(dx) + \int_0^1 x \bar{\mu}_a(dx) \right) = 1.$$

Si l'on suppose que $\bar{\mu}_a \neq 0$ on peut trouver $\beta_0 < 2$ tel que

$$(16.2) \quad 2\sigma \int_0^1 x^{\beta/2} \bar{\mu}_s(dx) < 1 - 2\sigma \int_0^1 x^{\beta/2} \bar{\mu}_d(dx) \quad \text{pour } \beta_0 \leq \beta \leq 2.$$

Mais il est clair que quel que soit $t \in \mathbb{R}$

$$(17.2) \quad \begin{aligned} 1 - 2\sigma \int_0^1 x^{\beta/2} \bar{\mu}_d(dx) \\ \leq 1 - 2\sigma \left| \int_0^1 x^{it + \beta/2} \bar{\mu}_d(dx) \right| \leq \left| 1 - 2\sigma \int_0^1 x^{it + \beta/2} \bar{\mu}_d(dx) \right| \end{aligned}$$

De (16.2) et (17.2) résulte donc que la condition $d)$ est vérifiée dès que $\beta < 2$ est assez proche de 2.

La démonstration du lemme 4. II est donc achevée : n'a essentiellement joué que le fait $2\sigma \int_0^1 x\bar{\mu}(dx) = 1$. Remarquons d'autre part que la condition $b)$ ne peut être réalisée pour aucun $\beta < 2$ quand μ est discrète.

THÉOREME 3. II. — *Sous l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ on a :*

- i) $\sup_{\substack{x \geq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} x^{-\beta/2} |\theta(x)y - \theta(xy)| < +\infty$
- ii) Pour $\beta > 0$ $\lim_{x \uparrow +\infty} x^{-\beta/2} (\theta(x)y - \theta(xy)) = 0$ quel que soit y fixé, $0 \leq y \leq 1$.
- iii) Pour $\beta = 0$ $\lim_{x \uparrow +\infty} (\theta(x)y - \theta(xy)) = \sigma(1 - y)$ quel que soit y fixé, $0 < y \leq 1$.

Démonstration. — Cas où $\beta > 0$. Dans le § 2 de la partie I nous avons introduit la fonction $F_y(x, \beta)$, $0 \leq y \leq 1$, définie par

$$F_y(x, \beta) = e^{-\frac{1}{2}\beta x} (\theta(e^x)y - \theta(e^x y))$$

et qui, suite au lemme 2. I, est la solution unique qui soit bornée sur tout intervalle finie de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$ de l'équation de convolution

$$(18.2) \quad Z(x) = Z * \rho_{\beta/2}(x) + f_y(x, \beta),$$

avec $f_y(x, \beta) = e^{-\frac{1}{2}\beta x} \sigma(Y_1(e^x)y - Y_1(e^x y))$.

On pourrait, appliquant le lemme 1. I, obtenir une forme explicite de $F_y(x, \beta)$ en fonction de $f_y(x, \beta)$ et $U_{\rho_{\beta/2}}$; mais les théorèmes limites de la théorie classique du renouvellement se révéleraient inefficaces pour étudier la fonction $F_y(x, \beta)$: la raison essentielle étant que la mesure positive $\rho_{\beta/2}$ a une variation totale > 1 . Nous allons voir qu'en fait l'on peut exprimer, selon x , $F_y(x, \beta)$ comme le produit de convolution de $f_y(x, \beta)$ et d'une mesure bornée sur $\mathbb{R}$.

Prenons *formellement* la transformée de Fourier holomorphe sur $\mathbb{R}$ des deux membres de l'équation (18.2); de simples calculs formels conduisent à

$$(19.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx} Z(x) dx = \sigma \frac{y - y^{z+\beta/2}}{z + \beta/2} \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(z + \beta/2)}.$$

Il est clair que $f_y(x, \beta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ selon x (nulle pour $x < 0$) et a pour transformée de Fourier

$$(20.2) \quad \int_0^{+\infty} e^{-itx} f_y(x, \beta) dx = \frac{y - y^{it+\beta/2}}{it + \beta/2}.$$

D'autre part $1 - 2\mathcal{M}(it + \beta/2)$ est la transformée de Fourier de la mesure bornée $\delta_0 - \rho_{\beta/2}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-itx} (\delta_0 - \rho_{\beta/2})(dx) = 1 - 2\mathcal{M}(it + \beta/2);$$

et $\rho_{\beta/2}$ est l'image de la mesure $2\sigma x^{\beta/2} \bar{\mu}(dx)$ par l'application $y \rightarrow -\text{Log } y$.

Ceci dit, il est facile de voir que l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ assure que la mesure $\delta_0 - \rho_{\beta/2}$ satisfait les conditions du théorème 2.II de Wiener et Pitt; pour suite il existe une mesure Θ_β bornée sur $\mathbb{R}$ telle que

$$(21.2) \quad \int_0^{+\infty} e^{-itx} \Theta_\beta(dx) = \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(it + \beta/2)}.$$

De (19.2), (20.2) et (21.2) résulte donc que la fonction $\bar{F}_y(x, \beta)$ définie par

$$(22.2) \quad \bar{F}_y(x, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x - t) \Theta_\beta(dt)$$

est, selon x , une solution de l'équation de convolution (18.2) (l'ambiguïté d'une égalité p. p. par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est levée car en se reportant à (22.2) il est facile de voir que la continuité à droite de $f_y(x, \beta)$, selon x , implique celle de $\bar{F}_y(x, \beta)$). Compte tenu du fait que $z = 1 - \beta/2$ est un zéro simple de $1 - 2\mathcal{M}(z + \beta/2)$ et un zéro de $y - y^{z+\beta/2}$, l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ assure que

$$\psi(z) = \frac{y - y^{z+\beta/2}}{z + \beta/2} \cdot \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(z + \beta/2)}$$

constitue un prolongement analytique borné dans le demi-plan $\text{Re } z > 0$ de la transformée de Fourier

$$\psi(it) = \frac{y - y^{it+\beta/2}}{it + \beta/2} \cdot \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(it + \beta/2)}$$

de $F_y(x, \beta)$. Du lemme 2.II et de la continuité à droite de $\bar{F}_y(x, \beta)$ selon x résulte que $\bar{F}_y(x, \beta) = 0$ pour $x < 0$. Le lemme 1.I assure sans difficultés que $\bar{F}_y(x, \beta) \equiv F_y(x, \beta)$. Suite à (22.2), des propriétés évidentes de $f_y(x, \beta)$ résulte les assertions i) et ii).

Cas où $\beta = 0$. Il est immédiat de voir que si l'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vérifiée, l'hypothèse $\mathcal{H}(\varepsilon)$ l'est également pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit. De

l'étude précédente du cas $\beta > 0$ résulte donc qu'il existe une mesure bornée Θ_ε sur $\mathbb{R}$ telle que

$$(23.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \Theta_\varepsilon(dx) = \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(it + \varepsilon/2)}$$

$$F_y(x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x - t, \varepsilon) \Theta_\varepsilon(dt).$$

D'autre part l'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ assure là encore que la mesure $\delta_0 - \rho_0$ satisfait les conditions du théorème 2.II de Wiener et Pitt; il existe donc une mesure bornée Θ_0 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \Theta_0(dx) = \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(it)}.$$

L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ assure que la transformée de Fourier $1/1 - 2\mathcal{M}(it)$ satisfait les conditions du lemme 3.II dans la bande $0 \leq \operatorname{Re}.z \leq \varepsilon/2$, si bien que

$$(24.2) \quad \Theta_\varepsilon(dx) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x} \Theta_0(dx).$$

Enfin il est clair que

$$(25.2) \quad F_y(x, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x} F_y(x, 0),$$

$$f_y(x, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x} f_y(x, 0).$$

De (23.2), (24.2) et (25.2) résulte alors que

$$(26.2) \quad F_y(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x - t, 0) \Theta_0(dx).$$

Notons que la fonction $f_y(x, 0) = \sigma(Y_1(e^x)y - Y_1(e^x y))$, pour $y > 0$, n'est pas intégrable selon x , mais est néanmoins bornée. A partir de (26.2) l'on vérifie immédiatement que l'assertion *i*) est vérifiée; quant à l'assertion *iii*) elle découle sans difficultés de

$$\lim_{x \uparrow +\infty} f_y(x, 0) = \sigma(y - 1) \quad \text{pour } y > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_0(dx) = -1.$$

La démonstration du théorème 3.II est donc achevée.

Remarque 3.II. — Dans le cas où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ on voit facilement que $\mathcal{M}(z) = 1/(z + 1)$ et que l'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vérifiée; dans (9) nous avons vu que dans ce cas $\theta(x) = 2x - 1$ si $x \geq 1$, $= 0$ si $x < 1$. Il est immédiat de voir que, pour $0 \leq y \leq 1$, $\theta(x)y - \theta(xy) = 0$

si $x < 1$, $= 1 - y$ si $xy \geq 1$, $= 2xy - y$ si $1 \leq x < 1/y$. Pour ce cas particulier la mesure Θ_0 intervenant dans la démonstration du théorème 3. Il est de la forme $\delta_0 - 2e^x \cdot 1_{]-\infty, 0]}(x)(dx)$.

Le théorème 3. II a pour corollaire immédiat :

COROLLAIRE 1. II. — Sous l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ on a :

- i) $\sup_{\substack{x \geq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} x^{-\beta/2} |\theta(x) - \theta(xy) - \theta(x(1 - y))| < +\infty$.
- ii) Pour $\beta > 0$ $\lim_{x \uparrow +\infty} x^{-\beta/2} (\theta(x) - \theta(xy) - \theta(x(1 - y))) = 0$ quel que soit y fixé, $0 \leq y \leq 1$.
- iii) Pour $\beta = 0$ $\lim_{x \uparrow +\infty} (\theta(x) - \theta(xy) - \theta(x(1 - y))) = \sigma$ quel que soit y fixé, $0 < y < 1$.

Le corollaire suivant donne le comportement asymptotique de la variance $v(x)$ sous l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$:

COROLLAIRE 2. II. — Sous l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ on a :

- i) Pour $0 \leq \beta < 1$ $\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{v(x)}{x}$ existe dans $\mathbb{R}_+^*$.
- ii) Pour $\beta = 1$ $v(x) = O(x \log x)$ quand $x \uparrow +\infty$.
- iii) Pour $1 < \beta < 2$ $v(x) = o(x^\beta)$ quand $x \uparrow +\infty$.

Démonstration. — Pour $a \geq 0$ posons

$$\begin{aligned} W_a(x) &= e^{-ax} v(e^x) \\ w_a(x) &= (\sigma - 1)e^{-ax} + e^{-ax} J_1(e^x) \quad \text{si } x \leq 0, = 0 \text{ si } x < 0. \end{aligned}$$

De la seconde équation de convolution de (9.1) du § 2 de la partie I résulte que

$$(27.2) \quad W_a(x) = W_a * \rho_a(x) + w_a(x).$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$, de l'expression intégrale de $J_1(e^x)$, soit

$$J_1(e^x) = \int_0^1 (\theta(e^x) - 1 - \theta(e^xy) - \theta(e^x(1 - y)))^2 m(dy),$$

du corollaire 1. II et du théorème de convergence dominée de Lebesgue résulte visiblement que

$$(28.2) \quad w_\beta(x) \quad \text{est bornée selon } x,$$

$$(29.2) \quad \lim_{x \uparrow +\infty} w_\beta(x) = 0 \quad \text{quand } \beta > 0.$$

Comme $\theta(x)$ est continue à droite et croissante selon x il est également clair que

$$(30.2) \quad w_\beta(x) \text{ n'admet selon } x \text{ que des discontinuités de première espèce.}$$

Assertion *i*). Il est clair que $w_1(x) = e^{-(1-\beta)x}w_\beta(x)$; de (28.2) et (30.2) résulte que $w_\beta(x)$ est Riemann-intégrable sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$. Comme $\beta < 1$ et que l'on a (28.2) il est facile de déduire alors que $w_1(x)$ est *directement intégrable* sur $\mathbb{R}_+$ (cf. [3]). L'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ implique que la probabilité ρ_1 est non-discrète, donc non-arithmétique; dès lors appliquant un théorème limite de la théorie classique du renouvellement (cf. [3] où proposition 3.I de [9]) à l'équation de convolution (27.2) pour $a = 1$ on obtient que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} W_1(x) = \frac{\int_0^{+\infty} w_1(x) dx}{\int_0^{+\infty} x \rho_1(dx)}.$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} x \rho_1(dx) = -\sigma \int_0^1 x \operatorname{Log} x + (1-x) \operatorname{Log} (1-x) \mu(dx),$$

$$< +\infty,$$

revenant à $v(x)$, l'on déduit l'assertion *i*).

Assertion *ii*). Du lemme 1.I appliqué à l'équation de convolution (27.2) pour $a = 1$ résulte que

$$(31.2) \quad W_1(x) = U_{\rho_1} * w_1(x).$$

Mais l'on sait bien (cf. [3]), ρ_1 étant une probabilité, que

$$(32.2) \quad \int_0^x U_{\rho_1}(dy) = 0(x) \quad \text{quand } x \uparrow +\infty.$$

(28.2) étant alors réalisée pour $\beta = 1$, il est alors clair que

$$W_1(x) = 0(x) \quad \text{quand } x \uparrow +\infty.$$

De là, revenant à $v(x)$, résulte visiblement l'assertion *ii*).

Assertion *iii*). Le lemme 1.I appliquée à l'équation de convolution (27.2) pour $a = \beta$ résulte que

$$(33.2) \quad W_\beta(x) = U_{\rho_\beta} * w_\beta(x).$$

Mais, comme $\beta > 1$, la mesure positive ρ_β a une variation totale strictement inférieure à 1 (cf. § 1 de la partie I), si bien que U_{ρ_β} est une mesure *bornée* sur $\mathbb{R}_+$. De (28.2), (29.2), (33.3) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue résulte immédiatement que

$$W_\beta(x) = 0(x^\beta) \quad \text{quand } x \uparrow +\infty.$$

De là, revenant à $v(x)$, résulte visiblement l'assertion *iii*). La démonstration du corollaire 2.II est donc achevée.

Le lemme 4.II et le corollaire 2.II conduisent immédiatement au corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.II. — *Si la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle il existe un β , $\beta < 2$, tel que :*

$$v(x) = 0(x^\beta) \quad \text{quand } x \uparrow + \infty.$$

Notons que d'après la proposition 2.I on a nécessairement $\beta \geq 1$.

Remarque 4.II. — Soit $\{Y_n, n \geq 1\}$ une suite indépendante de variables aléatoires réelles de loi commune ω ; nous désignons par ω^n la loi du produit $Y_1 \cdot Y_2 \dots Y_n$. Donnons la définition :

DÉFINITION D.1. — *La loi de probabilité ω est dite géométriquement étalée s'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que ω^{n_0} admette une composante absolument continue non nulle.*

Il est clair que si ω^{n_0} admet une composante absolument continue non nulle il est de même pour ω^n avec $n \geq n_0$. On sait bien (cf. Wintner [13]) qu'il existe des probabilités ω de composante absolument continue ω_a nulle et de composante purement singulière ω_s non nulle satisfaisant D.1.

Si la loi de base μ est géométriquement étalée on voit sans peine qu'il en est de même pour la probabilité $m = \sigma\bar{\mu}$; en adaptant comme il convient les arguments développés au cours des démonstrations du théorème 3.II, des corollaires 1.II et 2.II et en utilisant l'identité

$$1 - 2^n \int_0^1 y^z m^n(dy) = \left(1 - 2 \int_0^1 y^z m(dy)\right) \sum_{q=1}^{n-1} 2^q \int_0^1 y^z m^q(dy)$$

le lecteur observera sans peine que le corollaire 3.II reste conservé.

III. RÉPARTITION DES SUITES DE KAKUTANI QUAND LA LOI DE BASE μ ADMET UNE COMPOSANTE ABSOLUMENT CONTINUE NON NULLE

Rappelons (cf. proposition 1.I) que nous avons posé

$$H(\mu) = - \int_0^1 x \operatorname{Log} x + (1-x) \operatorname{Log} (1-x) \mu(dx).$$

Le corollaire suivant donne le comportement asymptotique p. s. de la fonction aléatoire des temps d'arrêt $(\tilde{\mathcal{C}}(x))_{x \geq 0}$ quand la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle :

COROLLAIRE 1. III. — *Si la composante absolument continue μ_a de la loi de base μ est non nulle on a :*

$$\lim_{x \uparrow + \infty} \frac{\tilde{\mathcal{C}}(x)}{x} = \frac{1}{H(\mu)} \quad \text{p. s. .}$$

Démonstration. — Du corollaire 3. II résulte qu'il existe une constante C finie et un β , $1 \leq \beta < 2$ tel que $v(x) \leq Cx^\beta$. L'inégalité de Biénaymé conduit à

$$(1.3) \quad \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\tilde{\mathcal{C}}(n^p)}{n^p} - \frac{\theta(n^p)}{n^p} \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^{p(2-\beta)}}$$

pour $\varepsilon > 0$ et $p \geq 0$. Fixons alors p tel que $p(2 - \beta) > 1$. Du lemme de Borel-Cantelli et de l'assertion i) de la proposition 1. I résulte immédiatement que quand n parcourt les entiers on a

$$(2.3) \quad \lim_{n \uparrow + \infty} \frac{\tilde{\mathcal{C}}(n^p)}{n^p} = \frac{1}{H(\mu)} \quad \text{p. s. .}$$

A tout $x \geq 0$ associons l'entier n_x tel que

$$n_x^p \leq x < (n_x + 1)^p.$$

Comme la fonction aléatoire $(\tilde{\mathcal{C}}(x))_{x \geq 0}$ est croissante selon x il va de soi que

$$(3.3) \quad \frac{n_x^p}{(n_x + 1)^p} \cdot \frac{\tilde{\mathcal{C}}(n_x^p)}{n_x^p} \leq \frac{\tilde{\mathcal{C}}(x)}{x} \leq \frac{\tilde{\mathcal{C}}((n_x + 1)^p)}{(n_x + 1)^p} \frac{(n_x + 1)^p}{n_x^p}$$

De (2.3) et (3.3) l'on déduit visiblement que

$$\lim_{x \uparrow + \infty} \frac{\tilde{\mathcal{C}}(x)}{x} = \frac{1}{H(\mu)} \quad \text{p. s. .}$$

La démonstration du corollaire 1. III est donc achevée. Le corollaire 1. III étend le corollaire 1. II de [9] concernant le cas d'une loi de base μ uniforme sur $[0, 1]$.

Soit $N(q, I) = \sum_{n=1}^{n=q} 1_I(X_n)$ le nombre de points de la suite $\{X_n, 1 \leq n \leq q\}$

qui tombent dans un intervalle fixé I de $[0, 1]$. λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Nous avons le théorème de répartition suivant :

THÉORÈME 1. III. — *Si la loi de base μ admet une composante absolument continue μ_a non nulle on a :*

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{N(q, I)}{q} = \lambda(I).$$

En d'autres termes la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ est p. s. équi-répartie.

Démonstration. — Elle s'appuie essentiellement sur le fait que la limite p. s. $1/H(\mu)$ du corollaire 1. III est une constante > 0 ; nous renvoyons le lecteur à [9] : les techniques utilisées dans la démonstration du théorème 1. II (resp. théorème 1. III) de [9] concernant l'équi-répartition de la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ associée à une loi de base uniforme sur $[0, 1]$ (resp. uniforme sur $]0, 1[$ et chargeant les extrémités 0 et/ou 1) se transposent dans le cas présent intégralement.

Remarque 1. III. — Si la loi de base μ est géométriquement étalée (cf. remarque 4. II) le corollaire 1. III et le théorème 1. III restent inchangés.

IV. CONCLUSION

Dans une large mesure cet article constitue une étude par des voies *détournées* de l'équation en loi :

$$\mathcal{C} \stackrel{L}{=} \mathcal{C}^{(0,1)}(.X_1) + \mathcal{C}^{(1,1)}.(1 - X_1) + 1 \quad \text{si } x \geq 1, = 0 \text{ si } x < 1,$$

où $(\mathcal{C}^{(0,1)}, \mathcal{C}^{(1,1)})$ est un couple indépendant de copies de $\mathcal{C}$, lui-même indépendant de X_1 (cf. proposition 1. I de [9]), $\mathcal{C}(.y)$ désignant pour $y \geq 0$ la fonction aléatoire $(\mathcal{C}(xy))_{x \geq 0}$; c'est en se basant sur l'étude des comportements asymptotiques de l'espérance mathématique $\theta(x)$ et de la variance $v(x)$ de $\mathcal{C}(x)$ que nous avons pu déduire le comportement asymptotique p. s. de la fonction aléatoire $(\mathcal{C}(x))_{x \geq 0}$, du moins essentiellement dans le cas où la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle.

Mis à part le cas non-aléatoire où la loi de base μ est de la forme δ_a et qui a été traité dans [9] ainsi que quelques cas voisins qui s'y ramènent, le cas d'une loi de base μ discrète nous échappe : dans le cadre de nos techniques il eût suffi que la variance $v(x)$ soit $O(x^\beta)$ pour un $\beta < 2$ pour que l'on puisse déduire un résultat identique au corollaire 1. III (du moins dans le cas où $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique) et par suite le théorème 1. III. Nous n'avons pas pu obtenir un tel résultat (cf.

remarque 1.II). Néanmoins nous conjecturons que si $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique le corollaire 1.III et le théorème 1.III restent inchangés (cf. Addendum qui suit).

ADDENDUM. — Nous laissons au lecteur le soin de confronter certains aspects de cet article à l'article de R. BELLMAN et T. E. HARRIS « On age-dependent binary branching processes » (*Ann. of Math.*, t. 55, 1952, p. 280-295). D'autre part l'utilisation des résultats de P. JAGERS dans « Convergence of general branching processes and functionals thereof » (*J. Appl. Prob.*, t. 11, 1974, p. 471-478) conduit au corollaire 1.III et, par suite, au théorème 1.III pour une loi de base μ quelconque, $\bar{\mu}$ étant non portée par une progression géométrique ; à ce propos on pourra se reporter à une Note de l'auteur (à paraître aux *C. R. Acad. Sci.*, Paris) « Processus généraux de branchements et procédure de Kakutani généralisée » qui donne une extension du théorème 1.III.

REMERCIEMENTS

Je remercie J. NEVEU et A. BRUNEL pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail ainsi que B. BRU et H. HEINICH pour les conversations fructueuses échangées avec eux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. L. ADLER and L. FLATTO, Uniform distribution of Kakutani's interval splitting procedure. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. 38, 1977, p. 253-259.
- [2] H. BOHR, *Almost Periodic Functions*. Chelsea, 1947.
- [3] W. FELLER, *Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol. II. John Wiley and Sons.
- [4] B. JESSEN and H. TORNEHAVE, Mean Motions and zeros of almost-periodic functions. *Acta Math.*, t. 77, 1945, p. 137-259.
- [5] S. KAKUTANI, *Lecture Notes*, Vol. 541, Measure Theory, Proceedings Oberwolfach, 1975.
- [6] T. KAWATA, *Fourier Analysis in Probability Theory*. Academic Press, 1972.
- [7] J.-C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. 285, septembre 1977, p. 403-406.
- [8] J.-C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani (II). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. 286, mars 1978, p. 459-461.
- [9] J.-C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani (I). *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. XIII, n° 4, 1977, p. 385-410.
- [10] W. L. SMITH, Proceedings of the Royal Society of Edimbourg, 1945, p. 9-48.
- [11] W. R. VAN ZWET, A proof of a conjecture of Kakutani, à paraître aux *Ann. of Probability*.
- [12] N. WIENER and H. R. PITT, On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms. *Duke Math. J.*, t. 4, 1938, p. 420-436.
- [13] A. WINTNER, *The Fourier Transforms of Probability Distributions*, Baltimore, 1947.

(Manuscrit reçu le 1^{er} février 1978)