ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PAOLO BALDI

Sur la transience du groupe des déplacements de l'espace

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 3 (1976), p. 285-290
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_3_285_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 3, 1976, p. 285-290. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur la transience du groupe des déplacements de l'espace

par

Paolo BALDI
Istituto di Matematica « L. Tonelli »
Via Derna, 56100, Pisa (Italie)

ABSTRACT. — The problem of the transience of the group of the motions of the euclidean space is raised and solved for a class of probability measures.

Representation theory and Fourier transform are the technical framework.

Le problème d'établir que le groupe des déplacements de l'espace G est transient a pris une importance particulière puisque Y. Guivarc'h, M. Keane, B. Roynette [*1*] ont montré que pour vérifier la conjecture de Kesten (un groupe est récurrent si et seulement si il est de croissance polynominale d'ordre 2) pour tout groupe de Lie connexe il suffit de montrer la transience du groupe des déplacements de l'espace et du groupe « diamant », produit semi-direct du tore à une dimension et du groupe de Heisenberg d'ordre 3.

Dans cet article on montre que toute marche aléatoire sur G est transiente si μ satisfait à la condition (3) qui est en particulier vérifiée par une classe de fonctions qui a été déjà envisagée par une autre méthode dans (1) et qui contient toute probabilité μ étalée. Le problème de voir si toute mesure μ apériodique satisfait à (3) reste ouvert.

Dans la suite G sera le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$. Ses éléments seront du type :

$$g = (x(g), u(g))$$

où $x(g) \in \mathbb{R}^3$, $u(g) \in SO(3)$ avec l'opération

$$(x, u)(x', u') = (x + u \circ x', uu')$$

où $u \circ x'$ est le point de $\mathbb{R}^3$ où x' est déplacé par la rotation u. On désignera par e l'élément neutre de G.

Soit $L^2(S, \sigma)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur la surface S de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ avec la mesure bidimensionnelle normalisée σ. Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ on peut définir une représentation unitaire de G sur $L^2(S, \sigma)$ en posant :

$$T_g^r \phi(\xi) = e^{ir(\xi, x(g))} \phi(u(g)^{-1}\xi)$$

où $\phi \in L^2(S, \sigma)$, $\xi \in S$

Si μ est une mesure finie sur G posons

$$T_\mu^r = \int T_g^r \mu(dg)$$

et de la façon habituelle on définira T_f^r si $f \in L^1(G)$. Il est facile et classique de voir que :

1. $$\| T_\mu^r \| \leq \mu(G)$$
2. $$T_{\mu * \nu}^r = T_\mu^r T_\nu^r$$

Dans la suite si λ est une mesure et f une fonction on désignera par $\lambda(f)$ l'intégrale de f par rapport à λ.

Soit maintenant $f \in L^1(G)$ et invariante par rotations, c'est-à-dire telle qu'il existe $f' \in L^1(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant à

$$f(g) = f'(x(g)) \tag{1}$$

alors si $dg = dx\, du$ est la mesure de Haar de G on a

$$T_f^r \phi(\xi) = \int e^{ir(\xi, x)} \phi(u^{-1}\xi) f'(x) dx\, du = \hat{f}'(r\xi)\sigma(\phi) \tag{2}$$

où $\hat{f}'$ est la transformée de Fourier habituelle sur $\mathbb{R}^3$.

La proposition suivante est une forme très simple de la formule de Plancherel.

PROPOSITION 1. — Si $f \in L^1(G)$ vérifie (1) et $\hat{f}'$ est intégrable on a :

$$f(e) = f'(o) = \omega_2 \int_0^\infty \sigma(T_f^r 1) r^2 dr$$

où ω_2 est la mesure de la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. — (2) nous donne $T_f^r 1(\xi) = \hat{f}'(r\xi)$ et par le théorème d'inversion

$$f(e) = f'(o) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}'(y)dy = \omega_2 \int_0^\infty r^2 dr \int_S f'(r\xi)\sigma(d\xi) = \omega_2 \int_0^\infty r^2 \sigma(T_f^r 1)dr .$$

Soit maintenant μ une loi de probabilité apériodique sur G, c'est-à-dire telle que son support ne soit contenu dans aucun sous-groupe fermé propre de G. Pour montrer que la marche de loi μ est transiente il suffit que pour une fonction positive sur un ouvert on ait :

$$\Sigma \mu^{*n} * f(e) < +\infty$$

Choisissons une fonction f positive intégrable de la forme (1) et telle que en plus $\hat{f}'$ soit à support compact. Il est facile de vérifier que pour tout $0 < \lambda < 1$, on peut appliquer la proposition 1 à la fonction :

$$\sum_0^\infty \lambda^n \mu^{*n} * f(g)$$

et en tirer :

$$\sum_0^\infty \lambda^n \mu^{*n} * f(e) = \omega_2 \int_0^\infty \sigma\left(\sum_0^\infty \lambda^n T_\mu^{rn} T_f^r 1\right) r^2 dr = \omega_2 \int_0^\infty \sigma((I - \lambda T_\mu^r)^{-1} T_f^r 1) r^2 dr$$

Et, comme (2) nous montre que pour r assez grand T_f^r est nul, $\hat{f}'$ étant à support compact, on aurait donc la transience s'il existait $c > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda < 1$.

$$\sigma((I - \lambda T_\mu^r)^{-1} T_f^r 1) \leq \frac{c}{r^2} \tag{3}$$

On n'est pas en mesure de dire ici si la condition (3) est satisfaite pour toute mesure μ apériodique ou non ; une classe importante de mesures pour lesquelles μ est vérifiée est donnée par la définition suivante.

DÉFINITION 2 (condition (C)). — On dira que μ satisfait à la condition (C) si sa désintégration

$$d\mu(x, u) = d\mu_u(x) d\bar{\mu}(\dot{u})$$

où $\bar{\mu}$ est la loi marginale de μ sur SO(3) et μ_u une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^3$, est telle que pour u dans un ensemble de $\bar{\mu}$-mesure positive μ_u n'est pas portée par un plan de $\mathbb{R}^3$.

Remarquons que le fait que μ_u n'est pas portée par un plan entraîne que pour θ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$ il existe $c_u > 0$ tel que :

$$1 - |\hat{\mu}_u(\theta)| \geq c_u |\theta|^2 \tag{4}$$

La condition (C) entraîne donc que (4) est vrai pour tout $u \in SO(3)$ avec $c_u > 0$ sur un ensemble de $\bar{\mu}$-mesure positive.

La transience de toute loi de probabilité satisfaisant à la condition (c) résulte de la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — Si μ satisfait à la condition (C) il existe $c > 0$ telle que pour tout $\theta \in L$, $|\theta| \leq 1$

$$\|(I - \theta T_\mu^r)^{-1}\| \leq \frac{c}{r^2}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'il existe $c' > 0$ telle que pour toute $\phi \in L^2(S, \sigma)$

$$\|(I - \theta T_\mu^r)\phi\|_2 \geq c' r^2 \|\phi\|_2$$

On a

$$\begin{aligned}
\|(I - \theta T_\mu^r)\phi\|_2 &\geq \|\phi\|_2 - |\theta| \|T_\mu^2 \phi\|_2 \\
&\geq \|\phi\|_2 - \left\| \int e^{ir(\xi, x(g))} \phi(u(g)^{-1}\xi)\mu(dg) \right\|_2 \\
&= \|\phi\|_2 - \left\| \int e^{ir(\xi, x)} \phi(u^{-1}\xi)\mu_u(dx)\bar{\mu}(du) \right\|_2 \\
&= \|\phi\|_2 - \left\| \int \hat{\mu}_u(r\xi)\phi(u^{-1}\xi)\bar{\mu}(du) \right\|_2
\end{aligned}$$

mais d'après (4) $\sup\limits_{\xi \in S} |\hat{\mu}_u(r\xi)| \leq 1 - c_u r^2$ et donc :

$$\|(I - \theta T_\mu^r)\phi\|_2 \geq \|\phi\|_2 - \left(1 - \int c_u \bar{\mu}(du)\right) \|\phi\|_2 = \int c_u \bar{\mu}(du) \|\phi\|_2$$

et grâce à l'hypothèse (C) $\int c_u \bar{\mu}(du) > 0$

REMARQUE 1. — La marche de loi μ est transiente si et seulement si $\nu = \sum_0^\infty \frac{\mu^n}{2^{n+1}}$ l'est et μ et ν ont le même renouvellement. On peut donc affaiblir l'hypothèse du théorème en demandant qu'il existe $n \in N$ tel que μ^{*n} satisfasse à la condition (C).

REMARQUE 2. — Toute mesure μ qui ne soit pas singulière par rapport à la mesure de Haar de G satisfait à la condition (C), donc, en tenant compte de la remarque 1, la proposition 3 établit que toute probabilité μ étalée sur G est transiente.

PROPOSITION 4. — Si μ satisfait à la condition (C) alors pour toute $f \in \mathscr{C}_K^+(G)$ on a :

$$\lim_{g \to \Delta} \sum_0^\infty \mu^{*n} * f(g) = 0$$

où l'on désigne par Δ le point à l'infini de la compactification d'Alexandroff de G.

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour les fonctions f de la forme (1) et avec $\hat{f}'$ à support compact, comme il est facile de voir que toute fonction de $\mathscr{C}_K^+(G)$ peut être majorée par une fonction de ce type. Le reste du procédé est classique :

$$\sum_0^\infty \mu^{*n} * f = \sum_0^{N-1} \mu^{*n} * f + \sum_N^\infty \mu^{*n} * f$$

et comme le premier terme à droite est nul à l'infini il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tout $g \in G$

$$\left| \sum_N^\infty \mu^{*n} * f(g) \right| \leq \varepsilon$$

On a d'abord

$$\sum_N^\infty \mu^{*n} * f(g) \leq \omega_2 \int_0^\infty \| T_\mu^{r^N} \| \, \| (I - T_\mu^r)^{-1} \| \, \| T_f^r \| r^2 dr \tag{5}$$

En effet la proposition 1 nous donne (5) pour $g = e$; mais si on désigne par f_g la translatée de f par g : $f_g(h) = f(hg)$ on a :

$$\sum_N^\infty \mu^{*n} * f(g) = \sum_N^\infty \mu^{*n} * f_g(o)$$

et il est facile de vérifier par (2) que $\| T_{f_g}^r \| = \| T_f^r \|$ et donc (3) est vérifiée pour tout $g \in G$. La proposition 3 montre que pour tout $r > 0$ le rayon spectral est plus petit que 1 et donc si $r > 0$

$$\lim_{N \to \infty} \| T_\mu^{r^N} \| = 0$$

et on peut conclure par le théorème de Lebesgue.

REMARQUE 3. — D'après la remarque 1 on peut affaiblir les hypothèses de la proposition 5 en demandant qu'il existe n tel que μ^{*n} satisfasse à la condition (C).

En conclusion

PROPOSITION 6. — S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que μ^{*n} satisfasse à la condition (C), μ est transiente et son potentiel est nul à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE, *Marches aléatoires et structure des groupes de Lie. (à paraître).*

[2] H. KESTEN, *The Martin Boundary of recurrent random walks on cointable groups.* Fifth Berkeley Symposium, Vol. II part. 2.

(Manuscrit reçu le 11 juin 1976)