

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

E. MÉNARD

## **Remarque sur l'uniforme sommabilité des suites de variables aléatoires à valeurs vectorielles normées**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 14, n° 1 (1978), p. 85-98

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1978\\_\\_14\\_1\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_1_85_0)

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Remarque sur l'uniforme sommabilité des suites de variables aléatoires à valeurs vectorielles normées

par

E. MÉNARD

Département de Mathématiques,  
Université de Rouen, 76130 Mont-Saint-Aignan

RÉSUMÉ (<sup>1</sup>). — Cet article est consacré aux ensembles de suites de variables aléatoires à valeurs dans un espace vectoriel normé  $\mathcal{X}$  et satisfaisant, relativement à une suite  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$  d'applications linéaires de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  dans  $\mathcal{X}$ , à la propriété de presque sûre sommabilité uniforme vers 0 ; cette propriété exprime que si, pour chaque suite  $\mathbf{X} (= (X_n, n \in \mathbb{N}^*))$  appartenant à un tel ensemble  $\mathbf{F}$ , on note  $(\Omega_{\mathbf{X}}, \mathcal{A}_{\mathbf{X}}, \mathbf{P}_{\mathbf{X}})$  son espace de définition, on a :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\forall \alpha > 0) \quad (\exists n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall \mathbf{X} \in \mathbf{F}) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{X}} \left( \bigcup_{k \geq n} \{ \omega \in \Omega_{\mathbf{X}} ; \| T_k(\mathbf{X}(\omega)) \| \geq \varepsilon \} \right) \leq \alpha$$

(cette notion a été utilisée, en particulier dans le cas où  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est la suite des sommes de Cesaro, dans le but d'établir des lois fortes des grands nombres (voir [1] et [3])). Ce que nous faisons ici est de fournir des conditions suffisantes de presque sûre sommabilité uniforme vers 0, généralisant celles données par A. Beck et D. P. Giesy dans [2] ; cette généralisation est double :

1° l'ensemble des lois de toutes les suites  $\mathbf{X}$  appartenant à  $\mathbf{F}$  est supposé « bien rempli », notion qui généralise à la fois les notions de « fermeture

(<sup>1</sup>) Je remercie Jean-Pierre RAOULT de m'avoir suggéré ce travail.

pour le brouillage » et de « fermeture pour le brouillage indépendant » proposées par Beck et Giesy ;

2° la suite  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$  n'est pas supposée triangulaire inférieure (c'est-à-dire telle que  $T_n(x_1, \dots, x_i, \dots)$  ne dépende que de  $(x_1, \dots, x_n)$ ) ; on suppose seulement que, pour tout  $i$ ,  $T_i \circ \mathbf{X}$  est limite en probabilité, uniformément en  $\mathbf{X}$  (appartenant à  $\mathbf{F}$ ), de la suite  $(T_i \circ (X_1, \dots, X_n, 0, \dots), n \in \mathbb{N}^*)$ .

**SUMMARY.** — This paper is devoted to the study of sets of sequences of random variables, taking their values in a normed linear space  $\mathcal{X}$  and fulfilling, with respect to some sequence  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$  of linear mappings of  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  to  $\mathcal{X}$ , the property of almost sure uniform summability to 0; this property means that if, for each sequence  $\mathbf{X}$  ( $= (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ ) belonging to such a set  $\mathbf{F}$ , we denote by  $(\Omega_{\mathbf{X}}, \mathcal{A}_{\mathbf{X}}, \mathbf{P}_{\mathbf{X}})$  its domain, we get :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\forall \alpha > 0) \quad (\exists n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall \mathbf{X} \in \mathbf{F})$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}} \left( \bigcup_{k \geq n} \{ \omega \in \Omega_{\mathbf{X}} ; \| T_k(\mathbf{X}(\omega)) \| \geq \varepsilon \} \right) \leq \alpha$$

(this notion has been used, especially in the case where  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$  is the sequence of Cesaro sums, for the purpose of establishing strong laws of large numbers (see [1] and [3])). What we do here is to give sufficient conditions for almost sure uniform summability to 0, generalizing those given by A. Beck and D. P. Giesy (see [2]); this generalization is twofold :

1° the set of the laws of all sequences belonging to  $\mathbf{F}$  is supposed to be « well filled » ; this notion contains both notions of « closure for scrambling » and « closure for independent scrambling » which had been proposed by Beck and Giesy ;

2° the sequence  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$  is not supposed to be « triangular inferior » (that is to say such that  $T_n(x_1, \dots, x_i, \dots)$  depends only on  $(x_1, \dots, x_n)$ ) ; we only suppose that, for each  $i$ ,  $T_i \circ \mathbf{X}$  is the limit in probability, uniformly with respect to  $\mathbf{X}$  (belonging to  $\mathbf{F}$ ), of the sequence  $(T_i \circ (X_1, \dots, X_n, 0, \dots), n \in \mathbb{N}^*)$ .

## 1. INTRODUCTION

1.1. Dans tout ce texte,  $\mathcal{X}$  désigne un espace vectoriel normé et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des probabilités sur  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ , à support séparable (Remarquons que, pour toute partie séparable de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ , il y a égalité entre la restriction à cette partie de la tribu borélienne de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  et la restriction à cette même partie de la tribu puissance de la tribu borélienne de  $\mathcal{X}$ ).

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $L_n$  l'application de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  dans lui-même, qui, à toute suite  $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$  associe la suite  $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ , et  $L_0$  l'application nulle de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  dans lui-même.

1.2. En [2], A. Beck et D. P. Giesy définissent les deux notions suivantes :

a) Un ensemble  $F$  de suites de variables aléatoires, toutes définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , et à valeurs dans  $\mathcal{X}$ , est dit *fermé pour le brouillage* (closed under scrambling), si et seulement si toute suite  $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$  telle que, pour tout  $n$ ,  $Y_n$  soit le  $n^e$  terme d'au moins une suite appartenant à  $F$ , appartient également à  $F$ .

b) Un ensemble  $F$  de suites de variables aléatoires *indépendantes* à valeurs dans  $\mathcal{X}$  (mais non nécessairement toutes définies sur le même espace de probabilité) est dit *fermé pour le brouillage indépendant* (closed under independent scrambling), si et seulement si, pour toute suite  $(P_n, n \in \mathbb{N}^*)$  de probabilités sur  $\mathcal{X}$  telle que, pour tout  $n$ ,  $P_n$  soit la loi du  $n^e$  terme d'au moins une suite appartenant à  $F$ , il existe une suite appartenant à  $F$  telle que la suite  $(P_n, n \in \mathbb{N}^*)$  soit la suite des lois de ses termes.

1.3. La seconde de ces notions est liée à la première par l'artifice suivant : soit donné  $F$  *fermé pour le brouillage indépendant* ; notons, pour tout élément  $X (= (X_n, n \in \mathbb{N}^*))$  de  $F$ ,  $(\Omega_X, \mathcal{A}_X, P_X)$  son espace de définition, et posons :

$$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P}) = \prod_{X \in F} (\Omega_X, \mathcal{A}_X, P_X) ;$$

à toute suite  $(X^n, n \in \mathbb{N}^*) (= ((X_k^n, k \in \mathbb{N}^*), n \in \mathbb{N}^*))$  d'éléments de  $F$ , associons la suite  $(\bar{X}_k, k \in \mathbb{N}^*)$  définie sur  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$  par  $\bar{X}_k((\omega_X, X \in F)) = X_k^k(\omega_{X^k})$  ; il est clair que l'ensemble  $\bar{F}$  des suites de variables aléatoires indépendantes définies sur  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$  ainsi obtenues est *fermé pour le brouillage* et que l'ensemble des suites de lois de probabilités sur  $\mathcal{X}$  associées aux éléments de  $\bar{F}$  coïncide avec l'ensemble des suites de lois de probabilités sur  $\mathcal{X}$  associées aux éléments de  $F$ .

1.4. L'usage fait par A. Beck et D. P. Giesy de ces notions de brouillage et de brouillage indépendant tient à ce que sont pour les ensembles de suites de v. a. vérifiant l'une ou l'autre de ces propriétés que ces auteurs ont obtenu des résultats permettant d'établir (sous une hypothèse supplémentaire facile à assurer dans la pratique) que, si chacune des suites de v. a. d'un tel ensemble est T-sommable (presque sûrement ou en probabilité),

alors cette propriété de T-sommabilité vaut « uniformément » sur cet ensemble (ces notions de T-sommabilité et d'uniforme T-sommabilité seront précisées ci-dessous).

A. Beck et D. P. Giesy établissent d'abord ([2, Th. I.3]) le théorème d'uniformité relatif aux ensembles de suites de v. a. qui sont « fermées pour le brouillage » (notion (a)), et passent ensuite ([2, Th. II.7]) aux ensembles de suites de v. a. indépendantes qui sont « fermées pour le brouillage indépendant » (notion (b)) à l'aide de l'artifice décrit ci-dessus, artifice dans la mise en œuvre duquel l'hypothèse d'indépendance joue un rôle essentiel.

Par ailleurs, A. Beck et D. P. Giesy font remarquer qu'il s'agit en fait de propriétés portant, non sur un ensemble de suites de v. a., mais plutôt sur leurs lois, c'est-à-dire sur une partie de l'ensemble des probabilités sur  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ . Dans le cas (a), cette partie de l'ensemble des probabilités sur  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  apparaît comme ensemble des images d'une même probabilité P (définie sur un ensemble  $(\Omega, \mathcal{A})$ ) par les éléments d'un ensemble d'applications de  $\Omega$  dans  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ ; dans le cas (b), elle est constituée de probabilités produits.

1.5. Nous nous intéressons ici à chercher, pour les ensembles de probabilités sur  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ , une propriété, généralisant à la fois la « fermeture pour le brouillage » et « la fermeture pour le brouillage indépendant », et à l'aide de laquelle reste assurée la possibilité de démontrer des résultats d'uniformité pour la T-sommabilité presque sûre ou en probabilité.

## 2. DÉFINITIONS

### 2.1. Définition 1

Soit  $\mathcal{Q}$  une partie de  $\mathcal{P}$  et soit  $\mathbf{a} (= (a_{ij}, i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}^*))$  une suite double de nombres réels.

$\mathbf{a}$  est dite  $\mathcal{Q}$ -sommante si et seulement si il existe T, application de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  dans lui-même qui à tout  $\mathbf{x} (= (x_j, j \in \mathbb{N}^*))$  associe  $T(\mathbf{x}) = (T_i(\mathbf{x}), i \in \mathbb{N}^*)$  de telle sorte que, pour tout  $i$  et tout élément P de  $\mathcal{Q}$ ,  $T_i$  soit limite en probabilité, relativement à P, de la suite de sommes partielles  $(T_i^n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie par

$$T_i^n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j;$$

T (défini à une égalité  $\mathcal{Q}$ -presque-sûre près) est appelé méthode de sommation associée à  $\mathbf{a}$  et compatible avec  $\mathcal{Q}$ .

$\mathbf{a}$  est dite  $\mathcal{Q}$ -uniformément sommante si de plus, pour tout  $i$ , la convergence

en probabilité de  $T_i^n$  vers  $T_i$  a lieu uniformément relativement au choix de la probabilité  $P$  dans  $\mathcal{Q}$  (c'est-à-dire que  $i$  étant fixé, on a

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall \alpha > 0) (\exists N) (\forall n \geq N) (\forall P \in \mathcal{Q}) P(\|T_i - T_i^n\| \geq \varepsilon) \leq \alpha.$$

Remarquons que  $\mathbf{a}$  est en particulier  $\mathcal{P}$ -uniformément sommante ( $\mathcal{P}$  étant l'ensemble de toutes les probabilités à support séparable sur  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ ) quand on a une méthode de sommation triangulaire inférieure, c'est-à-dire quand, pour tout  $i$ , il existe  $N(i)$  tel que, pour tout  $j > N(i)$ , on a  $a_{ij} = 0$ ; on peut prendre alors  $T_i = T_i^{N(i)}$  (2).

Si  $\mathbf{a}$  est  $\mathcal{Q}$ -uniformément sommante, il existe au moins une méthode de sommation associée à  $\mathbf{a}$  et compatible avec  $\mathcal{Q}$  qui est un endomorphisme de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ ; en effet il existe alors, pour tout  $i$ , une suite strictement croissante d'entiers, soit  $(M_j; j \in \mathbb{N}^*)$ , telle que la suite  $(T_i^{M_j}(\mathbf{x}), j \in \mathbb{N}^*)$  converge  $P$ -presque sûrement pour chacune des probabilités  $P$  appartenant à  $\mathcal{Q}$ ; l'ensemble des  $\mathbf{x}$  tels que la suite  $(T_i^{M_j}(\mathbf{x}), j \in \mathbb{N}^*)$  converge est alors un sous-espace vectoriel  $\mathcal{Y}_i$  de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  tel que, pour chaque  $P$  appartenant à  $\mathcal{Q}$ , on ait  $P(\mathcal{Y}_i) = 1$ ; on peut alors prendre pour  $T_i$  n'importe lequel des endomorphismes vérifiant, pour tout élément  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{Y}_i$ ,  $T_i(\mathbf{x}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} T_i^{M_j}(\mathbf{x})$ ; en particulier, si  $\mathbf{x}$  a toutes ses coordonnées nulles à partir d'un rang  $n$ , on a  $T_i(\mathbf{x}) = T_i^n(\mathbf{x})$ ; autrement dit,  $T_i = T_i L_n$ ;  $T$  ainsi défini sera dit un endomorphisme de sommation, associé à  $\mathbf{a}$ , et compatible avec  $\mathcal{Q}$ ; la restric-

tion de  $T$  à  $\mathcal{Y} : \left( = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Y}_i \right)$  est mesurable; chacune des probabilités  $P$  appartenant à  $\mathcal{Q}$ , étant portée par  $\mathcal{Y}$ , s'étend de manière unique à la tribu engendrée par les tribus  $T_i^{-1}(\mathcal{B})$  (où  $\mathcal{B}$  désigne la tribu borélienne de  $\mathcal{X}$ ).

### 2.2. Définition 2

Soit  $\mathcal{Q}$  une partie de  $\mathcal{P}$  et soit  $\mathbf{a}$  une suite double de nombres réels,  $\mathcal{Q}$ -uniformément sommante; soit  $T$  un endomorphisme de sommation, associé à  $\mathbf{a}$  et compatible avec  $\mathcal{Q}$ .

Un élément  $P$  de  $\mathcal{Q}$  est dit *p. s.-T-sommable vers 0* si et seulement si

$$P(\{ \mathbf{x} ; \lim_{i \rightarrow +\infty} T_i(\mathbf{x}) = 0 \}) = 1,$$

autrement dit

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall \alpha > 0) (\exists n \in \mathbb{N}^*) P\left(\bigcup_{k \geq n} [\|T_k\| \geq \varepsilon]\right) \leq \alpha.$$

(2) L'étude de BECK et GIESY se limite à cette situation (avec en fait  $N(i) = i$ ); c'est à Antoine BRUNEL que je dois la suggestion de sortir de ce cadre.

Une partie  $\mathcal{Q}'$  de  $\mathcal{Q}$  est dite *p. s.-uniformément-T-sommable vers 0* si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\forall \alpha > 0) \quad (\exists n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall Q \in \mathcal{Q}') \quad Q\left(\bigcup_{k \geq n} [\|T_k\| \geq \varepsilon]\right) \leq \alpha.$$

*Remarque.* — On aurait pu introduire des notions de T-sommabilité et d'uniforme-T-sommabilité vers 0 en probabilité (cette dernière notion s'exprimant sous la forme :  $\mathcal{Q}'$  est *p-uniformément-T-sommable vers 0* si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\forall \alpha > 0) \quad (\exists n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall k \geq n) \quad (\forall Q \in \mathcal{Q}') \quad Q([\|T_k\| \geq \varepsilon]) \leq \alpha);$$

toute propriété que nous allons étudier dans cet article pour les notions « p. s. » reste en fait valable pour les notions « en probabilité » et les démonstrations sont plus élémentaires; nous ne les détaillerons donc pas ici.

### 3. PARTIES BIEN REMPLIES DE L'ENSEMBLE DES PROBABILITÉS SUR $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$

#### 3.1. Définition

Soit  $\mathcal{Q}$  une partie de  $\mathcal{P}$ ; on dit que  $\mathcal{Q}$  est bien remplie si et seulement si quelle que soit la suite strictement croissante d'entiers  $(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots)$  (où  $t_0 = 0$ ), et quelle que soit la suite  $(Q_n)$  d'éléments de  $\mathcal{Q}$ , il existe  $Q^*$ , élément de  $\mathcal{Q}$ , tel que, pour tout  $n$ , la projection de  $Q^*$  sur le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  constitué par les suites  $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$  vérifiant

$$x_1 = \dots = x_{t_{n-1}} = x_{t_n} = \dots = 0,$$

soit la même que celle de  $Q_n$  (autrement dit  $(L_{t_n} - L_{t_{n-1}})(Q^*) = (L_{t_n} - L_{t_{n-1}})(Q_n)$ ).

#### 3.2. Rappel de théorie des probabilités

**PROPOSITION.** — Soient 3 espaces de probabilités  $(\Omega_x, \mathcal{A}_x, P_x)$ ,  $(\Omega_{\beta_1}, \mathcal{A}_{\beta_1}, P_{\beta_1})$ ,  $(\Omega_{\beta_2}, \mathcal{A}_{\beta_2}, P_{\beta_2})$  et soit, pour tout  $i$  ( $= 1$  ou  $2$ ), un morphisme  $\psi_{\alpha\beta_i}$  de  $(\Omega_{\beta_i}, \mathcal{A}_{\beta_i}, P_{\beta_i})$  dans  $(\Omega_x, \mathcal{A}_x, P_x)$ .

On pose  $\Omega_\gamma = \{(\omega_{\beta_1}, \omega_{\beta_2}) / \psi_{\alpha\beta_1}(\omega_{\beta_1}) = \psi_{\alpha\beta_2}(\omega_{\beta_2})\}$  et on munit  $\Omega_\gamma$  de la tribu  $\mathcal{A}_\gamma$  induite par la tribu produit  $\mathcal{A}_{\beta_1} \times \mathcal{A}_{\beta_2}$ . On note, pour tout  $i$ ,  $\psi_{\beta_i\gamma}$  l'application mesurable de  $(\Omega_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$  dans  $(\Omega_{\beta_i}, \mathcal{A}_{\beta_i})$  définie par la restriction à  $\Omega_\gamma$  de la projection canonique de  $\Omega_{\beta_1} \times \Omega_{\beta_2}$  sur  $\Omega_{\beta_i}$ .

On suppose que, pour tout  $i$ ,  $P_{\beta_i}$  admet une probabilité conditionnelle régulière relativement à  $\psi_{\alpha\beta_i}$ .

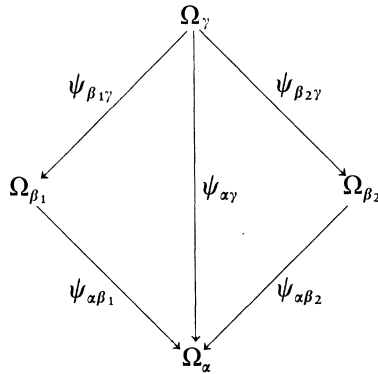
Alors il existe  $P_\gamma$ , probabilité sur  $(\Omega_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$  (non nécessairement unique) telle que  $\psi_{\beta_1\gamma}(P_\gamma) = P_{\beta_1}$  et  $\psi_{\beta_2\gamma}(P_\gamma) = P_{\beta_2}$ .

*Démonstration.* — Soit, pour tout  $i$ ,  $l_{\beta_i\alpha}$  une transition de conditionnement de  $P_{\beta_i}$  relativement à  $\psi_{\alpha\beta_i}$ .

Ces transitions de conditionnement étant régulières (terminologie de Parthasaraty [4, V. 8]), il existe  $B_\alpha$ , élément de  $\mathcal{A}_\alpha$  tel que :

.  $P_\alpha(B_\alpha) = 0$ .

. Pour tout  $\omega_\alpha$  n'appartenant pas à  $B_\alpha$  et pour tout  $i$ , la probabilité  $l_{\beta_i\alpha}(\omega_\alpha, \cdot)$  est concentrée sur  $\psi_{\alpha\beta_i}^{-1}(\omega_\alpha)$ .



D'autre part, pour tout  $i$  et tout  $B_{\beta_i} (\in \mathcal{A}_{\beta_i})$ , on a

$$P_{\beta_i}(B_{\beta_i}) = \int_{\Omega_\alpha} l_{\beta_i\alpha}(\omega_\alpha, B_{\beta_i})P_\alpha(d\omega_\alpha).$$

On remarque que, pour tout  $\omega_\alpha$  n'appartenant pas à  $B_\alpha$ ,

$$l_{\beta_1\alpha}(\omega_\alpha, \cdot) \times l_{\beta_2\alpha}(\omega_\alpha, \cdot)$$

est une probabilité définie sur  $(\Omega_{\beta_1} \times \Omega_{\beta_2}, \mathcal{A}_{\beta_1} \times \mathcal{A}_{\beta_2})$  et concentrée sur  $\psi_{\alpha\beta_1}^{-1}(\omega_\alpha) \times \psi_{\alpha\beta_2}^{-1}(\omega_\alpha)$ , donc *a fortiori* sur  $\Omega_\gamma$ . Soit  $l_{\gamma\alpha}(\omega_\alpha, \cdot)$  la probabilité induite par  $l_{\beta_1\alpha}(\omega_\alpha, \cdot) \times l_{\beta_2\alpha}(\omega_\alpha, \cdot)$  sur  $(\Omega_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$ ; soit  $Q$  une probabilité quelconque sur  $(\Omega_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$  et soit, pour tout  $\omega_\alpha$  appartenant à  $B_\alpha$ ,  $l_{\gamma\alpha}(\omega_\alpha, \cdot) = Q$ ;  $l_{\gamma\alpha}$  ainsi définie est une transition de probabilité de  $(\Omega_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$  vers  $(\Omega_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$ .

On vérifie alors que les conclusions de la proposition sont satisfaites si on prend pour  $P_\gamma$  la probabilité sur  $(\Omega_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$  qui admet, relativement à  $\psi_{\alpha\gamma} (= \psi_{\alpha\beta_1} \circ \psi_{\beta_1\gamma} = \psi_{\alpha\beta_2} \circ \psi_{\beta_2\gamma})$ ,  $P_\alpha$  pour image et  $\tau_{\gamma\alpha}$  pour transition de conditionnement (autrement dit, pour tout  $B_\gamma (\in \mathcal{A}_\gamma)$ ,

$$P_\gamma(B_\gamma) = \int_{\Omega_\alpha} \tau_{\gamma\alpha}(\omega_\alpha, B_\gamma)P_\alpha(d\omega_\alpha).$$



## 3.3. Lemme

Étant donné un entier strictement positif  $i$ , notons

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{X}^{\{1, \dots, i\}} \times \mathcal{X}^{\{1, \dots, i\}} \times \mathcal{X}^{\{i+1, \dots\}}$$

et soient  $\varphi'_i$  et  $\varphi''_i$  les applications linéaires de  $\mathcal{L}_i$  dans  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  définies par :

$$\varphi'_i(x'_1, \dots, x'_i, x''_1, \dots, x''_i, x_{i+1}, \dots) = (x'_1, \dots, x'_i, x_{i+1}, \dots)$$

$$\varphi''_i(x'_1, \dots, x'_i, x''_1, \dots, x''_i, x_{i+1}, \dots) = (x''_1, \dots, x''_i, x_{i+1}, \dots).$$

Soient 2 probabilités  $Q'$  et  $Q''$  sur  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ , vérifiant

$$(I - L_i)(Q') = (I - L_i)(Q'')$$

(où  $I$  désigne l'application identique de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ ).

Alors il existe  $P$  probabilité sur  $\mathcal{L}_i$ , vérifiant

$$\varphi'_i(P) = Q' \quad \text{et} \quad \varphi''_i(P) = Q''.$$

*Démonstration.* — Soit  $\Omega$  un sous-espace séparable de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ , sur lequel  $Q'$  et  $Q''$  sont concentrées, soit  $\tilde{\mathcal{X}}$  le complété de  $\mathcal{X}$ , et soit  $\tilde{\Omega}$  la fermeture de  $\Omega$  dans  $\tilde{\mathcal{X}}^{\mathbb{N}^*}$ ; on note  $\tilde{\Omega}_i$  l'image de  $\tilde{\Omega}$  par la projection canonique de  $\tilde{\mathcal{X}}^{\mathbb{N}^*}$  sur  $\{0\}^{\{1, \dots, i\}} \times \tilde{\mathcal{X}}^{\{i+1, \dots\}}$ ; on se ramène alors à la situation de la proposition précédente, avec  $\Omega_\alpha = \tilde{\Omega}_i$  et  $\Omega_{\beta_1} = \Omega_{\beta_2} = \tilde{\Omega}$ ; toute probabilité définie, par application de cette proposition, sur l'espace  $\Omega$ , associé induit alors de manière évidente une probabilité sur  $\mathcal{L}_i$  qui vérifie la propriété exigée.

## 3.4. Propriété fondamentale des parties bien remplies

**THÉORÈME.** — Soit  $\mathcal{Q}$  une partie bien remplie de  $\mathcal{P}$ , et soit  $\mathbf{a}$  une suite double de nombre réels,  $\mathcal{Q}$ -uniformément-sommante; soit  $T$  un endomorphisme de sommation, associé à  $\mathbf{a}$  et compatible avec  $\mathcal{Q}$ . On suppose que tout élément de  $\mathcal{Q}$  est p. s.- $T$ -sommable vers  $O$  et que, pour tout entier  $n$ ,  $L_n(\mathcal{Q})$  est p. s.-uniformément- $T$ -sommable vers  $O$ .

Alors  $\mathcal{Q}$  est p. s.-uniformément- $T$ -sommable vers  $O$ .

*Démonstration.* — a) Soit  $\mathcal{Q}$  une partie bien remplie de  $\mathcal{P}$ , non p. s.-uniformément- $T$ -sommable vers  $O$ , et telle que, pour tout  $n$ ,  $L_n(\mathcal{Q})$  soit p. s.-uniformément- $T$ -sommable vers  $O$ .

On peut donc fixer deux nombres strictement positifs  $\varepsilon$  et  $\alpha$  tels que, pour tout  $n$ , il existe  $Q$  appartenant à  $\mathcal{Q}$  vérifiant

$$Q\left(\bigcup_{k \geq n} [\|T_k\| \geq 5\varepsilon]\right) \geq 6\alpha.$$

Notre but est de construire une probabilité  $Q^*$ , appartenant à  $\mathcal{Q}$  et non p. s.-T-sommable vers  $O$ .

b) Nous allons d'abord construire trois suites d'entiers, notées  $(s_i, i \in \mathbb{N})$ ,  $(t_i, i \in \mathbb{N})$  et  $(u_i, i \in \mathbb{N})$ , vérifiant  $s_0 = t_0 = u_0 = 0$  et, pour tout  $i$ ,  $s_i \leq t_i \leq u_i < s_{i+1}$ , ainsi qu'une suite  $(Q_i, i \in \mathbb{N}^*)$  de probabilités appartenant à  $\mathcal{Q}$ .

Pour cela, les  $s_i$ ,  $t_i$  et  $u_i$  étant supposés construits pour  $i < n$ , on utilise l'hypothèse selon laquelle, pour tout  $n$ ,  $L_n(\mathcal{Q})$  est p. s.-uniformément-T-sommable pour déterminer  $s_n$ , qu'on prend strictement supérieur à  $u_{n-1}$ , tel que, pour tout élément  $Q$  de  $\mathcal{Q}$ , on ait

$$Q\left(\bigcup_{k \geq s_n} [\|T_k L_{u_{n-1}}\| \geq \varepsilon]\right) \leq \alpha.$$

On peut alors, en vertu du choix de  $\varepsilon$  et  $\alpha$  (fait en *a* ci-dessus) choisir un élément de  $\mathcal{Q}$ , noté  $Q_n$ , tel que

$$Q_n\left(\bigcup_{k \geq s_n} [\|T_k\| \geq 5\varepsilon]\right) \geq 6\alpha,$$

et ensuite fixer  $t_n$ , tel que

$$Q_n\left(\bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq 5\varepsilon]\right) \geq 5\alpha.$$

On détermine alors, en vertu de l'hypothèse selon laquelle *a* est  $\mathcal{Q}$ -uniformément-sommante,  $u_n$ , tel que, pour tout  $Q \in \mathcal{Q}$ , et tout  $k$  tel que  $s_n \leq k < t_n$ , on ait

$$Q([\|T_k - T_k L_{u_n}\| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\alpha}{t_n - s_n},$$

ce qui implique en particulier que

$$Q_n\left(\bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n}\| \geq 4\varepsilon]\right) \geq 4\alpha$$

(en effet, on a

$$\bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n}\| \geq 4\varepsilon] \supset \left(\bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq 5\varepsilon]\right) \cap \left(\bigcap_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n} - T_k\| < \varepsilon]\right)$$

d'où

$$Q_n\left(\bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n}\| \geq 4\varepsilon]\right) \geq 5\alpha - (t_n - s_n) \frac{\alpha}{t_n - s_n} = 4\alpha.$$

c) Soit  $Q^*$  une probabilité appartenant à  $\mathcal{Q}$ , dont l'existence est assurée par l'hypothèse de bon remplissage, vérifiant, pour tout  $n$ ,

$$(L_{u_n} - L_{u_{n-1}})(Q^*) = (L_{u_n} - L_{u_{n-1}})(Q_n).$$

Nous allons démontrer que  $Q^*$  vérifie, pour tout  $n$ ,

$$Q^* \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq \varepsilon] \right) \geq \alpha,$$

ce qui implique évidemment que  $Q^*$  n'est pas p. s.-T-sommable vers  $O$ .

Soit donc fixé  $n$ ; remarquons qu'il suffit d'établir (ce qu'on fera en  $d$  ci-dessous) que

$$Q^* \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n}\| \geq 2\varepsilon] \right) \geq 2\alpha;$$

en effet, on a alors

$$\begin{aligned} \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq \varepsilon] &\supset \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n}\| \geq 2\varepsilon] \right) \\ &\quad \cap \left( \bigcap_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n} - T_k\| < \varepsilon] \right) \end{aligned}$$

et donc

$$Q^* \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq \varepsilon] \right) \geq 2\alpha - (t_n - s_n) \frac{\alpha}{t_n - s_n} = \alpha.$$

$d$ ) Remarquons que  $Q_n$  et  $Q^*$  vérifient

$$(I - L_{u_{n-1}})(L_{u_n}(Q_n)) = (I - L_{u_{n-1}})(L_{u_n}(Q^*));$$

il résulte alors du lemme 3.3 qu'il existe  $P$ , probabilité sur  $\mathcal{L}_{u_{n-1}}$ , telle que  $\varphi'_{u_{n-1}}(P) = L_{u_n}(Q_n)$  et  $\varphi''_{u_{n-1}}(P) = L_{u_n}(Q^*)$ ; on va noter désormais  $\varphi'$  (resp.  $\varphi''$ ) pour  $\varphi'_{u_{n-1}}$  (resp.  $\varphi''_{u_{n-1}}$ ).

On a

$$\varphi' = (I - L_{u_{n-1}})\varphi'' + L_{u_{n-1}}\varphi'$$

donc, pour tout  $k$ ,

$$\begin{aligned} [\|T_k \varphi'\| \geq 4\varepsilon] &\subset [\|T_k L_{u_{n-1}} \varphi'\| \geq \varepsilon] \\ &\quad \cup [\|T_k L_{u_{n-1}} \varphi''\| \geq \varepsilon] \cup [\|T_k \varphi''\| \geq 2\varepsilon], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k \varphi'\| \geq 4\varepsilon] \right) &\leq P \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_{n-1}} \varphi'\| \geq \varepsilon] \right) \\ &\quad + P \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_{n-1}} \varphi''\| \geq \varepsilon] \right) + P \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k \varphi''\| \geq 2\varepsilon] \right); \end{aligned}$$

autrement dit, par construction de  $P$ ,

$$\begin{aligned} (L_{u_n}(Q^*)) \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq 2\varepsilon] \right) &\geq (L_{u_n}(Q_n)) \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq 4\varepsilon] \right) \\ &\quad - (L_{u_{n-1}}(Q_n)) \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq \varepsilon] \right) - (L_{u_{n-1}}(Q^*)) \left( \bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k\| \geq \varepsilon] \right), \end{aligned}$$

d'où enfin

$$Q^*\left(\bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n}\| \geq 2\varepsilon]\right) \geq Q_n\left(\bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n}\| \geq 4\varepsilon]\right) - Q_n\left(\bigcup_{k \geq s_n} [\|T_k L_{u_{n-1}}\| \geq \varepsilon]\right) - Q^*\left(\bigcup_{k \geq s_n} [\|T_k L_{u_{n-1}}\| \geq \varepsilon]\right),$$

ce qui implique, en vertu des inégalités imposées dans la construction effectuée en b) ci-dessus, que

$$Q^*\left(\bigcup_{s_n \leq k < t_n} [\|T_k L_{u_n}\| \geq 2\varepsilon]\right) \geq 4\alpha - \alpha - \alpha = 2\alpha. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

### 4. BROUILLAGE

#### 4.1. Définition

Étant donnée une partie  $\mathcal{Q}'$  de l'ensemble  $\mathcal{P}$  des probabilités à support séparable sur  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$ , un élément  $P$  de  $\mathcal{P}$  est dit « déduit de  $\mathcal{Q}'$  par brouillage » si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la  $n^{\text{e}}$  projection (sur  $\mathcal{X}$ ) de  $P$  coïncide avec la  $n^{\text{e}}$  projection d'au moins un élément de  $\mathcal{Q}'$  (autrement dit, pour tout  $n$ , il existe  $Q'$ , élément de  $\mathcal{Q}'$  tel que  $(L_n - L_{n-1})(P) = (L_n - L_{n-1})(Q')$ ).

#### 4.2. Lemme

Soit  $\mathcal{Q}$  une partie de  $\mathcal{P}$  et soit  $a$  une suite double de nombres réels,  $\mathcal{Q}$ -uniformément sommante ; soit  $T$  un endomorphisme de sommation associé à  $a$  et compatible avec  $\mathcal{Q}$ . On suppose qu'il existe une partie  $\mathcal{Q}'$  de  $\mathcal{Q}$  telle que tout élément de  $\mathcal{Q}$  soit déduit de  $\mathcal{Q}'$  par brouillage, et que, pour tout  $n$ ,  $L_n(\mathcal{Q}')$  soit p. s.-uniformément- $T$ -sommable vers 0. Alors, pour tout  $n$ ,  $L_n(\mathcal{Q})$  est p. s.-uniformément- $T$ -sommable vers 0.

Démonstration. — Soit fixé un entier  $n \geq 1$ .

On remarque que  $L_n = \sum_{i=1}^n (L_i - L_{i-1})$  (notons que  $L_0$  étant l'application nulle,  $L_0(\mathcal{Q}')$  est évidemment p. s.-uniformément- $T$ -sommable vers 0).

Soit fixé  $\varepsilon > 0$  ; on a, pour tout entier  $m \geq 1$

$$\bigcup_{k \geq m} [\|T_k L_n\| \geq \varepsilon] \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{k \geq m} \left[ \|T_k (L_i - L_{i-1})\| \geq \frac{\varepsilon}{n} \right];$$

donc, pour tout élément  $Q$  de  $\mathcal{Q}$ , on a

$$Q\left(\bigcup_{k \geq m} [\|T_k L_n\| \geq \varepsilon]\right) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} Q\left(\bigcup_{k \geq m} \left[\|T_k(L_i - L_{i-1})\| \geq \frac{\varepsilon}{n}\right]\right);$$

notons, pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $Q_i$  une probabilité appartenant à  $\mathcal{Q}'$  telle que

$$(L_i - L_{i-1})(Q) = (L_i - L_{i-1})(Q_i).$$

On a donc

$$\begin{aligned} & Q\left(\bigcup_{k \geq m} [\|T_k L_n\| \geq \varepsilon]\right) \\ & \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \left( Q_i\left(\bigcup_{k \geq m} \left[\|T_k L_i\| \geq \frac{\varepsilon}{2n}\right]\right) + Q_i\left(\bigcup_{k \geq m} \left[\|T_k L_{i-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2n}\right]\right) \right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \sup_{Q \in \mathcal{Q}} Q\left(\bigcup_{k \geq m} [\|T_k L_n\| \geq \varepsilon]\right) \\ & \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \sup_{Q' \in \mathcal{Q}'} \left( Q'\left(\bigcup_{k \geq m} \left[\|T_k L_i\| \geq \frac{\varepsilon}{n}\right]\right) + Q'\left(\bigcup_{k \geq m} \left[\|T_k L_{i-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2n}\right]\right) \right). \end{aligned}$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 en vertu de la p. s.-uniforme-T-sommabilité vers 0 de tous les  $L_i(\mathcal{Q}')$  ( $0 \leq i \leq n$ ); d'où l'on déduit la p. s. uniforme T-sommabilité vers 0 de  $L_n(\mathcal{Q})$ .

#### 4.3. Théorème fondamental

Soit  $\mathcal{Q}$  une partie bien remplie de  $\mathcal{P}$  et soit  $\mathbf{a}$  une suite double de nombre réels,  $\mathcal{Q}$ -uniformément sommante; soit  $T$  un endomorphisme de sommation, associé à  $\mathbf{a}$  et compatible avec  $\mathcal{Q}$ . On suppose que tout élément de  $\mathcal{Q}$  est p.-s.-T-sommable vers 0. On suppose d'autre part qu'il existe une partie  $\mathcal{Q}'$  de  $\mathcal{Q}$ , telle que tout élément de  $\mathcal{Q}$  soit déduit de  $\mathcal{Q}'$  par brouillage, et que, pour tout  $n$ ,  $L_n(\mathcal{Q}')$  soit p. s.-uniformément-T-sommable vers 0.

Alors  $\mathcal{Q}$  est p. s.-uniformément-T-sommable vers 0.

*Démonstration.* — Ce résultat découle immédiatement du lemme 4.2 et du théorème 3.4.

#### 4.4. Remarque

Beck et Giesy démontrent (en [2], Théorème I.4) que, étant donnée une partie  $\mathcal{Q}'$  de  $\mathcal{P}$ , il suffit, pour que, pour tout  $n$ ,  $L_n(\mathcal{Q}')$  soit p. s.-unifor-

mément-T-sommable vers 0, que, pour tout  $n$ , soient satisfaites les 2 conditions suivantes :

$$(1) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} a_{in} = 0$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{Q \in \mathcal{Q}'} Q_n(t\mathcal{S}) = 1,$$

où  $Q_n$  désigne la  $n^e$  projection de  $Q$  et  $\mathcal{S}$  la boule unité de l'espace  $\mathcal{X}$ .

La propriété (2) est en particulier impliquée par l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes :

$$(2 a) \quad \sup_{Q \in \mathcal{Q}'} \sup \{ s \geq 0 ; Q_n(t\mathcal{S}) < 1 \} < +\infty$$

(2 b) il existe  $g_n$ , application croissante de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty,$$

et

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}'} \int_{\mathcal{X}} g_n(\|x\|) Q_n(dx) < +\infty.$$

## 5. EXEMPLES

### 5.1. Fermeture brouillée (de Beck et Giesy)

Soit  $\mathbf{F}$  un ensemble de suites de variables aléatoires, définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathcal{X}$ . Soit  $\mathbf{G}$  la fermeture brouillée (de Beck et Giesy) de  $\mathbf{F}$ ; il est clair que  $\mathcal{Q}$ , ensemble des images de  $P$  par les éléments de  $\mathbf{G}$ , est une partie bien remplie.

### 5.2. Fermeture brouillée indépendante

**DÉFINITION.** — Soit  $\mathcal{Q}'$  une partie de  $\mathcal{P}$ ; à toute partition finie ou infinie de  $\mathbb{N}^*$  en intervalles,  $(I_j, j \in J)$  (où  $J$  est, soit de la forme  $\{1, \dots, m\}$ , soit  $\mathbb{N}^*$ ) et à toute suite  $(Q_j, j \in J)$  d'éléments de  $\mathcal{Q}'$ , on associe, en notant  $L_{I_j}$  la projection canonique de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}^*}$  sur  $\mathcal{X}^{I_j}$ , la probabilité

$$\prod_{j \in J} L_{I_j}(Q_j).$$

L'ensemble  $\mathcal{Q}$  des probabilités ainsi obtenues est évidemment une partie bien remplie de  $\mathcal{P}$  (remarquons que tout élément de  $\mathcal{Q}$  est déduit de  $\mathcal{Q}'$  par brouillage); nous appellerons  $\mathcal{Q}$  la fermeture brouillée indépendante de  $\mathcal{Q}'$ .

*Exemple 1.* — Si tout élément de  $\mathcal{Q}'$  est un produit de probabilités sur  $\mathcal{X}$ , on retrouve la notion de « fermeture brouillée indépendante de Beck et Giesy ».

*Exemple 2.* — Considérons une urne d'effectif total  $N$  contenant des boules de  $k$  catégories distinctes  $a_1, \dots, a_k$ . Soit l'expérience suivante :

