ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. GAVEAU

# Désintégration des fonctionnelles de Markov

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 11, n° 4 (1975), p. 317-324

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_4_317_0>

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section B :
Vol. XI, n° 4, 1975, p. 317-324. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Désintégration des fonctionnelles de Markov

par

**B. GAVEAU**

Université des Sciences et Techniques de Lille I.
U. E. R. de Mathématiques pures et appliquées

## INTRODUCTION

Soit M une variété riemannienne, $ds^2$ sa métrique, $\Delta$ son laplacien, U ouvert borné de M, $u : \mathrm{U} \to [0, \alpha_0[\ (\alpha_0 < +\infty)$ une fonction d'exhaustion de classe $\mathrm{C}^2$ sur U (au sens où pour $\alpha < \alpha_0$, $u^{-1}([0, \alpha])$ est compact dans U). On supposera que $\Delta u$ et $\|\nabla u\|$ sont bornés dans U ( $\|\nabla u\|$ dénote la longueur du gradient dans la métrique duale). Soit $\Psi : \mathrm{U} \to \mathrm{R}$ fonction mesurable et sa fonctionnelle associée $\int_0^{t \wedge \zeta} \Psi(\mathrm{X}_s)ds$ où $(\mathrm{X}_s)_s$ est le brownien de M stoppé au temps de sortie $\zeta$ de U, dont le générateur est $\frac{1}{2}\Delta$.

Le but de ce travail est d'écrire cette fonctionnelle — qui est *a priori* une intégrale de temps de séjour — comme une intégrale sur l'espace des valeurs de $u$ en désintégrant le processus $(\mathrm{X}_s)$ par une famille continue de processus du type de Cauchy sur les surfaces de niveau de U.

Lorsque $\mathrm{U} = \mathbb{R}$, $u(x) = x$ et $\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\psi(x)\frac{d^2}{dx^2}$, ce problème est résolu dans le livre de Itô MacKean [*1*] par la formule

$$\int_0^t \Psi(\mathrm{X}_s)ds = \int_{\mathbb{R}} \tau(t, x)\Psi(x)m(dx)$$

où $\tau(t, x)$ est le temps local passé en $x$ jusqu'à l'instant $t$ par la diffusion $(X_s)_s$ et $dm(x)$ est la mesure de vitesse de $(X_s)_s$. Dans le cas général, la formule fait intervenir des processus du type Cauchy sur les surfaces de niveau de $u$ (voir ③).

On calcule d'abord le temps local associé à la fonction d'exhaustion $u$ en utilisant la méthode de MacKean exposée dans [*2*] ; ce temps local diffère des temps locaux introduits par Blumenthal et Getoor dans [*3*]. Au ③ est énoncée et démontrée la formule de désintégration.

## I. TEMPS LOCAL ASSOCIÉ A UNE FONCTION D'EXHAUSTION

On utilisera les notations de l'introduction. On va démontrer, en utilisant la méthode MacKean ([*2*], p. 68).

THÉORÈME 1.

1) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ *la limite suivante existe*

$$\tau(\alpha, t \wedge \zeta) = \lim_{\beta \to \alpha} \frac{\displaystyle\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha\beta[}(u(X_s)) \, || \nabla u(X_s) ||^2 ds}{2(\beta - \alpha)}$$

*où* $|| \nabla u ||^2$ *est le carré de la longueur du gradient de u calculé dans la métrique duale.*

2) $\tau(\alpha, t \wedge \zeta)$ *est une fonctionnelle additive de* $(X_s)_s$, *croissante en t, et le support de la mesure (positive)* $\tau(\alpha, dt)$ *est contenu dans* $\{ t / u(X_t) = \alpha \}$, *et est presque sûrement continue en* $\alpha$.

3) $\tau(\alpha, t \wedge \zeta)$ *a l'expression intégrale stochastique suivante : pour tout* $\alpha < \alpha_0$, *presque sûrement, pour tout t, on a*

$$\tau(\alpha, t \wedge \zeta) = \operatorname{Inf}(\alpha - u(X_0), 0) + \sup(u(X_{t \wedge \zeta}) - \alpha, 0) - \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(u(X_s)) d(u(X_s))$$

*Preuve.* — Comme dans [*2*] on fait apparaître la quantité

$$\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(u(X_s)) \, || \nabla u(X_s) ||^2 ds$$

en posant

$$A(x) = \int_{u(b_0)}^{x} dy \int_{-\infty}^{y} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(z) dz$$

et en développant $A(u(X_t))$ par la formule de Itô : il vient

$$A(u(X_{t\wedge\zeta})) = \int_0^{t\wedge\zeta} d(u(X_s)) \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(y)dy + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(u(X_s))(d(u(X_s)))^2$$

Mais il existe un brownien euclidien standard $b_s$ tel que

$$d(u(X_s)) = \vec{\nabla}u(X_s).\sigma(d\vec{b}_s) + \frac{1}{2}(\Delta u)(X_s)ds$$

où $\sigma$ est l'endomorphisme dont la matrice est la racine carrée symétrique positive de la matrice inverse $(g^{ij})_{ij}$ de la métrique riemannienne et où le $\cdot$ est le produit scalaire. D'où on a $(d(u(X_s)))^2 = \|\vec{\nabla}u(X_s)\|^2ds$ et par suite on déduit

$$(1)\quad \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(u(X_s))\|\nabla u(X_s)\|^2ds = A(u(X_{t\wedge\zeta})) - \int_0^{t\wedge\zeta} d(u(X_s)) \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(y)dy$$

Calculons l'intégrale dans le membre de droite de (1) : presque sûrement, pour $n$ grand, on a par une approximation en sommes de Riemann

$$\int_0^{t\wedge\zeta} ds \left| \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(y)dy - \sum_{\alpha\leqslant\frac{k}{2^n}<\beta} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n},+\infty\right[}(u(X_s))2^{-n}\right|^2 \leqslant \frac{C}{2^n}.$$

Comme on suppose $\Delta u$ borné, on a

$$(2)\quad \int_0^{t\wedge\zeta} (\Delta u)(X_s)ds \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\leqslant\frac{k}{2^n}<\beta} \frac{1}{2^n}\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n},+\infty\right[}(u(X_s))(\Delta u)(X_s)ds.$$

De même puisque $\|\nabla u\|$ est borné, on a presque sûrement convergence des intégrales stochastiques (par construction même voir [*2*])

$$(3)\quad \int_0^{t\wedge\zeta} (\vec{\nabla}u)(X_s).\sigma(db_s) \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(y)dy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\alpha\leqslant\frac{k}{2^n}<\beta} \frac{1}{2^n}\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n},+\infty\right[}(u(X_s)).(\vec{\nabla}u)(X_s).\sigma(d\vec{b}_s)$$

d'où

$$(4)\quad \int_0^{t\wedge\zeta} d(u(X_s)) \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(y)dy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\alpha\leqslant\frac{k}{2^n}<\beta} \frac{1}{2^n}\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n},+\infty\right[}(u(X_s))d(u(X_s)) .$$

Introduisons

$$j_t(x) = \int_0^t \mathbb{1}_{[x,+\infty[}(u(X_s))d(u(X_s))$$

$$j_t^*(x) = \lim_{\frac{k}{2^n}\downarrow x} \inf j_t\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

en vue d'avoir une version continue de $j_t(x)$ par le lemme suivant :

LEMME 1. — *Presque sûrement $x \to j_t^*(x)$ est continu et pour tout $x\in\mathbb{R}$, presque sûrement (dépendant de $x$), on a $j_t(x) = j_t^*(x)$.*

Admettant ce lemme pour un moment, on déduit donc que pour tout $t$ presque sûrement, pour tout $k$, $n$ entiers, on a

$$\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n},+\infty\right[}(u(X_s))d(u(X_s)) = j_t^*\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

et par suite (4) devient, puisque $j_t^*$ est continu presque sûrement, pour tout $\alpha$, $\beta$ :

$$(5)\quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{\alpha\leqslant\frac{k}{2^n}<\beta} 2^{-n}j_t^*\left(\frac{k}{2^n}\right) = \int_\alpha^\beta j_t^*(x)dx .$$

Utilisant, alors (1), (4), (5), on déduit que pour tout $t$, presque sûrement, pour tout $\alpha$, $\beta$ on a

$$(6)\quad \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(u(X_s))\,||\,\nabla u(X_s)\,||^2 ds = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{u(X_s)}^{u(X_{t\wedge\zeta})} dy \int_{-\infty}^{y} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(z)dz - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta j_t^*(x)dx .$$

*a*) Comme $j_t^*$ est continu, $\dfrac{1}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta j_t^*(x)dx \to j_t^*(\alpha)$ si $\beta\to\alpha$.

*b*) Si $\alpha < u(X_t)$ et $\alpha < u(X_s)$, pour $\beta-\alpha$ petit, $\alpha < \beta < u(X_t)$ et $u(X_s)$, d'où la première intégrale du membre de droite de (6) tend vers $u(X_{t\wedge\zeta}) - u(X_s)$ c'est-à-dire bien vers

$$\sup\,(u(X_{t\wedge\zeta}) - \alpha, 0) + \operatorname{Inf}\,(\alpha - u(X_0), 0)$$

Si $u(X_0) < \alpha < u(X_{t\wedge\zeta})$, on a de même une limite égale à

$$u(X_{t\wedge\zeta}) - \alpha = \sup(u(X_{t\wedge\zeta}) - \alpha, 0) + \operatorname{Inf}(\alpha - u(X_0), 0)$$

et de même dans les deux autres cas.

Par conséquent le membre de gauche de (6) a une limite si $\beta \to \alpha$ et pour tout $t$, presque sûrement pour tout $\alpha$ on a

$$(7) \qquad \tau(t, \alpha) = \sup(u(X_{t\wedge\zeta}) - \alpha), 0) + \operatorname{Inf}(\alpha - u(X_0), 0) - j_t^*(\alpha)$$

d'où par le lemme 1, pour tout $t$, pour tout $\alpha$, presque sûrement la même formule avec $j_t(\alpha)$ ou bien $j_t^*(\alpha)$. D'où cela a lieu pour tout $\alpha$, p. s., pour tout $t$ dyadique. Comme $\tau(t, \alpha)$ croît en $t$ et que $j_t(\alpha)$ et $u(X_{t\wedge\zeta})$ sont continus p. s. en $t$, on a finalement, pour tout $\alpha$, p. s., pour tout $t$,

$$\tau(t, \alpha) = \sup(u(X_{t\wedge\zeta}) - \alpha, 0) + \operatorname{Inf}(\alpha - u(X_0), 0) - \int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(u(X_s))d(u(X_s)).$$

Ceci montre ③ du théorème et la formule (7) démontre le ① avec un p. s. indépendant de $t$ et $\alpha$.

*Preuve du lemme 1.* — Elle se fait de la même façon que dans MacKean ([*2*], p. 16) en utilisant un lemme dû à Kolmogoroff : il suffit de voir que

$$E(|j_t(x) - j_t(y)|^4) \leqslant C|x - y|^2$$

Or

$$E(|j_t(x) - j_t(y)|^4) = E\left(\left|\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[x,y]}(u(X_s))d(u(X_s))\right|^4\right)$$
$$\leqslant CE\left(\left|\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[x,y]}(u(X_s))\vec{\nabla}u(X_s).\sigma(d\vec{b}_s)\right|^4\right)$$
$$+ C'E\left(\left|\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[x,y]}(u(X_s))ds\right|^4\right)$$

car $\Delta u$ est bornée. Or l'espérance de la puissance 4*ième* de l'intégrale stochastique $x$ est contrôlée par

$$CE\left(\left|\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[x,y]}(u(X_s))ds\right|^2\right)$$

car $\|\nabla u\|$ est borné et donc $E(|j_t(x) - j_t(y)|^4)$ se contrôle par l'espérance de la puissance 2 ou 4 du temps de séjour de $X_s$ dans $u^{-1}([x, y])$ ce qui se contrôle par la puissance 2 ou 4 du volume de $u^{-1}([x, y])$ c'est-à-dire puisque U est ouvert borné de M par $|x - y|^2$ ou $|x - y|^4$.

FIN DU THÉORÈME 1.

① posant $\psi_t = \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(u(X_s)) \| \nabla u(X_s) \|^2 ds$ si on a $s < t < \zeta$, on a facilement

$$\psi_t = \psi_s + \psi_{t-s} \circ \theta_s$$

donc $\psi_t$ est fonctionnelle de Markov et $\tau(t, \alpha)$ aussi.

② Supposons que $u(X_t) \neq \alpha$ et soit $t_1 < t < t_2$ avec $\alpha \notin [u(X_{t_1}), u(X_{t_2})]$. Alors $\int_{t_1}^{t_2} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(u(X_s)) \| \nabla u(X_s) \|^2 ds = 0$ si $\beta$ est assez petit ; donc $\tau(t_1, \alpha) = \tau(t_2, \alpha)$. La formule (7) et la continuité p. s. de $j_t^*(\alpha)$ montrent que $\alpha \to \tau(t, \alpha)$ est continu.

## II. COMPARAISON AVEC D'AUTRES NOTIONS DE TEMPS LOCAL

*a*) Dans [*3*], Blumenthal et Getoor introduisent une notion générale de temps local de la façon suivante : posons $A_t = t \wedge \zeta$ qui est trivialement une fonctionnelle additive. Soit E un borélien, par exemple de capacité $> 0$ et finement fermé. Le temps local de E au sens de Blumenthal et Getoor est la balayée de $A_t$ sur E, i. e. *la* fonctionnelle de Markov qui satisfait

$$E_x\left( \int_0^{+\infty} dB_t^E \right) = E_x(E_{X_{T_E}}(\zeta))$$

où $T_E$ le premier temps de rencontre de E (de façon plus générale si $(A_t)_t$ est fonctionnelle additive et si $u_A(x) = E_x(A_\infty)$ est son potentiel, si D est $u$ un borélien et si $v(X) = E_x(u_A(X_{T_D}))$, alors $v$ est le potentiel d'une fonctionnelle *unique* B).

Dans le cas présent, on a supp $B_t^E = E$.

*Cependant, cette fonctionnelle* $B_t^E$ *ne coïncide pas en général avec le temps local* $\tau(t, \alpha)$ *si* $E = u^{-1}(\alpha)$ *est la surface de niveau de u.*

Prenons par exemple le disque unité de $\mathbb{C}$, $\Delta$, le brownien standard stoppé au temps de sortie $T_\Delta$ et utilisons comme fonction d'exhaustion $u(x) = E_x(T_\Delta)$ de sorte que $\frac{1}{2}\Delta u = -1$, d'où

$$u(z) = 2(\Phi(1) - \Phi(|z|))$$

où $\Phi(\rho) = \int_0^\rho \frac{ds}{s} \int_0^s u du = \frac{1}{4}\rho^2$ et donc

$$u(z) = \frac{1}{2}(1 - |z|^2)$$

Prenons $E_r = u^{-1}(r)$ : $E_r$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{1-2r}$.
D'après [3], on aurait partant de O,

$$E_0(B_{T_\Delta}^{E_r}) = rE_0(T_{E_r} \leqslant T_\Delta) = r$$

Calculons alors $E_0(\tau(T_\Delta, r))$ : posons $Y_s = u(b_s)$ c'est la diffusion sur $\mathbb{R}$ solution de $dY_s = \sqrt{1-2Y_s}d\tilde{b}_s - ds$ où $\tilde{b}_s$ est brownien sur $\mathbb{R}$.

Notons $\tilde{E}$ l'espérance pour $Y_s$ on a

$$E_0(\tau(T_\Delta, r)) = \tilde{E}_{\frac{1}{2}}(\tau(T_0, r)) = s(0) - s(r)$$

où $s(y) = \frac{1}{2}\log(1-2y)^{-1}$ est l'échelle de l'opérateur $\frac{1}{2}(1-2y)\frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy}$ (voir [1]),

*b*) Soit $dX_s = \psi(X_s)db_s$ un brownien changé de temps sur R de générateur $\frac{1}{2}\psi^2(x)\frac{d^2}{dx^2}$ et prenons $u(x) = x$, alors $\|\nabla u\|^2 = \psi^2(x)$ et on a alors le théorème 1

$$\tau_\psi(t, \alpha) = \lim \frac{\left(\int_0^{t\wedge\zeta} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(X_s)ds\right)}{2(\beta-\alpha)}\psi^2(\alpha)$$

puisque $\psi$ est continue.

Mais $\frac{dx}{\psi^2(x)} = dm(x)$ est précisément la mesure de *vitesse* du processus $(X_s)_s$ au sens de [1] et par suite *le temps local* $\tau_\psi(t, \alpha)$ *est exactement le temps local naturel défini par Itô et MacKean* pour une diffusion linéaire qui est un brownien changé de temps (voir [1]) ; d'autre part il est immédiat de montrer la formule

$$\tau_\psi(t, \alpha) = \tilde{\tau}_1(\theta(t), \alpha)$$

ou ici on a posé $X_s(\omega) = \tilde{b}_{\theta(s)}(\tilde{\omega})$ avec $\omega \to \tilde{\omega}$ conservant la probabilité, $b$ un brownien standard $\tilde{\omega}$ et $\theta_t = \int_0^t \psi^2(X_s)ds$ et $\tilde{\tau}_1$ est le temps local du brownien standard $\tilde{b}$ : en effet

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[\alpha,\alpha+\varepsilon[}(X_s)ds = \int_0^t \mathbb{1}_{[\alpha,\alpha+\varepsilon[}(b_{(s)})ds = \int_0^{\theta(t)} \mathbb{1}_{[\alpha,\alpha+\varepsilon[}(\tilde{b}(u))d(\theta_u^{-1})$$

$$= \int_0^{\theta(t)} \mathbb{1}_{[\alpha,\alpha+\varepsilon[}(\tilde{b}(u))\frac{du}{\psi^2(X_{\theta_u^{-1}})} \simeq \frac{2\varepsilon}{\psi^2(\alpha)}\tilde{\tau}_1(\theta_t, \alpha)$$

si $\varepsilon \to 0$ puisque le support de $\tilde{\tau}_1(t, \alpha)$ est $\{\alpha\}$ et que $X_{\theta_u^{-1}} = \tilde{b}_u$.

## III. DÉSINTÉGRATION DES FONCTIONNELLES DE MARKOV

Reprenons les notations du ① et soit $\tau_\alpha^{-1}(s)$ l'inverse contenu à droite de la fonction croissante $s \to \tau(\alpha, s)$. Posons $Y_s^{(\alpha)} = X_{\tau_\alpha^{-1}(s)}$.

THÉORÈME 2.

① $Y_s^{(\alpha)}$ *est un processus de Markov à trajectoires continues à droite, ayant des limites à gauche* tel que $Y_s^{(\alpha)} \in u^{-1}(\alpha)$ $\forall s$.

② *pour toute fonction mesurable* $\Psi$, *on a*

$$\int_0^{t \wedge \zeta} \Psi(X_s)ds = 2 \int_0^{\alpha_0} d\alpha \int_0^{\tau_\alpha^{-1}(t \wedge \zeta)} \frac{\Psi(Y_s^{(\alpha)})}{\|\nabla u\|^2(Y_s^{(\alpha)})} ds \tag{8}$$

*Preuve.* — On a par la définition du théorème 1

$$2\tau(\alpha, ds) \otimes d\alpha = \{ u(X_s) \in d\alpha \} \|\nabla u\|^2(X_s)ds \tag{9}$$

Posant $\psi(x) = \dfrac{\Psi(x)}{\|\nabla u\|^2}$ et intégrant d'abord en $s$ la relation (9) multipliée par $\psi(X_s)$ puis ensuite en $\alpha$, on a que

$$\int_0^{t \wedge \zeta} \Psi(X_s)ds = \int_0^{\alpha_0} d\alpha \int_0^{t \wedge \zeta} \frac{\psi(X_s)}{\|\nabla u(X_s)\|^2} \tau(\alpha, ds).$$

Posant $s = \tau_\alpha^{-1}(u)$, on a alors la formule (8).

La première partie du théorème 2 résulte de la continuité de $X_s$, du fait que $\tau$ est fonctionnelle de Markov à support dans $u^{-1}(\alpha)$.

## REFERENCES


[1] K. ITO and H. P. MACKEAN, Jr, *Diffusion processes and their sample paths*. Springer Verlag, 1965.

[2] H. P. MACKEAN, Jr, *Stochastic integrals*. Academic Press, 1969.

[3] R. BLUMENTHAL and R. GETOOR, *Markov processes and Potential theory*. Academic Press, 1968.


*(Manuscrit reçu le 30 juin 1975)*