

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CLAUDE KIPNIS

Majoration des semi-groupes de contractions de L^1 et applications

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 4 (1974), p. 369-384

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_4_369_0

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Majoration des semi-groupes de contractions de L^1 et applications

par

Claude KIPNIS

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes, 75230 Paris Cedex 05

ABSTRACT. — In order to deduce from the positive case, maximal ergodic lemmas in the non positive case, we study the existence of a dominating positive semi-group. Namely we prove that every contraction semi-group on « L^1 » is dominated by a unique minimal semi-group of positive contractions. A similar result is also obtained for resolvents. The third paragraph is devoted to applications in ergodic theory.

INTRODUCTION

En 1971, Akcoglu et Brunel [2] ont donné une nouvelle démonstration du théorème ergodique quotient général de Chacon-Ornstein. Un outil essentiel pour cela est l'existence du module linéaire d'un opérateur défini par Chacon et Krengel [5] [8]. Leur démonstration peut se transposer au cas d'un semi-groupe à un paramètre réel, quitte à introduire l'analogue, pour les semi-groupes, des modules linéaires. Le résultat essentiel de ce travail est le suivant : à tout semi-groupe de contractions d'un espace L^1 , on associe un semi-groupe de contractions positives, majorant-minimal, dans un sens à préciser.

Nous rappelons au paragraphe 1 les principales propriétés des modules linéaires ainsi que leur comportement lors des passages à la limite.

Au paragraphe 2 nous établissons l'existence et l'unicité du semi-groupe majorant ainsi qu'un résultat analogue pour les familles pseudo-résolvantes. En dernier lieu nous étudions la continuité de ce semi-groupe pour différentes topologies. Dans le cas où le semi-groupe de départ est (C_0) , ces résultats coïncident avec ceux de Y. Kubokawa [10].

Au paragraphe 3, consacré à quelques applications, nous utilisons le théorème de majoration pour démontrer des lemmes maximaux : le théorème ergodique quotient général, le théorème ergodique local de type abélien et un théorème local pour les semi-groupes s'en déduisent.

Je tiens à remercier ici A. Brunel et D. Revuz qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail, ainsi que S. Tsurumi pour de fructueuses conversations à ce sujet.

I. MODULES LINÉAIRES

A. Rappels sur L^1 et L^∞ .

Dans la suite de ce travail nous aurons besoin à plusieurs reprises de certaines propriétés de L^1 . Nous les rappelons donc ci-dessous, ainsi que certaines notations dont nous ferons librement usage.

1. Soit m une mesure σ -finie sur l'espace $(X, \mathcal{A})$. Nous noterons :

$L^1_{\mathbb{C}}(m)$ l'espace de Banach des classes de fonctions à valeurs complexes de module intégrable.

L^1_+ le cône convexe des fonctions de $L^1_{\mathbb{C}}$ vérifiant $f \geq 0$ m -p. s.

$L^1_{\mathbb{R}}$ les classes de fonctions, vérifiant $\text{Im} f = 0$ m -p. s.

$L^1(A)$ les fonctions vérifiant $(f \neq 0) \subset A$ m -p. s.

Munissons $L^1_{\mathbb{R}}$ de la structure d'ordre partiel $\geq$ définie par $f \geq g$ si $f \geq g$ m -p. s. $L^1_{\mathbb{R}}$ a alors une structure d'espace vectoriel topologique ordonné, de cône positif L^1_+ , compatible avec la topologie définie par la norme.

2. Muni de cette structure d'ordre, $L^1_{\mathbb{R}}$ est un espace de Riesz complètement réticulé : c'est-à-dire que toute partie majorée non vide de $L^1_{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $L^1_{\mathbb{R}}$.

Notons aussi au passage le *lemme de « localisation »* :

Soit $H \subset L^1_+$ admettant une borne supérieure g ; soit A tel que pour tout f de H on ait $(f \neq 0) \subset A$ m -p. s. alors on a aussi $(g \neq 0) \subset A$ m -p. s. Enfin nous utiliserons le

LEMME. — Soient $p \in L^1_+$ et l'ensemble $(p > 0) = A$. Alors les fonctions $f \in L^1_+$ vérifiant $f \leq p$ forment un sous-ensemble total de $L^1(A)$.

Preuve. — Soit $g \in L^1_+(A)$. Posons pour tout k de $\mathbb{N}$ $H_k = \{g \geq kp\}$. Puisque $(g > 0) \subset A = (p > 0)$, on a : $m(H_k) \downarrow 0$. Donc, par le théorème

de Lebesgue, pour tout ε , il existe un k tel que $\int_{H_k} g dm \leq \varepsilon$. Or g s'écrit :

$$g = g|_{H_k} + g|_{H_k^c} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k} g|_{H_k^c} \leq p.$$

Le théorème suit par linéarité.

B. Modules linéaires.

Soit T un opérateur de $L^1_{\mathbb{C}}$; nous dirons que T est positif si T envoie le cône L^1_+ dans lui-même. Dans [5] Chacon et Krengel ont démontré le

THÉOREME. — Soit T un opérateur de L^1 . Il existe un unique opérateur positif, noté $|T|$, vérifiant les propriétés suivantes :

- pour toute fonction f de L^1 , $|Tf| \leq |T||f|$
- si un opérateur positif U vérifie, pour toute fonction f de L^1 la même inégalité $U|f| \geq |Tf|$, alors $U|f| \geq |T||f|$.

PROPOSITION. — Soit T un opérateur continu de L^1 , alors

$$1. T \geq 0 \Rightarrow T = |T|$$

$$2. |||T||| = ||T||$$

Si T_1 et T_2 sont deux opérateurs de L^1 :

$$3. |T_1 + T_2| \leq |T_1| + |T_2|$$

$$4. |T_1 T_2| \leq |T_1| |T_2|$$

$$5. |T_1 - T_2| \geq ||T_1| - |T_2||.$$

COROLLAIRE. — L'application : $T \mapsto |T|$ est continue dans la topologie uniforme des opérateurs.

Par contre, le fait que l'on ait pour toute fonction f de L^1 $\lim ||T_n f - T f|| = 0$ n'implique pas que l'on ait, $g \in L^1$, $\lim |||T_n|g - |T|g|| = 0$ [5].

Cependant nous avons le résultat de « minoration » des limites suivant [8].

THÉOREME. — Soit T_n convergeant vers T dans la topologie forte des opérateurs, alors pour toute $f \in L^1_+$, on a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow 0} ||(|T_n|f - |T|f)^-|| = 0.$$

COROLLAIRE. — Soient T_n convergeant vers T et $f \in L^1_+$ vérifiant $\overline{\lim} |||T_n|f|| \leq |||T|f||$, alors on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |||T_n|f - |T|f|| = 0.$$

Preuve. — Il suffit d'après le théorème précédent de prouver $\lim ||(|T_n|f - |T|f)^+|| = 0$. Or

$$\begin{aligned} |T_n|f &= |T_n|f - |T|f + |T|f \\ &= |T|f + (|T_n|f - |T|f)^+ - (|T_n|f - |T|f)^- \\ |||T|f|| &\geq \overline{\lim} |||T_n|f|| = |||T|f|| + \overline{\lim} ||(|T_n|f - |T|f)^+|| \end{aligned}$$

ce qui nécessite $\overline{\lim} ||(|T_n|f - |T|f)^+|| = 0$.

II. MAJORATION DES SEMI-GROUPES ET RÉSOLVANTES.

A. Dans le cas d'une contraction de $L^1_{\mathbb{C}}$, Akcoglu et Brunel [3] ont prouvé, à l'aide de l'opérateur $\tau = |T|$, un théorème ergodique quotient. La technique employée pour prouver ce théorème consiste à se ramener au cas positif (théorème de Chacon-Ornstein) en remarquant que le semi-groupe $(\tau^n)_{n \geq 0}$ « majore » le semi-groupe $(T^n)_{n \geq 0}$ au sens suivant : pour tout $n \geq 0$ et tout $f \in L^1$ on a $|T^n f| \leq \tau^n |f|$.

Dans le cas discret le semi-groupe (τ^n) s'introduit naturellement comme le plus petit semi-groupe positif majorant (T^n) . Par analogie dans le cas continu on désirerait prendre comme semi-groupe majorant la famille $(\mathcal{T}_t)$ des modules linéaires des $(T_t)_{t \geq 0}$. Malheureusement en général on n'a que l'inégalité $\mathcal{T}_{t+s} \leq \mathcal{T}_t \mathcal{T}_s$ qui peut être stricte.

Néanmoins, dans le cas d'un semi-groupe de contractions, on peut construire un plus petit semi-groupe majorant.

THÉORÈME. — Soit $(T_t)_{t > 0}$ (resp. $t \geq 0$) un semi-groupe de contractions de L^1 , alors il existe un unique semi-groupe de contractions positives défini pour $t > 0$ (resp. $t \geq 0$), noté S_t , vérifiant :

- a. pour toute fonction f de L^1 , on a $|T_t f| \leq S_t |f|$,
- b. si U_t est un semi-groupe de contractions positives vérifiant pour $f \in L^1$, $|T_t f| \leq U_t |f|$, alors nécessairement $U_t |f| \geq S_t |f|$ m-p. s. pour tout t .

Preuve. — Soit $t > 0$ fixé. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[0, t]$ $(s) \in \mathcal{S} = 0 < s_1 < \dots < s_n = t$. Définissons sur $\mathcal{S}$ l'ordre $\succ$ de la manière suivante : on dit que $(s) \succ (s')$ si et seulement si (s) est un raffinement de (s') . Avec cet ordre, $\mathcal{S}$ est filtrant croissant. Posons, pour $f \in L^1_+$ fixé et (s) dans $\mathcal{S}$

$$P_{(s)} = \mathcal{T}_{s_1} \mathcal{T}_{s_2 - s_1} \dots \mathcal{T}_{s_n - s_{n-1}} f$$

qui est un élément de L^1_+ et de plus l'application définie sur $\mathcal{S}$, $(s) \in \mathcal{S} \mapsto \Phi_{(s)}$

est monotone croissante. On le vérifie facilement en rajoutant un point à la subdivision (s) grâce à l'inégalité $\mathcal{T}_{t+s} \leq \mathcal{T}_t \mathcal{T}_s$. Comme de plus : $\|\mathcal{T}_t\| = \|T_t\| \leq 1$ pour tout $t > 0$, on voit que $\Phi_{(s)}$ vérifie $\|\Phi_{(s)}\|_1 \leq \|f\|_1$. On pose alors

$$S_t f = \sup_{(s)} \Phi_{(s)} = \lim_{\mathcal{F}} \uparrow \Phi_{(s)}.$$

1. S_t est une contraction positive de L^1 .
2. S_t est additif et positivement homogène sur L^1_+ (l'homogénéité est évidente). Montrons l'additivité; soient $f, g \in L^1_+$ on a :

$$\begin{aligned} \|S_t(f+g) - S_t f - S_t g\| &\leq \|S_t(f+g) - \mathcal{T}_{\alpha_1} \dots \mathcal{T}_{\alpha_n}(f+g)\| \\ &+ \|S_t f - \mathcal{T}_{\alpha_1} \dots \mathcal{T}_{\alpha_n} f\| \\ &+ \|S_t g - \mathcal{T}_{\alpha_1} \dots \mathcal{T}_{\alpha_n} g\|. \end{aligned}$$

Prenant une subdivision suffisamment fine de $[0, t]$, $\varepsilon > 0$ étant donné :

$$\|S_t(f+g) - S_t f - S_t g\| \leq \varepsilon.$$

$$3. S_t \circ S_{t'} = S_{t+t'}.$$

Remarquons que si $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = t(s)$

$$0 < s'_1 < s'_2 < \dots < s'_k = t'(s')$$

Alors $(s) * (s') = 0 < s_1 < \dots < s_n = t < t + s'_1 < \dots < t + s'_k = t + t'$ est une subdivision de $[0, t+t']$ (l'opération est non commutative).

Soient $\varepsilon > 0$ et $f \in L^1_+$, il existe s_ε et s'_ε tels que si $s > s_\varepsilon$ et $s' > s'_\varepsilon$ on ait :

$$\begin{aligned} \|S_t f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_n} f\| &\leq \varepsilon & \text{où} & \quad t_i = s_i - s_{i-1} \\ \|S_{t'} S_t f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_k} S_t f\| &\leq \varepsilon & \quad t'_i &= s'_i - s'_{i-1}. \end{aligned}$$

Prenons $s''_\varepsilon > s_\varepsilon * s'_\varepsilon$ telle que pour $s > s''_\varepsilon$

$$\|S_{t+t'} f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_q} f\| < \varepsilon.$$

Alors puisque pour tout t , $\mathcal{T}_t$ est une contraction :

$$\begin{aligned} \|S_{t+t'} f - S_t \cdot S_{t'} f\| &\leq \|S_{t+t'} f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_q} f\| \\ &+ \|\mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_k} \mathcal{T}_{t_{k+1}} \dots \mathcal{T}_{t_p} f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_k} S_{t'} f\| \\ &+ \|\mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_k} S_{t'} f - S_t \cdot S_{t'} f\| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

4. Si le semi-groupe T_t est défini pour $t \geq 0$, alors le module linéaire de T_0 , soit $\mathcal{T}_0$, vérifie toute fonction p de L^1_+ et tout réel positif t : $\mathcal{T}_0 \mathcal{T}_t p \geq \mathcal{T}_t p$ et donc $\mathcal{T}_0 \mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t$.

Si nous posons alors $S'_0 = \mathcal{T}_0$, et pour toute subdivision (s)

$$P'_{(s)} = \mathcal{T}_{s_1} \mathcal{T}_{s_2 - s_1} \dots \mathcal{T}_{s_n - s_{n-1}} \mathcal{T}_0 f,$$

et S'_t la limite suivant le filtre des sections de P'_s , le même raisonnement que précédemment montre que S'_t est un semi-groupe.

5. En dernier lieu S_t vérifie bien la propriété b de minimalité : si U_t vérifie pour f de L^1 $|T_t f| \leq U_t |f|$, alors

$$U_t |f| = U_{t_1} \dots U_{t_n} |f| \geq \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_n} |f|$$

d'après la caractérisation du module linéaire. ■

Par ailleurs, le semi-groupe ainsi obtenu est aussi régulier que T_t l'est comme le prouve le

THÉORÈME. — Soit S_t le semi-groupe positif associé au semi-groupe de contractions de L^1 , T_t . Alors :

- 1) Si T_t est continu à droite dans la topologie forte des opérateurs pour $t > 0$ (resp. $t \geq 0$), alors S_t est continu à droite sur $t > 0$ (resp. $t \geq 0$).
- 2) Si T_t est continu à droite dans la topologie uniforme des opérateurs, alors S_t aussi.

Preuve. — 2) On vérifie que si le semi-groupe T_t est de la forme e^{tA} pour A opérateur borné de L^1 , on a alors $|T_t| \leq S_t \leq e^{t(A + \lambda I - \lambda I)}$ pour tout nombre $\lambda > 0$ et la continuité en norme s'ensuit.

1) Notons d'abord que l'application $t \rightarrow \mathcal{T}_t$ est continue à droite pour tout $t > 0$ (resp. $t \geq 0$). En effet, soit $t_0 \geq 0$, on a pour tout $s > 0$ et tout élément f de L^1_+ : $\mathcal{T}_{t_0+s} f \leq \mathcal{T}_s \mathcal{T}_{t_0} f$ et donc $\|\mathcal{T}_{t_0+s} f\| \leq \|\mathcal{T}_{t_0} f\|$. L'assertion résulte alors du Corollaire ; pour prouver la continuité forte, il suffit de montrer, pour f non négative, $\lim \|(S_t f - S_{t+s} f)^+\| = 0$ quand s tend vers 0.

Or par définition de $S_{t+s} f$ on a :

$$(S_t f - S_{t+s} f)^+ \leq (S_t f - \mathcal{T}_{s+t_1} \mathcal{T}_{t_2} \dots \mathcal{T}_{t_p} f)^+$$

pour tout découpage $(t_1, \dots, t_p)$ de $[0, t]$. De plus $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un découpage $t_1, \dots, t_p$ tel que $\|S_t f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_p} f\| \leq \varepsilon$. D'où :

$$\begin{aligned} \|(S_t f - S_{t+s} f)^+\| &\leq \|S_t f - \mathcal{T}_{s+t_1} \dots \mathcal{T}_{t_p} f\| \\ &\leq \varepsilon + \|\mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_p} f - \mathcal{T}_{s+t_1} \dots \mathcal{T}_{t_p} f\|. \end{aligned}$$

En faisant tendre s vers 0, par continuité à droite de $\mathcal{T}_t$ on tire $\lim \|(S_t f - S_{t+s} f)^+\| = 0$.

Remarque. — 1) On sait que tout semi-groupe (C_0) vérifie une inégalité du type $\|T_t\| \leq M e^{\omega t}$. Il est facile de voir que la majoration exponentielle $e^{\omega t}$ n'apporte pas de difficulté supplémentaire : $(e^{-\omega t} T_t)$ est alors à contraction...).

Par contre, l'hypothèse $M \leq 1$ est essentielle.

Considérons en effet l'exemple suivant :

Soient $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $m = \sum_{n \geq 0} \delta_n$ la mesure de comptage ;

$L^1(\Omega, \mathcal{A}, m)$ est alors $l^1(\mathbb{N})$. Considérons le semi-groupe T_t défini comme suit : si $x = (x_n)$ alors $y = T_t x$ est la suite (y_n) définie par :

$$\begin{aligned} y_{2p} &= x_{2p} \cos pt - x_{2p+1} \sin pt \\ y_{2p+1} &= x_{2p} \sin pt + x_{2p+1} \cos pt. \end{aligned}$$

On voit facilement alors que pour t irrationnel $\|T_t\| = \sqrt{2}$. Mais dans ce cas le module linéaire $\mathcal{T}_t$ est l'opérateur défini par $(\mathcal{T}_t x) = z$

$$\begin{aligned} z_{2p} &= x_{2p} |\cos pt| + x_{2p+1} |\sin pt| \\ z_{2p+1} &= x_{2p} |\sin pt| + x_{2p+1} |\cos pt|. \end{aligned}$$

Soit $e_p = (x_p^k)$ avec

$$\begin{cases} x_p = 1 & \text{si } k = 2p \quad \text{ou} \quad k = 2p + 1 \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors e_p est propre pour $\mathcal{T}_t$, c'est-à-dire

$$\mathcal{T}_t e_p = (|\cos pt| + \sin pt) e_p \quad \text{pour tout } t.$$

Mais supposons maintenant qu'il existe un semi-groupe S_t positif majorant $\mathcal{T}_t$. Alors nécessairement, pour tout n , $S_t \geq (\mathcal{T}_{t/n})^n$. De

$$(\mathcal{T}_{t/n})^n e_p = \left(\left| \cos \frac{pt}{n} \right| + \left| \sin \frac{pt}{n} \right| \right)^n e_p$$

on tire :

$$\|S_t\| \geq \left(\left| \cos \frac{pt}{n} \right| + \left| \sin \frac{pt}{n} \right| \right)^n.$$

Faisant tendre n vers l'infini, on a donc $\|S_t\| \geq e^{pt}$ et ceci pour tout p , ce qui est contradictoire avec la continuité de S_t .

Le semi-groupe T_t n'admet pas de majorant.

2) Dans le cas où le semi-groupe est continu à l'origine, ce théorème peut se démontrer d'une autre façon en construisant S_t sur les dyadiques, c'est-à-dire :

Soit D l'ensemble des dyadiques, D_p ceux qui peuvent s'écrire $\frac{k}{2^p}$. On

considère les semi-groupes discrets définis sur D_p comme suit : si $\frac{k}{2^p} = d \in D_p$, on pose $L_d^p = (\mathcal{T}_{2^{-p}})^k$.

On remarque que $f \in L_+^1$ et $d \in D_p \subset D_{p+k}$ vérifient l'inégalité $L_d^p f \leq L_d^{p+k} f$. On pose alors :

$$S_d f = \lim_{n \rightarrow \infty} L_d^{p+n} f.$$

S_d est alors un semi-groupe positif majorant (T_t) « sur les dyadiques ». On vérifie (mêmes calculs) que, pour tout $f \in L_+^1$,

$$\lim_{d \rightarrow 0^+} \|S_d f - f\| = 0$$

et on prolonge par continuité $(S_d)_{d \in \mathbb{D}}$ en $(S_t)_{t \geq 0}$. (T_t) étant (C_0) on a alors par une extraction de sous-suite, pour tout $f \in L^1$:

$$S_t |f| \leq |T_t f|.$$

Ce théorème a été démontré indépendamment par Y. Kubokawa avec une démonstration analogue à celle ci-dessus (non encore publiée, elle m'a été aimablement montrée par M. S. Tsurumi). Kubokawa utilise ce théorème pour démontrer un théorème limite local [10].

B. Les résolvantes sont à beaucoup de points de vue très proches des semi-groupes. Nous avons donc un théorème analogue pour celles-ci :

THÉOREME. — Soit (V_λ) une résolvante à contraction (i. e. $\lambda > 0$, $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$), alors il existe une plus petite résolvante notée W_λ , sous-markovienne « majorant » V_λ , c'est-à-dire vérifiant, pour tout λ et tout $f \in L^1$

$$|V_\lambda f| \leq W_\lambda |f|.$$

Preuve. — Soit (V_λ) une résolvante à contraction ; $(v_\lambda)_{\lambda > 0}$ la famille des modules linéaires qui vérifie l'inégalité $v_\lambda - v_\mu \leq |\mu - \lambda| v_\lambda v_\mu$. Fixons μ et considérons pour $0 < \lambda < 2\mu$, les opérateurs W_λ^μ définis par :

$$W_\lambda^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (v_\mu)^{n+1}.$$

Alors :

- 1) $\lambda \in]0, 2\mu[\quad \|\lambda W_\lambda^\mu\| \leq 1$
- 2) W_λ^μ est positif pour tout $\lambda \in]0, \mu]$
- 3) $W_\mu^\mu = v_\mu$
- 4) $W_\lambda^\mu - W_{\lambda'}^\mu = (\lambda' - \lambda) W_\lambda^\mu W_{\lambda'}^\mu$, pour tous $\lambda, \lambda' \in]0, 2\mu[$.

Ceci résulte de la caractérisation de W_λ^μ par la formule

$$(I + (\mu - \lambda) W_\lambda^\mu)(I - (\mu - \lambda) v_\mu) = I$$

soit $W_\lambda^\mu = \frac{1}{(\mu - \lambda)} [(I - (\mu - \lambda) v_\mu)^{-1} - I]$ et d'un calcul simple.

5) Soit λ fixé et $\mu' \geq \mu \geq \lambda$. On tire de $v_\mu - v_{\mu'} \leq (\mu' - \mu) v_\mu v_{\mu'}$ l'inégalité $v_\mu' \leq W_{\mu'}^\mu$, et puisque $W_\lambda^{\mu'} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (W_{\mu'}^\mu)^{n+1}$ finalement :

$$W_\lambda^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (v_\mu)^{n+1} \leq W_\lambda^{\mu'}.$$

6) On pose alors, pour $f \in L_+^1$,

$$W_\lambda f = \lim_{\mu \geq \lambda} \uparrow W_\lambda^\mu f = \sup_{\mu \geq \lambda} W_\lambda^\mu f.$$

Il est facile de voir que ceci définit un opérateur positif additif et positivement homogène sur L_+^1 , qui forme une résolvante majorant (V_λ) puisque

$$|V_\lambda f| \leq v_\lambda |f| \leq W_\lambda |f|.$$

7) Enfin, si R_λ est une résolvante sous-markovienne majorant V_λ alors, pour tout $\lambda > 0$, $R_\lambda \geq v_\lambda$ et puisque R_λ vérifie $R_\lambda = \Sigma(\mu - \lambda)^n (R_\mu)^{n+1}$ ($\mu \geq \lambda$), $R_\lambda \geq W_\lambda^\mu$.

On sait d'autre part que si P_t est un semi-groupe à contraction (C_0) et (R_λ) sa résolvante, alors P_t est positif si et seulement si R_λ est positive. En effet, on a [4] :

$$f \in L_+^1 \quad P_t f = s. \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\lambda R_\lambda)^k f.$$

Dans ce cas, les deux constructions sont équivalentes :

PROPOSITION. — Soient $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe à contraction (C_0) , (S_t) le plus petit semi-groupe positif le majorant ; soient d'autre part (V_λ) la résolvante de (T_t) , (W_λ) la majorante de (V_λ) . Alors W_λ est la résolvante de (S_t) .

Preuve. — Soient (R_λ) la résolvante de (S_t) et $p \in L_+^1$:

$$R_\lambda p = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_t p dt \geq \int_0^\infty e^{-\lambda t} |T_t p| dt \geq \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t p dt \right|$$

d'où $R_\lambda p \geq W_\lambda p$. Inversement, V_λ étant la résolvante du semi-groupe T_t , on a $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda f = f$ pour toute f de L^1 , et donc $\lim \lambda W_\lambda f = f$. D'après le théorème de Hille-Yosida, W_λ est la résolvante d'un semi-groupe positif P_t et l'on a, pour toute fonction p de L_+^1 :

$$P_t p = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\lambda W_\lambda)_p^k \text{ dans } L^1.$$

Mais pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\lambda W_\lambda)_p^k &\geq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} |(\lambda V_\lambda)_p^k| \\ &\geq \left| e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\lambda V_\lambda)_p^k \right|. \end{aligned}$$

Et, quitte à extraire une sous-suite, on voit par passage à la limite que $P_t p \geq |T_t p|$.

S_t étant minimal, par intégration on a, $p \in L_+^1$:

$$R_\lambda p \leq W_\lambda p. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

III. APPLICATIONS

A. Théorème ergodique quotient.

Soit (T_t) un semi-groupe C_0 d'opérateurs de L^1 . L'application $t \rightarrow T_t f$ de $\mathbb{R}_+$ dans L^1 étant continue, on sait définir l'intégrale de Bochner [11] notée $\int_0^T T_s f ds$ qui est un élément de l'espace de Banach L^1 et vérifie les propriétés usuelles de l'intégrale. Dans ce cas un théorème de Dunford et Schwartz [7] montre qu'il existe une « bonne version » de $T_t f$, c'est-à-dire une fonction $G : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable qui vérifie

- 1) pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $G(t, \cdot) = T_t f$ dans L^1
- 2) pour presque tout ω de Ω , la fonction $t \rightarrow G(t, \omega)$ est intégrable sur tout intervalle $[0, T]$

$$3) \omega \rightarrow \int_0^T G(t, \omega) dt \text{ est un représentant de } \int_0^T T_t f dt.$$

Désormais, il sera entendu que, lorsque nous étudierons la convergence d'une expression du type $\int_0^T T_s f / \int_0^T p_s ds$, nous prendrons le représentant déterminé par les « bonnes versions » respectives de $T_s f$ et p_s . Ces représentations particulières ont des propriétés de continuité qui permettent de vérifier que des ensembles du type $\left(\int_0^\infty p_s ds > 0 \right)$ sont mesurables

Par ailleurs, il est facile de montrer que pour un semi-groupe (T_t) de contractions positives continu à l'origine on a pour toute fonction positive $p \left(\int_0^u T_s p ds > 0 \right) \Rightarrow (p > 0)$. On vérifie alors aisément que l'espace se décompose en deux parties C et D, respectivement partie conservative et dissipative sous le semi-groupe, et que $\int_0^{+\infty} T_s p$ est finie p. s. sur D et

infinie p. s. sur C . On vérifie aussi que si C_t désigne la partie conservative sous l'opérateur T_t , alors $C = C_t$ pour tout réel t .

Rappelons que l'on dit qu'un ensemble A est invariant sous le semi-groupe T_t si pour tout t , $T_t(L^1(A)) \subset L^1(A)$: dans le cas d'un semi-groupe positif, C est invariant et les sous-ensembles de C invariants forment une sous-tribu $\mathcal{F}$ de la tribu des sous-ensembles mesurables de C . Les propriétés caractérisant les fonctions invariantes sous le semi-groupe dual de T_t , noté T_t^* comme les fonctions dont la restriction à C est $\mathcal{F}$ -mesurable sont encore valables. Dans le cas où T_t est non positif, nous notons S_t son majorant, et C la partie conservative de S_t . Dans ces conditions on voit que la démonstration de Brunel-Akcoglu s'adapte au cas continu, quitte à remarquer que l'on a (puisque $C_t = C$ pour tout t) :

LEMME. — Si $h \in L^\infty$ et si pour tout t , $T_t^*h = h$, alors on a $S_t^*|h| = |h|$ sur C . Et par conséquent nous en tirons le :

THÉORÈME DE REPRÉSENTATION. — Soit (T_t) un semi-groupe de contraction de L^1_C , (S_t) le semi-groupe positif associé, $\mathcal{F}$ la tribu des invariants. Alors il existe $\Gamma \in \mathcal{F}$ et $s \in L^\infty(\Gamma)$ tels que :

- 1) $|s| = 1$ p. s. sur Γ et pour tout réel t et toute fonction f de $L^1(\Gamma)$, $T_tf = \bar{s}S_t(sf)$ (où $\bar{s}$ désigne le complexe conjugué de s).
- 2) Si $\Delta = C \setminus \Gamma$ et A est le générateur infinitésimal de T_t , $A(D(A) \cap L^1(\Gamma))$ est dense dans $L^1(\Delta)$.
- 3) La partition $C = \Gamma + \Delta$.
- 4) r possède les propriétés de s si et seulement si il existe une fonction l de $L^\infty(\Gamma)$, $|l| = 1$ vérifiant, pour tout t , $S_t^*l = l$ p. s. sur Γ et telle que $r = sl$.

Preuve. — Le seul point à démontrer est 2).

Soit L une forme linéaire continue sur $L^1(\Delta)$ qui s'annule sur $A(D(A) \cap L^1(\Delta))$. Par Hahn-Banach, cette forme linéaire s'étend en une forme linéaire continue sur L^1 , notée encore L . Soit $h \in L^\infty(\Delta)$, telle que $L(f) = \langle f, h \rangle_m$. On a donc pour toute f de $D(A) \cap L^1(\Delta)$, $\langle Af, h \rangle = 0$. Posons, f et h étant fixés, $u(t) = \langle T_tf, h \rangle$. Puisque $f \in D(A) \cap L^1(\Delta)$, $T_sf \in D(A) \cap L^1(\Delta)$ pour tout s et donc $u'(s) = \langle AT_sf, h \rangle = 0$. La fonction $u(s)$ est donc constante et égale à $\langle f, h \rangle$. Par densité de $D(A)$ on a donc, pour toute fonction f de $L^1(\Delta)$, $\langle f, T_t^*h \rangle = \langle T_tf, h \rangle = \langle f, h \rangle$. En conséquence on a $T_t^*h = h$ et, par construction de Γ comme le plus grand ensemble invariant sur lequel il y a une solution non triviale à cette question, $h = 0$, cf. [2].

On en tire alors, en suivant Akcoglu et Brunel, le :

THÉORÈME. — Soit (T_t) un semi-groupe (C_0) de contractions de $L^1_{\mathbb{C}}$, et soit (p_s) une famille admissible. Alors, si $f \in L^1$,

$$\lim \frac{\int_0^t T_u f du}{\int_0^t p_u du} \text{ existe et est fini p. s.}$$

sur l'ensemble $\left(\int_0^\infty p_s ds > 0 \right)$.

Et de la démonstration de ce théorème, on déduit :

THÉORÈME (IDENTIFICATION). — Soit $s \in L^\infty$ servant à la représentation de (T_t) . Alors, si $f \in L^1$ et $A \in \underline{\mathcal{T}}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_A s T_t f dm$ existe ; si $p \in L^1_+$ est strictement positive, $sD(f, p)$ est $\underline{\mathcal{T}}$ -mesurable et, pour tout ensemble A de $\underline{\mathcal{T}}$:

$$\int_A sD(f, p) p dm = \lim_{t \rightarrow \infty} \int s T_t f dm.$$

B. Théorème ergodique local.

Soit T_t un semi-groupe de contraction de L^1 , continu sur $\mathbb{R}_+$. Dans le cas où le semi-groupe est positif Krengel [9] a démontré un théorème ergodique local. Nous démontrons ici son analogue non positif. Pour cela nous aurons besoin du lemme maximal suivant :

LEMME. — Soit (S_t) un semi-groupe de contractions positives fortement continu, alors si $E_f = \bigcup_t \left(\int_0^t S_u f du > 0 \right)$, f vérifie $\int_{E_f} S_0 f \geq 0$.

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme discret si on remarque que, puisque nous ne considérons que les « bonnes versions » de $S_t f$, nous avons l'égalité :

$$\bigcup_{A=0}^\infty \left(\int_0^A S_t f > 0 \right) = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty \left(\int_0^{k/2^n} S_t f > 0 \right)$$

et que, par hypothèse, $\frac{1}{t} \int_0^t S_s f ds \rightarrow S_0 f$ dans la topologie de L^1 .

THÉORÈME ERGODIQUE LOCAL. — Soient $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de contractions de L^1 , alors, pour toute fonction $f \in L^1$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T_s f ds = T_0 f ps.$$

Preuve. — Soit $p \in L^1_+$ strictement positive sur X , et soit $h = \int_0^T S_t p dt$. Il est facile de montrer que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \int_0^u S_t h dv = S_0 h = h ps,$$

grâce à l'intégrabilité $\times$ par $\times$.

D'autre part, il est clair que S_t majorant T_t , on peut supposer que $(h > 0) = X$. Dans ces conditions le théorème est équivalent à prouver que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\int_0^u T_s f ds}{\int_0^u S_s h ds} = \frac{T_0 f}{h} ps.$$

Ce résultat est évident pour les fonctions du type $\int_0^a T_s f ds$ qui sont denses dans $T_0(L^1)$, puisque $\frac{1}{a} \int_0^a T_s f ds$ tend dans L^1 vers $T_0 f$. Puisque

$$\int_0^t T_s f ds = \int_0^t T_s T_0 f ds,$$

il suffit de montrer que les fonctions ayant une limite forment un ensemble fermé dans L^1 . Ceci résulte du lemme ergodique maximal. Prenons, f et h étant fixées, une suite f_n vérifiant

- f_n tend vers $T_0 f$ dans L^1 et presque sûrement
- $T_0 f_n = f_n$ et la limite, lorsque t tend vers 0, de $\frac{1}{t} \int_0^t T_s f_n ds$ existe presque sûrement.

Alors, pour tout n , on a :

$$\begin{aligned} \left(\overline{\lim} \left| \frac{\int_0^t T_s f}{\int_0^t S_s h} - \frac{T_0 f}{h} \right| > \lambda \right) &= \left(\overline{\lim} \left| \frac{\int_0^t T_s f}{\int_0^t S_s h} - \frac{\int_0^t T_s f_n}{\int_0^t S_s h} \right| > \frac{\lambda}{2} \right) \\ &\cup \left(\overline{\lim} \left| \frac{\int_0^t T_s f_n}{\int_0^t S_s h} - \frac{T_0 f_n}{h} \right| > \frac{\lambda}{2} \right) \cup \left(\left| \frac{T_0 f_n}{h} - \frac{T_0 f}{h} \right| > \frac{\lambda}{2} \right). \end{aligned}$$

Posons, pour tout ensemble A-mesurable, $\mu_h(A) = \int_A h d\mu$. Du lemme maximal nous tirons pour le premier terme :

$$\mu_h \left[\overline{\lim} \frac{\left| \int_0^t T_s(f - f_n) ds \right|}{\int_0^t S_s h ds} > \frac{\lambda}{2} \right] \leq \frac{2}{\lambda} \|f - f_n\|.$$

Par hypothèse, le second terme est presque sûrement vide et le troisième terme donne, puisque T_0 est une contraction,

$$\mu_h \left[\frac{|T_0 f_n - T_0 f|}{h} > \frac{\lambda}{2} \right] \leq \frac{2}{\lambda} \|f - f_n\|. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

C. Théorème ergodique local de type abélien.

Soit $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ une résolvante à contractions sur $L^1_{\mathbb{C}}$, nous supposons que cette résolvante est (L_∞) , c'est-à-dire vérifie $s - \lim \lambda V_\lambda = \text{Id}$ quand λ tend vers l'infini. Si nous notons W_λ la résolvante positive associée à V_λ , W_λ est aussi (L_∞) . Du fait de l'analyticité de la fonction à valeur L^1 : $\lambda \rightarrow \lambda V_\lambda f$, il existe pour toute fonction f une représentation $F(\lambda, x)$ avec les propriétés

a. Pour tout λ , $F(\lambda, x) = V_\lambda f p s.$

b. Pour tout x , la fonction $\lambda \rightarrow F(\lambda, x)$ est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$. Nous nous occupons désormais de la convergence quand λ tend vers l'infini des expressions $\lambda F(\lambda, x)$ que nous notons abusivement $\lambda V_\lambda f(x)$.

Nous aurons besoin du théorème ergodique maximal dû à Mokobodzki [11] [12] dans un cadre légèrement différent.

THÉORÈME. — Soit V_λ une résolvante sous-markovienne, p une fonction strictement positive vérifiant $\lambda V_\lambda p \leq p$, alors pour toute fonction positive φ on a :

$$V_0 \varphi \geq V_0 [p \cdot 1_{\{\overline{\lim} \lambda V_\lambda \varphi \geq \lambda V_\lambda(p)\}}].$$

Enfin nous ferons l'hypothèse d'irréductibilité suivante : si p est élément de L^1_+ , alors $W_0 p = 0$ équivaut à $p = 0$.

THÉORÈME. — Soit V_λ une résolvante à contraction vérifiant les hypothèses précédentes : pour toute fonction f de L^1 on a presque sûrement, quand λ tend vers l'infini, $\lim \lambda V_\lambda f(x) = f(x)$.

Preuve. — Si $f = V_0 q$, alors l'équation résolvante s'écrit

$$V_0 q - V_\lambda q = \lambda V_\lambda V_0 q.$$

Mais W_λ vérifie $|V_\lambda q| \leq W_\lambda |q|$ et $\lim W_\lambda |q| = 0$ presque sûrement puisque la fonction $\lambda \rightarrow W_\lambda |q|$ est décroissante. La limite existe donc presque partout, et $\lim \lambda V_\lambda V_0 q = V_0 q$.

Si $f = V_\lambda q$, on applique le même raisonnement à la résolvante définie par $V'_\mu = V_{\lambda+\mu}$ pour $\mu > 0$.

Soit maintenant f quelconque de L^1 , par l'hypothèse (L_∞) il existe une suite λ_n telle que $f_n = \lambda_n V_{\lambda_n} f$ tende vers f dans L^1 et presque sûrement. Soit p une fonction strictement positive de L^1 vérifiant $\lambda W_\lambda p \leq p$ (il suffit de prendre $W_0 q$ pour q de L^1_+ , strictement positive). Posons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$E(\varepsilon, f) = \{x; \overline{\lim} |\lambda V_\lambda f(x) - f(x)| > \varepsilon p(x)\}.$$

Des inégalités $\overline{\lim} |\lambda V_\lambda f - f| \leq \overline{\lim} |\lambda V_\lambda (f - f_n)| + \overline{\lim} |\lambda V_\lambda f_n - f_n| + |f - f_n|$ et $|\lambda V_\lambda (f - f_n)| \leq \lambda W_\lambda |f - f_n|$, nous tirons pour tout entier n :

$$E(f, \varepsilon) \subset \left(|f - f_n| > \frac{\varepsilon}{3} p\right) \cup \left(\overline{\lim} \lambda W_\lambda |f - f_n| > \frac{\varepsilon}{3} p\right).$$

Par le choix de f_n : $\overline{\lim} m \left\{|f - f_n| > \frac{\varepsilon}{3} p\right\} = 0$ et grâce au théorème de Mokobodzki, si on pose :

$$A(n, \varepsilon) = \left\{\overline{\lim} \lambda W_\lambda |f - f_n| > \frac{\varepsilon}{3} p\right\}$$

$$\frac{3}{\varepsilon} W_0 |f - f_n| \geq W_0(p \cdot 1_{A(n, \varepsilon)})$$

et donc en passant à la limite $W_0(p \cdot 1_{E(f, \varepsilon)}) = 0$, soit par irréductibilité $E(f, \varepsilon) = \emptyset$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. A. AKCOGLU, Pointwise Ergodic Theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **125**, 1966, p. 296-309.
- [2] M. A. AKCOGLU et A. BRUNEL, Contractions on L^1 -spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **155**, 1971, p. 315-325.
- [3] P. L. BUTZER, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer, 1967.
- [4] R. V. CHACON, Convergence of operators averages, *Proc. Internat. Symp. Ergodic Theory*, Tulane University, Academic Press, New York, 1963.
- [5] R. V. CHACON et U. KRENGEL, Linear modulus of an operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **15**, 1964, p. 553-559.
- [6] R. V. CHACON et D. S. ORNSTEIN, A general ergodic theorem, *Illinois J. Math.*, t. **4**, 1960, p. 153-160.
- [7] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Part 1, New York 1957.
- [8] U. KRENGEL, Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen, *Math. Scnd.*, t. **13**, 1963, p. 151-187.

- [9] U. KRENGEL, A local ergodic theorem, *Invent. Math.*, t. 6, 1969, p. 329-333.
- [10] Y. KUBOKAWA, *à paraître*.
- [11] P. A. MEYER, *Le théorème de dérivation par rapport à une résolvante*, Bourbaki, 1972/1973 (No 422).
- [12] G. MOKOBODZKI, Densité relative de deux potentiels comparables, Séminaire de Proba IV, *Lecture Notes*, No 124, 1970.
- [13] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer.

(Manuscrit reçu le 11 octobre 1974)