

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

**Complément sur « le support des lois
indéfiniment divisibles »**

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, n° 3 (1977), p. 293-298

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_3_293_0

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Complément sur « le support des lois indéfiniment divisibles » (1)

par

A. TORTRAT

85, rue de Paris, 92190 Meudon

1. — Dans [1] est prouvé (comme sous-produit de « $\mu \sim \lambda$ mesure de Lebesgue ») que pour toute « mesure de Lévy » F dans \mathbb{R} , définissant la probabilité $\mu = e(F)$, (1) ci-après et l'absolue continuité de F (par rapport à la mesure de Lebesgue) implique pour le support S de la loi μ , $S = \mathbb{R}$:

$$(1) \quad \int_{|x| \leq 1} |x| dF = \infty .$$

Les méthodes (élémentaires) utilisées dans [2] pour les espaces vectoriels X de dimension infinie, suggèrent immédiatement que l'hypothèse d'absolue continuité de F est inutile pour l'affirmation $S = \mathbb{R}$:

LEMME. — Si (1) vaut, on a $S = \mathbb{R}$.

Preuve. — Il suffit de supposer F portée par $]0, \infty[$, puisque sinon la décomposition $F = F^+ + F^-$ donne $\mu = e(F^+)e(F^-)$ et que si $\mu^+ = e(F^+)$ a pour support \mathbb{R} , il en est ainsi de toute loi divisible par μ^+ ($e(F^+)$ désigne une définition, à une translation près, de cette loi, de même $e(F^-)$, $e(F)$). Or (1) implique que le support de F contient des points $a_i \downarrow 0$, tandis que, F_η désignant la restriction de F à $x > \eta$, μ peut être définie par

$$(2) \quad \mu = \lim e(F_{a_i}) * \delta(-c_{a_i}), \quad \text{avec} \quad c_{a_i} = \int_{a_i}^1 x dF .$$

(1) Voir [2].

Le support S_i des lois de (2) contient tous les points $na_i - c_{a_i}$ (n entier ≥ 0). Il est clair que tout x réel $\in \underline{\lim} S_i$, limite (lorsque $i \rightarrow \infty$) au sens topologique.

REMARQUE 1. — Dans \mathbb{R}^1 , la même proposition ne vaut plus. On peut prouver que S , quelle que soit F , est toujours (à une translation près) un demi-groupe pour l'addition, et en préciser la nature en fonction de F .

Si on suppose que, pour une certaine norme, F est décomposée sous la forme (3) ci-après, avec $\int_0^1 \rho dF_0 = \infty$, il nous paraît actuellement presque sûr que S égale E_0 , support linéaire commun à μ et F . Dans le cas où I (ou la dimension de E_0) égale 2 ou 3, il est aisé de s'en assurer, et ceci s'applique aux lois strictement stables d'exposant $p > 1$.

2. — Apportons quelques extensions et précisions aux théorèmes 2 et 3 de [2].

Rappelons que dans X espace de Banach séparable, où la norme est notée $|\cdot|$, nous supposons F décomposée sous la forme

$$(3) \quad F(d\tau \times d\rho) = \sigma(d\tau)F_0(d\rho), \quad \rho > 0, |\tau| = 1.$$

La translation dans la définition de $\mu = e(F)$, α -centrée, est $-c_\eta a$ avec

$$a = \int \tau \sigma(d\tau), \quad \text{et} \quad c_\eta = \int_\eta^\alpha \rho dF_0 \uparrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \eta \downarrow 0.$$

S_α désigne le support correspondant.

PROPOSITION 1. — (remplaçant i) du th. 2 de [2]).

i') Le support S_α est stable pour l'addition,

i'') Si F_0 est continu pour ρ assez petit (*), S_α est stable pour toutes les homothéties de rapport $t > 1$ (²).

Preuve. — Pour i') c'est, inchangée, celle de [2]. On note que la continuité de F_0 n'est pas nécessaire car les η peuvent être choisis de sorte que $2c_\eta = c_{\eta'}$, $\eta' < \eta$, pour une infinité $\downarrow 0$ de valeurs de η .

Pour i''), vu la stabilité de S_α pour l'addition, et suivant [2] p. 38, $x \in S_\alpha$ si et seulement si tout voisinage $U(x)$ coupe une infinité de S_{η_α} ($\eta \downarrow 0$) supports de $e(F_\eta) * \delta(-c_\eta a)$. C'est dire que $U(x)$ contient des points $\xi_\eta - c_\eta a$, avec $\xi_\eta \in \Sigma(F_\eta)$ demi-groupe engendré par le support de F , tronqué à $|x| \geq \eta$.

(*) La preuve qui suit est erronée (note sur épreuves), garder l'hypothèse rappelée à la note (²) et la preuve de [2].

(²) L'hypothèse de [2] est : F_0 a pour support $[0, \infty[$.

Si $c_i \downarrow 0$ désigne des points $\downarrow 0$ du support de F_0 , les $nc_i\xi_\eta \in \Sigma(F_\eta)$ avec ξ_η pour tout entier n et tout $c_i > \eta$. C'est dire que $t\xi_\eta - tc_\eta a = \xi_{\eta'} - c_{\eta'} a$ (avec $\eta' < \eta$ soit $t > 1$) et $\in tU(tx)$, pour tous ces $t = nc_i > 1$; cela pour une infinité $\downarrow 0$ de η' s'il en est ainsi de x avec U et η . S_α est bien stable pour toutes les homothéties de rapport $t > 1$.

COROLLAIRE. — Soit μ une loi strictement stable d'exposant $p > 1$. Si pour un borné B absolument convexe, la décomposition (3) (avec $|\tau| = p_B(\tau)$, $F_0(d\rho) = d\rho/\rho^{1+p}$) est telle que un ta , $t > 0$, appartient à S_σ (support de σ), alors $0 \in S$, donc S est un cône convexe. La preuve suit (suivant de Acosta) de ce que $tS + t'S' \subset S$, avec $t > 0, t' > 0$ et $t^p + t'^p = 1$. Alors S admet les homothéties de rapport $t \leq 2^{-1/p}$, si $0 \in S$.

REMARQUE 2. — Dans le théorème 2 de [2], il est implicite que $a = \int \tau\sigma(d\tau)$ est $\neq 0$. Mais cela n'est pas nécessaire pour les résultats $i')$ et $i'')$ ci-dessus (i) de [2], élargis ci-dessus). On peut en effet considérer σ' définie par $d\sigma'/d\sigma$ à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ de sorte que $\int \tau d\sigma'$ soit $\neq 0$, puis écrire $\sigma = \sigma' + \sigma''$. Les propriétés $i')$ et $i'')$ valent pour les supports S' et S'' relatifs à σ' et σ'' , donc valent aussi pour S support de la convolution correspondante.

Il en est de même pour la proposition 2 qui suit (extension du théorème 3 de [2]).

PROPOSITION 2. — Si dans les conditions de la proposition 1, le support S_σ de σ est « convexe » ⁽⁴⁾, alors, sans supposer F_0 continue pour ρ petit, S_α est le support linéaire topologique commun à μ et F ⁽³⁾ (que nous appelons X réduit).

Preuve. — On remarque que $\Sigma(F_\eta)$ contient, si τ et $\tau' \in S_\sigma$ (dans un même plan Π avec a), les points $nc_i\tau + n'c_i\tau'$ (avec $c_i > \eta$), donc après translation $-c_\eta a$ (avec a intérieur à l'angle — supposé saillant ou au plus plat, sinon $S_\sigma \cap \Pi$ entoure 0 et on reconstitue la situation précédente — des deux demi-droites 0τ et $0\tau'$) contient les sommets d'un réseau qui couvre le plan tout entier lorsque $c_\eta \uparrow \infty$, en même temps que la maille $\downarrow 0$. Il est clair que S_α fermeture de $\lim S_{\eta_n}$ (suivant la proposition 3 de [2]) contient l'espace vectoriel fermé engendré par S_σ , c'est le support linéaire topologique de F (contenant évidemment celui de μ). ■

⁽³⁾ L'hypothèse levée, p. r. à [2], est inchangée, voir la note ⁽²⁾.

⁽⁴⁾ Au sens de la surface $\{|x| = 1\}$, c'est-à-dire que le cône correspondant, de sommet 0 est convexe.

THÉORÈME 3'. — On suppose, X étant de Banach, et $F \in (3)$, que S_σ support de σ est une somme dénombrable de parties « convexes » fermées S_i (au sens de la proposition 2), de barycentres a_i ($i = 1, 2, \dots$), avec a_1 intérieur à S_1 (: au cône C_1 correspondant, au sens de la norme). Alors si les a_i sont topologiquement libres, et engendrent un vectoriel dense dans E_0 , $S_\mu = E_0$.

Preuve. — On a $a = \sum_1^\infty t_i \tau_i$, avec $\tau_i \in S_\sigma$ ($a_i = |a_i| \tau_i$). Puisque

$$\left| \sum_{I+1}^\infty t_i \tau_i \right| \xrightarrow{I \rightarrow \infty} 0,$$

On a, pour tout $I \geq I_0$,

$$(4) \quad a = t'_1 \tau'_1 + \sum_2^I t_i \tau_i, \quad \text{avec } \tau'_1 \in S_1 \subset S_\sigma.$$

Les t_i de (4) sont > 0 . t'_1 l'est également, t_1 l'étant, pour I assez grand.

Alors S contient les vectoriels E_I engendrés par $\{\tau'_1, \tau_2, \dots, \tau_I\}$, suivant le raisonnement du lemme du début, étendu à la dimension $I + 1$: l'essentiel de la question évoquée à la remarque 1 est que a , définissant les translations $-c_\eta a$ (avec $c_\eta \uparrow \infty$), ait des coordonnées > 0 suivant un système de points indépendants de S_σ . Ici l'indépendance topologique des a_i implique l'indépendance linéaire de $\tau'_1, \tau_1, \dots, \tau_I$.

REMARQUE 3. — Au corollaire 2 du théorème 3 de [2], il faut entendre *ii*) (qui n'a pas de sens tel qu'exprimé) ainsi : posant

$$a_\eta = |a_\eta| \tau_\eta \quad \text{et} \quad \tau_\eta = b_\eta \tau + b'_\eta \tau'_1,$$

on a $\overline{\lim} b_\eta > 0$.

Cela assure que chaque droite Λ_τ est dans S_μ . Mais pour assurer $S_\mu = E_0$: prouver S_μ additif, il faudra raisonner comme au th. 3. B, et pour cela supposer $\underline{\lim} b_\eta > 0$ (: assurer simultanément pour τ et τ_1 de S_σ , et les nombres $b_\eta, b_{1\eta}$ des bornes inférieures > 0 pour une même suite $\eta_n \downarrow 0$).

REMARQUE 4. — Dans le cas « sans translation » de définition de $e(F)$, l'hypothèse (11) de (2), qu'il faut lire : $e(\tilde{F}_{\eta\mu}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \tilde{\mu}_\mu$, est toujours satisfaite si les semi-normes p_μ sont intégrables pour F , au voisinage de 0 ; pour X de Banach c'est dire que $\int_{|x| \leq 1} |x| dF$ est fini, donc que les translations $a_{\eta x}$

convergent lorsque $\eta \rightarrow 0$, vers $\int_{|x| \leq \alpha} x dF$. En effet, suivant le résultat (8) (de Yurinskii), on voit que la formule (10) de [2]

$$(10) \quad \text{Log } \hat{\mu}(y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{|x| > \eta} (e^{iy(x)} - 1) dF$$

exprime la convergence équitendue des lois $e(F_{\eta\infty})$, i. e. (11). Cependant cette condition peut n'être pas satisfaite et avoir lieu avec la norme $|x|_K$ relative à un compact fort K , puisqu'on pourra choisir F (bornée), arbitrairement dans $\{x : 1 < |x|_K, |x| \leq 1\}$. La bonne signification de (10) est alors encore assurée, comme prouvée dans (2) (proposition 5). Il paraît ainsi légitime d'envisager l'une ou l'autre de ces hypothèses, dont aucune n'entraîne l'autre, pour affirmer cette convergence équitendue permettant, dans le cas sans translation d'étudier S_μ . De même la condition $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 dF$ n'est pas nécessaire (dans le cas « avec translations »), même dans le cas cité à la note 3 page 31 de (2), où cela a été écrit à tort.

REMARQUE 5. — La décomposition (3) étudiée dans [3] pour les lois μ strictement stables, suppose, pour être correcte, que la boule B (cf. le corollaire ci-dessus) est, ou est choisie (s'il se peut) « séparable pour sa norme ». Du moins cette condition nous assure que la décomposition de $E_B = \cup_n B$ suivant $x \rightarrow \tau \times p_B(x)$ est mesurable (*) pour la tribu trace sur E_B de la tribu cylindrique \mathcal{C} de X (cf. le th. 2 de [3]), car elle l'est pour la tribu borélienne de E_B qui coïncide avec cette trace.

Lorsque (X, \mathcal{C}) est métrisable, de tels B (avec $\mu B > 0$) existent toujours, mais leur choix est restreint par cette condition de séparabilité. De même pour X de Banach, cela limite *a priori* à « p_B équivalente à la norme de X », i. e. au choix naturel de la boule unité de X . Cela limite aussi la portée du th. 4 de [3] et du th. 1 de [2] : le cas où l'on doit envisager la boule B \mathcal{C} -compacte. Cependant pour μ strictement stable (cas de ces deux théorèmes), et (X, \mathcal{C}) de Banach, ces théorèmes valent avec la boule unité de X , suivant l'argument de la remarque 5 ci-dessus, qui vaut aussi pour le cas $p > 1$ (car $\int_{\alpha < |x|} x dF$ existe) : en ce cas les translations de Yurinskii fournissent le meilleur résultat. Et cela suffit dans la présente étude du support S de μ .

(*) Nous devons cette question pertinente à Mlle S. Chevet et l'en remercions.

REMARQUE 6. — Dans l'introduction de [2], page 28 (lignes 10-12) il faut lire « Savoir les S_U convexes, par exemple μ convexe sur \mathcal{C} » au lieu de « Savoir S convexe », et « ii) μ a une concentration scalaire > 0 sur S , ou est non vide, alors $\mu^*E' = 1$ ». La preuve suit de (6), du lemme 1 et des méthodes des réf. [6] et [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. N. HUDSON and H. G. TUCKER, Equivalence of infinitely divisible distributions, *Ann. of Probability*, t. 3, 1975, p. 70-79.
- [2] A. TORTRAT, Sur le support des lois indéfiniment divisibles dans les espaces vectoriels localement convexes. *Ann. Inst. Henri Poincaré XIII*, t. 1, 1977, p. 27-43.
- [3] A. TORTRAT, Lois $e(\lambda)$ dans les espaces vectoriels et lois stables. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 37, 1976, p. 175-182.

(Manuscrit reçu le 10 mai 1977)