

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DIDIER DACUNHA-CASTELLE

MICHEL SCHREIBER

Techniques probabilistes pour l'étude de problèmes d'isomorphismes entre espaces de Banach

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 2 (1974), p. 229-277

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_229_0

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Techniques probabilistes pour l'étude de problèmes d'isomorphismes entre espaces de Banach

par

Didier DACUNHA-CASTELLE et Michel SCHREIBER

(Paris XI)

(Nancy I)

SUMMARY. — In this paper we use probabilistic tools to solve certain problems in Banach spaces geometry.

We give some results concerning series of random variables and three-series criteria. Technics of symetrisation are used to apply Kolmogorov theorem on projectives limits to make canonical models of some Banach spaces with symetric basis. These arguments give the complete solution of the problem of imbedding a space with symetric basis in an Orlicz space.

Le but de ce travail est de résoudre quelques problèmes de la géométrie de certains espaces de Banach dont les espaces L^p et les espaces d'Orlicz. Nous avons utilisé à cette fin des techniques probabilistes, qui interviennent dans la plupart des problèmes concernant les espaces de Banach classiques, au moins sous la forme d'utilisation de séries aléatoires. Nous avons ici donné une rédaction assez complète concernant des problèmes de convergence dans des espaces modulaires, en reprenant un certain nombre de résultats anciens ou non publiés encore. Ces résultats sont exposés au chapitre II. Ils donnent aussi des méthodes utilisables pour l'étude des séries aléatoires à valeurs dans des espaces modulaires. Deux autres techniques probabilistes sont développées pour l'étude des espaces ayant une base symétrique. La décomposition de la base en partie équi-

intégrable et partie singulière maximale est une extension systématique d'une technique bien connue de Kadec et Pelcynski. La symétrisation est un moyen d'utiliser le théorème de Kolmogorov sur les limites projectives de mesures pour avoir des modèles canoniques de certains espaces. Ces méthodes seront utilisées dans le chapitre III.

Les résultats que nous avons obtenus ici pour les espaces d'Orlicz nous paraissent intéressants en ce qu'ils diffèrent profondément de ceux obtenus pour les L^p . Ils montrent le rôle naturel que joue la classe des espaces d'Orlicz non stationnaires (sommes continues d'espaces d'Orlicz construits sur un ensemble convexe fermé de fonctions d'Orlicz) si l'on veut aller vers certaines généralisations des propriétés des espaces L^p , et en tout cas ils précisent bien la notion de finitude sur un exemple concret non trivial.

Notons que les résultats sont obtenus pour deux classes d'espaces, les espaces de type > 2 (espaces surhilbertien) et les espaces de type < 2 (espaces sous hilbertien). Il en est ainsi de bien des résultats actuels. En particulier, si on considère une fonction d'Orlicz convexe $F(x)$ telle que $\frac{F(x)}{x^2}$ n'est pas de comportement « régulier » on ne sait rien, ni du point de vue probabilités, ni du point de vue Banach. Il y a là une voie de recherche intéressante sur des espaces « très souvent très voisins » de l'espace de Hilbert et « très souvent très éloignés ».

Pour terminer nous devons souligner l'apport important apporté par J. Lindenstrauss et L. Tzafriri à ces problèmes en ce qui concerne les espaces de suites, le développement qu'a apporté H. Rosenthal (en particulier pour étudier les espaces complétés de L^p) à certaines des méthodes que nous avons introduites auparavant et reprises ici. Certains résultats nouveaux ont été exposés dans [7].

Principaux résultats et plan.

Dans la partie I, on introduit les principales notations et définitions utilisées et on rappelle certains résultats essentiels. On introduit en particulier la notion d'espace L_G .

Dans la partie II, on étudie la convergence dans L_G de séries aléatoires de variables aléatoires (indépendantes, échangeables, accroissements de martingales). On donne ainsi une forme assez générale du théorème des 2 séries pour la convergence dans L_G . Grosso modo, pour des variables

centrées, sous les hypothèses étudiées, on a $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G

si et seulement si $\sum_n EG(c_n X_n)$ converge. Cette partie donne des résultats purement probabilistes et pose quelques problèmes qui nous semblent intéressants par eux-mêmes.

Soit G une fonction d'Orlicz, l_G l'espace de suites associé, $L_G[0,1]$ l'espace de fonctions associé avec les conventions habituelles. On suppose $G \in (\Delta_2)$. On note $\bar{C}(A)$ le convexe fermé engendré pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts par une famille A de fonctions d'Orlicz.

Soit B un espace de Banach symétrique. On montre dans la partie III que B se plonge dans L_G si et seulement si B est isomorphe à l_g avec

$$g \in \bar{C} \left(\frac{G(\lambda x) \wedge \lambda^2 x^2}{G(\lambda) \wedge \lambda^2}, \lambda \in]0, \infty[\right) \quad \text{si } \frac{G(x)}{x^2} \text{ est décroissante,}$$

$$g \in \bar{C} \left(x^2, \lim_{\mathcal{U}} \frac{G(\lambda x)}{G(\lambda)}, \mathcal{U} \text{ ultrafiltre à l'infini} \right) \quad \text{si } \frac{G(x)}{x^2} \text{ est croissante.}$$

PREMIÈRE PARTIE

DÉFINITIONS ET RAPPELS

I. Sur certaines classes de fonctions.

1. On note K la classe des fonctions réelles G , définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, continues, paires, non décroissantes sur $\mathbb{R}^+$, telles que $G(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, $G(0) = 0$, $G(1) = 1$ et $G(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Pour $G \in K$, on note $L_G(E, \mathcal{T}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables réelles f , définies sur l'espace de mesure $(E, \mathcal{T}, \mu)$, μ σ -finie, pour lesquelles il existe une constante $\theta > 0$ telle que $\int_E G\left(\frac{f}{\theta}\right) d\mu < \infty$. L'espace $L_G(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace vectoriel qui peut être muni d'une F -norme τ_G définie par

$$\tau_G(f) = \inf \left\{ \theta > 0, \int_E G\left(\frac{f}{\theta}\right) d\mu \leq \theta \right\} \quad [13].$$

Lorsque $(E, \mathcal{T}, \mu)$ est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni de sa tribu habituelle et de la mesure de Haar $\delta_{\mathbb{N}}$, on note l_G .

Si $G \in K$ est de plus convexe, on dit que c'est une fonction d'Orlicz. L'espace L_G peut alors être muni d'une norme

$$\|f\|_G = \inf \left\{ \theta > 0, \int_E G\left(\frac{f}{\theta}\right) d\mu \leq 1 \right\}$$

qui en fait un espace de Banach [9].

On dit qu'une fonction G de K satisfait à la condition (Δ_λ) , $\lambda > 1$, en symbole $G \in (\Delta_\lambda)$, s'il existe une constante $k_\lambda > 1$ telle que $G(\lambda x) \leq k_\lambda G(x)$ pour tout x . Si cette condition est satisfaite pour $x \geq x_\lambda > 0$ (respectivement pour $0 \leq x \leq x_\lambda$) on dit que G satisfait la condition Δ_λ pour les grandes valeurs de x et on écrit (Δ_λ^x) (resp. pour les petites valeurs de x (Δ_λ^0)). En fait il est équivalent de dire que $G \in (\Delta_\lambda)$ et $G \in (\Delta_2)$, et c'est cette notation que nous utiliserons.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes : a) $G \in (\Delta_2)$; b) L_G est séparable, c) $\int_E G(f_n) d\mu \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ implique $\tau_G(f_n) \rightarrow 0$ [9].

Si G est une fonction d'Orlicz satisfaisant à la condition (Δ_2) , l'espace $L_G(E, \mathcal{T}, \mu)$ est constitué des fonctions f telles que $\int_E G(f) d\mu < \infty$. De plus la norme $\|f\|_G$ est telle que $\int_E G\left(\frac{f}{\|f\|_G}\right) d\mu = 1$.

On dit que $G \in K$ satisfait à la condition (Δ'_λ) , $\lambda > 1$, noté $G \in (\Delta'_\lambda)$ s'il existe une constante $h_\lambda > 1$ telle que $G(\lambda x) \geq h_\lambda G(x)$ pour tout x . On définit comme ci-dessus les conditions (Δ'^0_λ) et (Δ'^x_λ) .

Deux fonctions de K , soient G_1 et G_2 , sont dites équivalentes, $G_1 \sim G_2$, s'il existe des constantes a, b, α, β , positives telles que l'on ait, pour tout x ,

$$aG_1(\alpha x) \leq G_2(x) \leq bG_1(\beta x)$$

Lorsque la relation $(\sim)$ a lieu pour $x \geq x_0 > 0$ (resp. $x_0 \geq x \geq 0$) G_1 et G_2 sont dites équivalentes pour les grandes valeurs de x , $G_1 \overset{x}{\sim} G_2$ (resp. pour les petites valeurs de x , $G_1 \overset{0}{\sim} G_2$).

On rappelle les résultats suivants utiles pour la suite [13] : les propriétés $G \in (\Delta_2)$ et $G \sim H$ avec $H(x) = J(x^r)$ où J est une fonction concave de K sont équivalentes ; les propriétés $G \in (\Delta'_\lambda)$, $\lambda > 1$ et $G \sim H$ avec $H(x) = J(x^s)$ où J est une fonction convexe de K sont équivalentes ; une condition nécessaire et suffisante pour que $G \sim H$ avec H convexe (resp. concave) est qu'il existe des constantes positives a et α telles que

$$\begin{aligned} \frac{G(x_2)}{x_2} &\geq \frac{aG(\alpha x_1)}{x_1} && \text{pour } x_2 \geq x_1 \geq 0 \\ \left(\text{resp. } \frac{G(x_2)}{x_2} &\leq \frac{aG(\alpha x_1)}{x_1} \right. && \left. \text{pour } x_2 \geq x_1 \geq 0 \right) \end{aligned}$$

Ces conditions restent valables si on considère les relations $\approx$ et les conditions $\Delta_2^\approx$ et $\Delta_\lambda^\approx$.

Si $G_1 \sim G_2$, alors $L_{G_1}(E, \mathcal{T}, \mu) = L_{G_2}(E, \mathcal{T}, \mu)$; si $\mu(E) < \infty$ et $G_1 \approx G_2$, alors $L_{G_1}(E, \mathcal{T}, \mu) = L_{G_2}(E, \mathcal{T}, \mu)$; si $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{T}, \delta_{\mathbb{N}})$ et $G_1 \overset{0}{\sim} G_2$, alors $l_{G_1} = l_{G_2}$. Autrement dit si $\mu(E) < \infty$, $L_G(E, \mathcal{T}, \mu)$ ne dépend que des valeurs de G sur $[1, \infty[$ et l_G ne dépend que des valeurs de G sur $[0, 1]$.

Soit G une fonction convexe de K satisfaisant à la condition (Δ_2) . On peut supposer G dérivable (sinon on remplace G par une fonction équivalente dérivable, ce qui est toujours possible). On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions H_λ , $0 < \lambda < \infty$, définies par $H_\lambda(x) = \frac{G(\lambda x)}{G(\lambda)}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $]0, \infty[$.

La convexité de G et la condition (Δ_2) entraînent, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$1 \leq \frac{xG'(x)}{G(x)} \leq k_2 - 1$$

où k_2 est la constante associée à la condition (Δ_2) pour G . D'où pour tout $\lambda > 0$,

$$1 \leq x \frac{H'_\lambda(x)}{H_\lambda(x)} = \lambda x \frac{G'(\lambda x)}{G(\lambda x)} \leq k_2 - 1.$$

Sur tout compact $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, la famille $\mathcal{H}$ est donc équicontinue. Elle est par conséquent relativement compacte dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \infty[$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

On note $\lim_0 \mathcal{H} = \{ \lim_{\mathcal{U}} H_\lambda; \mathcal{U} \text{ ultrafiltres sur l'ensemble des paramètres } \lambda \text{ convergeant vers } 0 \}$ et $\lim_\infty \mathcal{H} = \{ \lim_{\mathcal{U}} H_\lambda; \mathcal{U} \text{ ultrafiltres sur l'ensemble des paramètres } \lambda \text{ convergeant vers l'infini} \}$. Les ensembles

$$\lim_0 \mathcal{H}, \lim_\infty \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \cup \lim_0 \mathcal{H} \cup \lim_\infty \mathcal{H}$$

sont compacts. C'est un ensemble formé de fonctions croissantes, convexes, tendant vers 0 à l'origine (ce qui permet de les considérer comme des fonctions continues sur $[0, \infty[$).

On note $C(G)$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme $\int \frac{G(\lambda x)}{G(\lambda)} d\mu(\lambda)$ avec μ probabilité sur $]0, \infty[$, $E_0(G)$ l'enveloppe convexe (donc compacte) de $\mathcal{H}_0$, et $E_x(G)$ l'enveloppe convexe

de $\mathcal{H}_x$. Enfin $\overline{C(G)}$ désigne l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire aussi l'enveloppe convexe fermée de $C(G)$, $E_0(G)$ et $E_\infty(G)$.

Si G est définie sur $[1, \infty[$ (resp. $[0, 1]$), on peut définir des ensembles du même type que l'on note $C_{1, \infty}(G)$ (resp. $C_{0, 1}(G)$) par exemple.

II. Classes $K(2, \beta)$ et fonctions de type négatif.

On note $K(2, \beta)$, $0 \leq \beta < 2$, l'ensemble des classes (pour la relation $\sim$) de fonctions de K dans lesquelles il existe deux éléments G_1 et G_2 tels que $\frac{G_1(x)}{x^2}$ soit décroissante pour $x > 0$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G_1(x)}{x^2} = 0$ et $\frac{G_2(x)^2}{x^\beta}$ soit croissante pour $x > 0$, la limite quand $x \rightarrow \infty$ de $\frac{G_2(x)}{x^\beta}$ étant infinie. Ce sont essentiellement les classes $K(2, 0)$ et $K(2, 1)$ qui interviendront dans la suite.

On note $K^*(2, 1)$ la classe duale de $K(2, 1)$, c'est-à-dire celle pour laquelle il existe une fonction G telle que $\frac{G(x)}{x^2}$ soit croissante pour $x > 0$.

On dit qu'une fonction réelle ψ de la variable réelle est de type négatif si

- 1) ψ est continue, paire, telle que $\psi(0) = 0$
- 2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous $t_1, \dots, t_n$ réels et tous $\rho_1, \dots, \rho_n$ réels tels que

$$\sum_1^n \rho_j = 0, \quad \sum_j \sum_k \rho_j \rho_k \psi(t_j - t_k) \leq 0.$$

La formule de Lévy permet d'écrire :

$$\psi(t) = \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_0^\infty (1 - \cos tx) dL(x)$$

où $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ et dL est une mesure de Lévy sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire telle que

$$\int_1^\infty dL(x) < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^2 dL(x) < \infty.$$

On associe la fonction de Lévy L définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $L(x) = \int_x^\infty dL(y)$.

Les classes $K(2, 1)$ et $K(2, 0)$ ont été caractérisées dans [3]. Rappelons celle de $K(2, 0)$.

PROPOSITION 1.2.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) $G \in K(2, 0)$.

2) Il existe une mesure de Lévy dM telle que

$$G(x) \sim \int_0^x (x^2 u^2 \wedge 1) dM(u).$$

3) Il existe une fonction de type négatif ψ , équivalente à une fonction croissante, telle que $G \sim \psi$.

Remarquons que pour qu'il existe un $\beta > 0$ tel que $G \in K(2, \beta)$ il faut et il suffit que $G \in (\Delta_2)$.

Dans ce travail, c'est souvent soit pour les grandes valeurs de x , soit pour les petites valeurs de x , que le comportement de la fonction G nous importera. Or si on modifie la mesure de Lévy associée à G pour les grandes valeurs de u , on obtient une fonction G' , équivalente à G pour les petites valeurs de x , $G' \overset{0}{\sim} G$. De même pour les grandes valeurs.

On sera ainsi amené à ne considérer la mesure de Lévy associée à G que définie sur une partie de la droite, en particulier à représenter G par

$$G(x) = \int_0^1 (x^2 u^2 \wedge 1) dM(u)$$

ou quand nous considérerons G comme une fonction de type négatif par

$$G(x) = \int_0^1 (1 - \cos ux) dM(u).$$

La fonction ainsi obtenue sera donc une fonction équivalente à G pour les grandes valeurs de x et à x^2 pour les petites valeurs de x .

III. Variétés linéaires engendrées par des suites de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si G est une fonction de K , on note $[X, G]$ le complété pour la métrique associée à G de la variété constituée des combinaisons linéaires des X_n .

A X variable aléatoire, on associe F_X , sa fonction de répartition, ν_X sa loi de probabilité, φ_X sa fonction caractéristique

$$\left(\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) \right)$$

Lorsque X est indéfiniment divisible, $\varphi_X(t) = e^{-\psi_X(t)}$ avec ψ_X fonction de type négatif; ψ_X est la deuxième fonction caractéristique de X . Le symbole $E(X)$ désigne l'espérance mathématique de la variable X ; par exemple

$$EG(X) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dF_X(x);$$

on note $\sigma_X^2 = E(X - E(X))^2$ la variance de X .

Tous les termes de la théorie des probabilités utilisés dans ce travail sont définis dans [12] et [14].

DEUXIÈME PARTIE

CONVERGENCE DE CERTAINES SÉRIES DE VARIABLES ALÉATOIRES DANS L_G

1. Remarques générales.

1. INTRODUCTION

Soit G une fonction de la classe K et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, G -intégrables. Le but de cette partie est d'étudier les espaces $[X, G]$, sous-espaces fermés de $L_G(\Omega, \mathcal{A}, P)$ engendrés par les combinaisons linéaires des variables X_n .

Les techniques utilisées et les résultats obtenus diffèrent selon les conditions supplémentaires imposées aux variables et surtout à la fonction G . Nous nous attacherons à rappeler les résultats que nous utiliserons, de façon à rendre ce texte abordable par des lecteurs non probabilistes.

Les hypothèses que nous serons amenés à faire sur les variables aléatoires X_n seront une des hypothèses suivantes : indépendance, échangeabilité, ε -invariance, accroissements d'une martingale. Quant à la fonction G , nous examinerons les cas $G \in K^*(2,1)$, $G \in K(2,1)$ et $G \in K(2,0)$; dans le premier de ces cas, nous supposons aussi le plus souvent $G \in (\Delta_2)$. Nous n'avons pas, pour le moment de résultat significatif lorsque le comportement de $\frac{G(x)}{x^2}$ est quelconque.

Le résultat essentiel est que la convergence dans L_G de $\sum_n c_n X_n$, où

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, est étroitement liée et de manière simple au comportement des suites numériques

$$EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k \leq n} EG(c_k X_k).$$

Dans ce qui suit, on note $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires considérées. Lorsque ces variables sont intégrables, on suppose que leur espérance mathématique est nulle ($E(X_n) = 0$). On note φ_n la fonction caractéristique de X_n ($\varphi_n(t) = E(e^{itX_n})$). Les σ -algèbres $\mathcal{B}_n$ sont les σ -algèbres respectivement engendrées par les variables $(X_k, k \leq n)$. On désigne par $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

Faisons tout de suite une remarque immédiate sur $[X, G]$.

REMARQUE 2.1.1. — Si $G \in (\Delta_2)$ et est telle que pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right)$ est une fonction croissante de n , la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $[X, G]$ (au sens de la F-norme définie par G).

2. INÉGALITÉS DE JENSEN

Comme nous l'avons vu dans la première partie, lorsque $G \in K(2,1)$ ou $G \in K^*(2,1)$, G peut être choisie convexe (à une équivalence près). L'inégalité de Jensen, $EG(X) \geq G(EX)$ (resp. $EG(X) \leq G(EX)$) valable dès que G est convexe (resp. concave) et X une variable G -intégrable se généralise au cas des espérances conditionnelles : $E^{\mathcal{B}}G(X) \geq G(E^{\mathcal{B}}X)$ si G est convexe et X G -intégrable (resp. $E^{\mathcal{B}}G(X) \leq G(E^{\mathcal{B}}X)$ si G est concave). En conséquence,

a) Si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale G -intégrable, d'accroissements X_n (ou $c_n X_n$) définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P; (\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et si G est convexe,

$$EG(Y_{n+1}) = EE^{\mathcal{B}_n}G(Y_{n+1}) \geq EG(E^{\mathcal{B}_n}Y_{n+1}) = EG(Y_n),$$

d'où la croissance en n de $EG(Y_n)$.

b) En particulier si les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes et centrées, $EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right)$ est croissante dès que G est convexe. D'où :

PROPOSITION 2.1.2. — Si G est une fonction convexe de $\mathbf{K}$ avec $G \in (\Delta_2)$ et si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, G -intégrables, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite basique inconditionnelle de L_G .

En effet, soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite fixée de nombres prenant les valeurs ± 1 . Posons

$$S_n = \sum_{\substack{\varepsilon_k = +1 \\ k \leq n}} X_k, \quad T_n = \sum_{\substack{\varepsilon_k = -1 \\ k \leq n}} X_k$$

Alors
$$S_n - T_n = \sum_{k \leq n} \varepsilon_k X_k \quad \text{et} \quad S_n + T_n = \sum_{k \leq n} X_k.$$

L'inégalité de Jensen entraîne

$$EG(S_n) \leq EG(S_n + T_n) \quad \text{et} \quad EG(T_n) \leq EG(S_n + T_n)$$

puisque les variables S_n et T_n sont indépendantes et centrées. Il s'ensuit

$$EG(S_n - T_n) \leq k_2(EG(S_n) + EG(T_n)) \leq 2k_2 EG(S_n + T_n).$$

Pour tout choix de $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a par conséquent

$$EG\left(\sum_{k \leq n} \varepsilon_k X_k\right) \leq 2k_2 EG\left(\sum_{k \leq n} X_k\right),$$

ce qui montre bien l'inconditionnalité de la suite basique $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [11].

3. MARTINGALES

Plusieurs résultats classiques en théorie des martingales nous seront utiles (cf. [14] par exemple pour les définitions), lorsque G est une fonction convexe de $K(2,1)$ ou $K^*(2,1)$ (donc en particulier quand $\frac{G(x)}{x}$ est une fonction croissante de x). En effet lorsque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées, ou lorsque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires ε -invariantes, les sommes partielles

$$Y_n = \sum_{k \leq n} c_n X_n$$

constituent, pour tout choix des constantes $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une martingale pour la suite de σ -algèbres $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La proposition suivante se démontre de façon classique en théorie des martingales (voir par exemple [14]).

PROPOSITION 2.1.3. — Soit G une fonction convexe de K satisfaisant

la condition $\frac{G(x)}{x}$ croissante, et soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale G -intégrable sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P; (\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}})$; alors si $\lim_n EG(Y_n) < \infty$, la martingale $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est régulière et convergente dans L_G vers sa limite sûre Y .

Si de plus il existe un nombre $\lambda > 1$ telle que G satisfasse à la condition Δ'_λ , alors la variable aléatoire $\sup_n |Y_n|$ vérifie l'inégalité

$$\|\sup_n |Y_n|\|_G \leq A \|Y\|_G$$

Remarquons que si les accroissements X_n de la martingale sont constitués de variables aléatoires indépendantes, la condition $\frac{G(x)}{x}$ croissante n'est plus nécessaire, la fonction $G(x) = x$ convenant dans ce cas.

D'autre part si $S = \left(\sum_n X_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$, Burkholder, Davis et Gundy ont montré que pour toute fonction convexe de K dans (Δ_2) ,

$$(2.1) \quad aEG(S) \leq EG(\sup_n |Y_n|) \leq AEG(S)$$

où les constantes a et A ne dépendent que de la constante k_2 de G (par exemple [4]).

Une autre inégalité, valable celle-là pour toute fonction G de K dans (Δ_2) et toute martingale G -intégrable nous sera utile.

$$\text{Si } s = \left[\sum_n E^{\mathcal{B}_{n-1}}(X_n^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \text{ on a [4],}$$

$$(2.2) \quad EG(\sup_n |Y_n|) \leq A[EG(s) + EG(\sup_n |X_n|)]$$

où la constante A ne dépend encore que de k_2 .

4. SYMÉTRISATION

Soit maintenant $(X_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite symétrisée de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $X_n^s = X_n - X'_n$, la suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant indépendante de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X'_n de même loi de probabilité que X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les variables X_n^s sont symétriques et de fonctions caractéristiques $|\varphi_n|^2$, non négatives.

Supposons G convexe. Toute variable G -intégrable étant intégrable, prenons les variables X_n centrées. Alors

LEMME 2.1.4. — Si G est une fonction convexe de K dans (Δ_2) et si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est centrée, les espaces de Banach $[X, G]$ et $[X^s, G]$ sont isomorphes, la constante d'isomorphisme ne dépendant que de G .

Puisque les variables aléatoires $\sum_{k \leq n} c_k X_k$ et $\sum_{k \leq n} c_k X'_k$ sont indépendantes, l'inégalité de Jensen implique

$$EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k - \sum_{k \leq n} c_k X'_k\right) = EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k^s\right)$$

La condition (Δ_2) donne

$$EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k - \sum_{k \leq n} c_k X'_k\right) \leq k_2 \left(EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) + EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X'_k\right) \right)$$

où k_2 est la constante associée à la condition (Δ_2) . Soit finalement

$$(2.3) \quad EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k^s\right) \leq 2k_2 EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right).$$

Lorsque G est une fonction convexe, le lemme 2.1.4 montre qu'on peut donc toujours ramener l'étude de $[X, G]$ à l'étude d'un espace $[X^s, G]$ engendré par des variables symétriques, de fonctions caractéristiques non négatives. Ce n'est pas le cas lorsque G n'est pas convexe comme le montre l'exemple suivant : X_n est pour chaque n une variable aléatoire à 2 valeurs, avec

$$P(X_n = -1) = \frac{2^n}{2^n + 1} \quad \text{et} \quad P(X_n = 2^n) = \frac{1}{2^n + 1}.$$

Alors pour tout $0 \leq p < 1$, $[X, p]$ est l'espace des séries convergentes alors que $[X^s, p]$ est un espace d'Orlicz que l'on calculera plus loin.

Néanmoins si l'on suppose les variables X_n symétriques, c'est-à-dire de fonctions caractéristiques réelles, on peut encore ramener l'étude de $[X, G]$ à l'étude d'un espace $[X^s, G]$ engendré par des variables de fonctions caractéristiques non négatives et ceci pour toute fonction G de K dans (Δ_2) .

LEMME 2.1.5. — Si G est une fonction de K dans (Δ_2) et si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est symétrique, les espaces $[X, G]$ et $[X^s, G]$ sont isomorphes.

Si $G \in K$, pour x et y réels,

$$G(x) + G(y) \leq 2(G(x + y) + G(x - y)).$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) + \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X'_k\right) &\leq 2 \left[\text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k + \sum_{k \leq n} c_k X'_k\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k - \sum_{k \leq n} c_k X'_k\right) \right]. \end{aligned}$$

La symétrie des variables X_n entraîne que les variables $\sum_{k \leq n} c_k X_k$ sont aussi symétriques et

$$\begin{aligned} \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k + \sum_{k \leq n} c_k X'_k\right) &= \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k - \sum_{k \leq n} c_k X'_k\right) \\ &= \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k^s\right) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq 2 \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k^s\right).$$

En utilisant la condition (Δ_2) , on obtient enfin

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k^s\right) \leq 2k_2 \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right).$$

5. ε -INVARIANCE

Rappelons qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles est dite ε -invariante si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout n -uplet $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ constitué d'éléments distincts, les 2^n vecteurs aléatoires n -dimensionnels

$$(\varepsilon_{k_1} X_{k_1}, \dots, \varepsilon_{k_n} X_{k_n}), \quad \varepsilon_{k_j} = \pm 1,$$

ont tous même loi de probabilité. Une suite de variables G -intégrables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite G - ε -invariante si pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels,

$$\text{EG}\left(\sum_{j=1}^n c_{k_j} \varepsilon_{k_j} X_{k_j}\right)$$

ne dépend pas du choix des ε_n . Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ε -invariante est clairement G - ε -invariante. On a

PROPOSITION 2.1.6. — Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires G - ε -invariantes pour $G \in K$; on a

$$\text{Si } G \in K^*(2,1); \quad EG\left(\sum_n c_n X_n\right) \geq \sum_n EG(c_n X_n)$$

$$\text{Si } G \in K(2,0); \quad EG\left(\sum_n c_n X_n\right) \leq \sum_n EG(c_n X_n)$$

Si $G \in K^*(2,1)$, il est facile de voir que pour x et y réels,

$$G(x) + G(y) \leq \frac{1}{2}(G(x+y) + G(x-y)).$$

D'où :

$$EG(c_1 X_1) + EG(c_2 X_2) \leq \frac{1}{2}(EG(c_1 X_1 + c_2 X_2) + EG(c_1 X_1 - c_2 X_2)).$$

La G - ε -invariance de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entraîne

$$EG(c_1 X_1) + EG(c_2 X_2) \leq EG(c_1 X_1 + c_2 X_2),$$

d'où le résultat.

Si $G \in K(2,0)$ la démonstration se fait de la même façon en s'appuyant alors sur l'inégalité

$$G(x) + G(y) \geq \frac{1}{2}(G(x+y) + G(x-y)).$$

Remarquons aussi que si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est G - ε -invariante, elle forme une suite basique inconditionnelle dans L_G puisque toutes les quantités $EG\left(\sum_n c_n \varepsilon_n X_n\right)$ sont égales.

II. Étude de $[X, G]$ pour $G \in K^*(2, 1) \cap (\Delta_2)$.

Dire que $G \in K^*(2,1)$ signifie que $\frac{G(x)}{x^2}$ est une fonction croissante de x .

La fonction U définie par $U(x) = G(\sqrt{|x|})$ est alors équivalente à une fonction convexe. Nous la supposons convexe.

Les techniques de martingales et l'utilisation des inégalités (2,1) et (2,2) sont bien adaptées à la situation présente alors que les techniques de transformation de Fourier conviennent au cas $\frac{G(x)}{x^2}$ décroissante. Cette diffé-

rence de techniques recouvre une différence profonde dans les résultats sur les isomorphismes entre espaces invariants par réarrangements, le cas $\frac{G(x)}{x^2}$ décroissante étant plus riche en isomorphismes. Les inégalités de martingale sont en fait ici des inégalités sur les variables de Bernoulli.

Les résultats obtenus généralisent ceux de H. Rosenthal [16] obtenus dans le cas L^p , $p > 2$, pour des variables indépendantes.

1. CAS DES MARTINGALES

Soit une martingale G -intégrable, d'accroissements $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P; (\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}})$. L'espace $[X, G]$ est alors constitué des martingales d'accroissements $(c_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ G -intégrables, avec $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de réels. On suppose $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, de norme $\| (c_n) \|_2$. On se propose de rechercher des conditions pour qu'une martingale d'accroissements $(c_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit dans $[X, G]$.

Condition suffisante.

De (2,1), on tire

$$EG \left(\sup_n \left| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right| \right) \leq AEG \left(\left(\sum_n c_n^2 X_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Si $G \in (\Delta_2)$, il en est de même de U , d'où

$$\begin{aligned} U \left(\sum_n c_n^2 X_n^2 \right) &= U \left(\| (c_n) \|_2^2 \sum_n \frac{c_n^2}{\| (c_n) \|_2^2} X_n^2 \right) \\ &\leq k(\| (c_n) \|_2) U \left(\sum_n \frac{c_n^2}{\| (c_n) \|_2^2} X_n^2 \right) \end{aligned}$$

avec $k(\| (c_n) \|_2) = 1$ si $\| (c_n) \|_2 \leq 1$

et telle que

$$G(\| (c_n) \|_2 x) \leq k(\| (c_n) \|_2) G(x) \quad \text{si} \quad \| (c_n) \|_2 > 1.$$

La convexité de U entraîne

$$U \left(\sum_n \frac{c_n^2}{\| (c_n) \|_2^2} X_n^2 \right) \leq \sum_n \frac{c_n^2}{\| (c_n) \|_2^2} U(X_n^2),$$

soit finalement

$$EG \left(\left(\sum_n c_n^2 X_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \frac{k(\| (c_n) \|_2)}{\| (c_n) \|_2} \sum_n c_n^2 EG(X_n).$$

La condition $\sum_n c_n^2 \mathbb{E}G(X_n) < \infty$ implique donc que $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G .

Conditions nécessaires.

Remarquons d'abord que la croissance de $\frac{G(x)}{x^2}$ implique en particulier $G(2x) \geq 4G(x)$; la fonction G satisfait donc à la condition Δ'_2 et la proposition 2.1.3 entraîne que

$$\left\| \sup_n \left| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right| \right\|_G \leq A \left\| \sum_n c_n X_n \right\|_G.$$

Si $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , alors $\left\| \sum_n c_n X_n \right\|_G < \infty$,

d'où $\left\| \sup_n \left| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right| \right\|_G < \infty$,

et par conséquent

$$\mathbb{E}G\left(\sup_n \left| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right| \right) < \infty.$$

De (2,1) on tire

$$\mathbb{E}G\left(\sup_n \left| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right| \right) \geq a \mathbb{E}G\left(\left(\sum_n c_n^2 X_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right);$$

l'inégalité de Jensen appliquée à U donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}G\left(\left(\sum_n c_n^2 X_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) &= \mathbb{E}U\left(\sum_n c_n^2 X_n^2\right) \geq \mathbb{E}U\left(\sum_n c_n^2 X_n^2\right) \\ &= G\left(\left(\sum_n c_n^2 \mathbb{E}(X_n^2)\right)^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Si $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , on a donc $\sum_n c_n^2 \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$.

D'autre part, la fonction U est clairement suradditive, d'où

$$G\left(\left(\sum_n x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = U\left(\sum_n x_n^2\right) \geq \sum_n U(x_n^2) = \sum_n G(x_n).$$

On en déduit

$$\text{EG}\left(\left(\sum_n c_n^2 X_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \geq \sum_n \text{EG}(c_n X_n).$$

La convergence de $\sum_n c_n X_n$ dans L_G entraîne donc que $\sum_n \text{EG}(c_n X_n) < \infty$.

Supposons qu'il existe deux constantes, m et M , telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < m \leq \frac{\text{EG}(X_n)}{\text{EX}_n^2} \leq M < \infty.$$

On peut toujours choisir les variables X_n telles que $\text{EX}_n^2 = 1$ pour tout n (il suffit, si ce n'est pas le cas, de remplacer X_n par $\frac{X_n}{[\text{E}(X_n^2)]^{1/2}}$); l'hypothèse devient : $0 < m \leq \text{EG}(X_n) \leq M < \infty$.

Avec cette hypothèse, on a

$$\text{EG}\left(\sup_{k \leq n} \left| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right| \right) \leq \frac{k(\|(c_n)\|_2)}{\|(c_n)\|_2^2} \sum_n c_n^2 M = k(\|(c_n)\|_2) M.$$

On en déduit :

PROPOSITION 2.2.1. — Soit $G \in K^*(2,1) \cap (\Delta_2)$. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles constituant les accroissements d'une martingale G -intégrable définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P; (\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}})$, telles que

$$\text{EX}_n^2 = 1, \quad 0 < m \leq \text{EG}(X_n) \leq M < \infty,$$

pour tout n et si $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels, $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G

si et seulement si $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$. Autrement dit, l'espace $[X, G]$ est isomorphe à l^2 .

Remarquons que si $\text{EX}_n^2 = \sigma_n^2$ pour tout n , avec

$$0 < m \leq \frac{\text{EG}(X_n)}{\text{EX}_n^2} \leq M < \infty,$$

on obtiendrait l'espace $l^2(\sigma_n^2)$, avec poids.

REMARQUE 2.2.2. — Le résultat obtenu s'applique particulièrement au cas où la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires ε -invariante. On sait [2] que les variables X_n sont alors les accroissements d'une martingale dès qu'elles sont intégrables.

REMARQUE 2.2.3. — Les accroissements des martingales G -intégrables ont donc la propriété suivante : si $\frac{EG(X_n)}{EX_n^2}$ est uniformément borné supérieurement et inférieurement, alors les topologies de L_G et de L^2 coïncident sur la variété engendrée par les variables X_n ; donc, par le théorème d'Assouad [1] toutes les topologies L^p , pour lesquelles $E|X_n|^p < \infty$, coïncident, en particulier celle de L^0 .

Ce type de résultat pose le problème suivant : soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires centrées, orthogonales, G -intégrables, telles que

$$0 < m \leq \frac{EG(X_n)}{EX_n^2} \leq M < \infty.$$

A quelles conditions les topologies de L_G et L^2 coïncident-elles sur le sous-espace vectoriel de L_G engendré par les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en particulier celles de L^{2p} et de L^2 ? Ceci implique, toujours par le théorème d'Assouad, la coïncidence de ces topologies avec celle de L^0 .

Un exemple de variables, ne constituant pas des accroissements de martingale, et ayant cette propriété est celui des chaos de Wiener et des exemples voisins fabriqués à l'aide de produits tensoriels symétriques (cf. [17]).

2. CAS DES VARIABLES INDÉPENDANTES

Supposons maintenant que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées, G -intégrables, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nous allons montrer que les conditions nécessaires obtenues dans le cas précédent sont maintenant des conditions nécessaires et suffisantes. Pour cela nous utilisons (2,2).

Les variables X_n étant indépendantes, $s = \left(\sum_n E(c_n^2 X_n^2) \right)^{\frac{1}{2}}$ et (2.2) s'écrit :

$$EG \left(\sup_n \left| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right| \right) \leq A \left[G \left(\left(\sum_n E(c_n^2 X_n^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right) + EG \left(\sup_n c_n X_n \right) \right].$$

Puisque

$$G \left(\sup_n |c_n X_n| \right) \leq \sum_n G(c_n X_n) \quad \text{et} \quad G \left(\sum_n c_n X_n \right) \leq G \left(\sup_n \left| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right| \right),$$

on obtient

$$EG \left(\sum_n c_n X_n \right) \leq A \left[G \left(\left(\sum_n E(c_n^2 X_n^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \sum_n EG(c_n X_n) \right],$$

et il s'ensuit que si $\sum_n c_n^2 E(X_n^2) < \infty$ et $\sum_n EG(c_n X_n) < \infty$, alors $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G . Ces conditions sont donc nécessaires et suffisantes pour que $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G .

Si on fait l'hypothèse $EX_n^2 = 1$ pour tout n , ces conditions deviennent

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2 \quad \text{et} \quad \sum_n EG(c_n X_n) < \infty.$$

Bien entendu si on suppose que pour tout n , $0 < m \leq \frac{EG(X_n)}{EX_n^2} \leq M < \infty$, la proposition 2.2.1 est valable si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendante. Remarquons que puisque $\frac{G(x)}{x^2}$ est croissante et $G(1) = 1$, on a $G(\lambda x) \leq \lambda^2 G(x)$ si $|\lambda| \leq 1$. D'où, si $EX_n^2 = 1$,

$$EG(c_n X_n) = EG\left(\frac{c_n}{\|(c_n)\|_2} \|(c_n)\|_2 X_n\right) \leq \frac{c_n^2}{\|(c_n)\|_2^2} EG(\|(c_n)\|_2 X_n) \\ \leq \frac{k(\|(c_n)\|_2) c_n^2 \cdot M}{\|(c_n)\|_2^2},$$

$$\text{et} \quad \sum_n EG(c_n X_n) \leq k(\|(c_n)\|_2) M < \infty,$$

où $k(\|(c_n)\|_2)$ est la constante déjà apparue dans le paragraphe précédent. On a finalement

THÉORÈME 2.2.4. — Soit $G \in K^*(2,1) \cap (\Delta_2)$. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles, centrées, de variances égales à 1, G -intégrables, indépendantes, définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et si $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels, $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G si et seulement si $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ et $\sum_n EG(c_n X_n) < \infty$.

Si les variances σ_n^2 des variables X_n sont quelconques, la condition $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ est remplacée par la condition $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\sigma_n^2)$, espace l^2 avec les poids σ_n^2 .

Il est immédiat que l'ensemble des suites $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_n EG(c_n X_n) < \infty$$

forme un espace de Banach $l_{(q_n)_{n \in \mathbb{N}}}$, la norme de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans cet espace étant définie par $\|(c_n)\|_{(q_n)} = \inf \left\{ \theta > 0 : \sum_n \text{EG} \left(\frac{c_n}{\theta} X_n \right) \leq 1 \right\}$. Le sous-espace $[X, G]$ de L_G est donc isomorphe à un espace de Banach de suite $l_2 \cap l_{(q_n)_{n \in \mathbb{N}}}$.

III. Étude de $[X, G]$ pour $G \in K(2, 0)$.

Si $G \in K(2, 0)$, G est équivalente à une fonction de la forme

$$\int_0^x (1 - \cos ux) dM(u)$$

où dM est une mesure de Lévy associée à G (cf. première partie). Puisque nous étudions un espace de fonctions définies sur un espace de probabilité seules les grandes valeurs de x jouent un rôle et par conséquent on peut considérer la mesure de Lévy de G uniquement pour les petites valeurs de u et prendre G sous la forme

$$G(x) = \int_0^1 (1 - \cos ux) dM(u),$$

ce que nous ferons. Nous formulerons à la fin de cette partie les résultats concernant les fonctions G définies sur tout $\mathbb{R}$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires considérées sera constituée de variables symétriques. Par le lemme 2.1.5, on pourra toujours se ramener au cas de variables de fonctions caractéristiques non négatives.

Nous commencerons notre étude par le cas où la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendante.

1. CAS DES VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

Montrons d'abord, que dans ce cas, le résultat suivant, déjà vu dans le cas où G est convexe, reste vrai pour toute fonction G de $K(2, 0)$.

LEMME 2.3.1. — Si $G \in K(2, 0)$ et si les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont symétriques, de fonctions caractéristiques non négatives, G -intégrables et indépendantes, alors, pour toute suite de réels $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\text{EG} \left(\sum_{k \leq n} c_k X_k \right)$ est une fonction croissante de n .

Si $X \in L_G$, $G \in K(2, 0)$

$$\text{EG}(X) = E \left[\int_0^1 (1 - \cos uX) dM(u) \right]$$

La symétrie de X entraîne que $\varphi_X(u) = E(\cos uX)$, d'où, par le théorème de Fubini,

$$EG(X) = \int_0^1 (1 - \varphi_X(u)) dM(u).$$

Soit φ_n la fonction caractéristique de X_n . L'indépendance des X_n entraîne

$$\begin{aligned} EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) &= \int_0^1 \left(1 - \sum_{k \leq n} c_k X_k\right) dM(u) \\ &= \int_0^1 \left(1 - \prod_{k \leq n} \varphi_k(c_k u)\right) dM(u), \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque $0 \leq \varphi_k(u) \leq 1$ pour tout u et ceci pour tout k .

On en déduit

LEMME 2.3.2. — Si $G \in K(2,0)$ et si les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont symétriques, G -intégrables et indépendantes, $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G si et seulement si

$$\lim_n \sup EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) < \infty.$$

Supposons d'abord que les variables X_n sont de fonctions caractéristiques $\varphi_n \geq 0$. Si $\lim_n EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) < \infty$, par le théorème de Beppo Levi,

on en déduit que la suite croissante de fonctions $\left(1 - \prod_{k \leq n} \varphi_{c_k X_k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction, soit $1 - \varphi$, presque sûrement pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Il s'ensuit que $\prod_{k \leq n} \varphi_{c_k X_k}$ tend vers φ et $\varphi \neq 0$ dans un ensemble de mesure positive puisque dM est une mesure de Lévy associée à une fonction G telle que $G(x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow \infty$. La série $\sum_n c_n X_n$ converge

donc en loi et par conséquent presque sûrement, puisque les variables X_n sont indépendantes, vers une variable aléatoire Y de fonction caractéristique φ . Le lemme de Fatou entraîne

$$\begin{aligned} E\left(\lim_n G\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k - Y\right)\right) &\leq \lim_n EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k - Y\right) \\ &= \lim_n \int_0^1 \left(1 - \prod_{k \geq n+1} \varphi_{c_k X_k}(u)\right) dM(u) = 0 \end{aligned}$$

La série $\sum_n c_n X_n$ converge donc vers Y dans L_G .

Inversement si $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , alors $\lim_n EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) < \infty$.

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée de variables symétriques quelconques, associations-lui $(X_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des variables symétrisées de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De (2.4) on tire que si $\limsup_n EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) < \infty$, alors

$$\lim_n EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k^s\right) < \infty$$

et $\sum_n c_n X_n^s$ converge dans L_G . Puisque, toujours par (2.4),

$$EG\left(\sum_m^p c_m X_m\right) \leq 2EG\left(\sum_m^p c_m X_m^s\right),$$

la suite $\sum_{k \leq n} c_k X_k$ est de Cauchy dans L_G donc convergente.

Si $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , la suite $\sum_{k \leq n} c_k X_k$ est de Cauchy dans L_G ,

donc aussi la suite $\sum_{k \leq n} c_k X_k^s$ et $\sum_n c_n X_n^s$ converge dans L_G . Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq 2EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k^s\right),$$

on a

$$\limsup_n EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq 2 \lim_n EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k^s\right) < \infty.$$

Ces résultats préliminaires nous permettent de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2.3.3. — Soit G une fonction de $K(2,0)$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, symétriques, G -intégrables. Pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G si et seulement si la série $\sum_n EG(c_n X_n)$ converge.

Montrons d'abord le résultat suivant :

LEMME 2.3.4. — Soit X une variable aléatoire symétrique de L_G , de seconde fonction caractéristique $-\psi_X$; si $EG(X) \leq \frac{1}{4}$, alors $\psi_X(t) \leq 1$ pour $|t| \leq 1$.

Soit $|t| \leq 1$. Si $G \in K(2,0)$

$$EG(X) \geq E(1 \wedge X^2) \geq E(1 \wedge t^2 X^2).$$

Puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF_X(x) \leq 2E[1 \wedge t^2 X^2] \leq 2EG(X).$$

on a, si $EG(X) \leq \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF_X(x) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF_X(x) \\ &\geq 1 - 2EG(X) \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De l'inégalité $|\log(1 - |u|)| \leq 2|u|$ pour $|u| \leq \frac{1}{2}$, on tire

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= -\log\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF_X(x)\right) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF_X(x) \\ &\leq 4EG(X), \end{aligned}$$

soit $\psi_X(t) \leq 1$ si $|t| \leq 1$.

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que $|c_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq \frac{1}{4}$. Alors $\psi_{\sum_{k \leq n} c_k X_k}(t) \leq 1$ et l'indépendance des variables X_n entraîne

$$\sum_{k \leq n} \psi_k(c_k t) \leq 1 \quad \text{si} \quad \psi_k(t) = -\log \varphi_k(t).$$

Des inégalités $(1 - e^{-1})(1 \wedge x) \leq 1 - e^{-x} < 1 \wedge x$, $x \geq 0$ on tire

$$\begin{aligned} (1 - e^{-1}) \int_0^1 \left(\sum_{k \leq n} \psi_k(c_k u) \right) dM(u) &\leq EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \\ &= \int_0^1 (1 - e^{-\sum_{k \leq n} \psi_k(c_k u)}) dM(u) \leq \int_0^1 \left(\sum_{k \leq n} \psi_k(c_k u) \right) dM(u), \end{aligned}$$

puisque la positivité des fonctions ψ_k fait que $\psi_k(c_k t) \leq 1$ pour $k \leq n$.

Si on suppose que pour tout $k \leq n$, $\text{EG}(c_k X_k) \leq \frac{1}{4}$ (ce qui serait le cas si on prenait G convexe ou les variables X_n de fonctions caractéristiques non négatives), on a de même pour tout $k \leq n$

$$(1 - e^{-1}) \int_0^1 \psi_k(c_k u) \leq \text{EG}(c_k X_k) \leq \int_0^1 \psi_k(c_k u) dM(u)$$

d'où

$$(2.5) \quad (1 - e^{-1}) \sum_{k \leq n} \text{EG}(c_k X_k) \leq \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} \sum_{k \leq n} \text{EG}(c_k X_k).$$

Soit maintenant $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels; supposons, ce qui n'enlève rien à la généralité, que $\text{EG}(X_n) = 1$ pour tout n .

Si $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , la suite $\sum_{k \leq n} c_k X_k$ est de Cauchy dans L_G ;

alors $\sum_m^p c_k X_k$ tend vers 0 dans L_G quand $m, p \rightarrow \infty$, donc aussi

$$\text{EG}\left(\sum_m^p c_k X_k\right).$$

Il existe m_0 tel que $p > m > m_0$ entraîne

$$\text{EG}\left(\sum_m^p c_k X_k\right) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \text{EG}(c_m X_m) \leq \frac{1}{4},$$

d'où aussi $|c_m| \leq 1$. Alors

$$\text{EG}\left(\sum_m^p c_k X_k\right) \geq (1 - e^{-1}) \sum_m^p \int_0^1 \psi_k(c_k u) dM(u) \geq (1 - e^{-1}) \sum_m^p \text{EG}(c_k X_k);$$

la série $\sum_n \text{EG}(c_n X_n)$ est de Cauchy, donc convergente.

Inversement si $\sum_n \text{EG}(c_n X_n)$ converge, il existe m_0 tel que

$$\sum_m^p \text{EG}(c_k X_k) \leq \frac{1}{4} \quad \text{dès que} \quad p > m \geq m_0.$$

Alors

$$\text{EG}(c_k X_k) \geq (1 - e^{-1}) \int_0^1 \psi_k(c_k u) dM(u) \quad \text{et} \quad |c_k| \leq 1 \text{ pour } k \geq m_0.$$

D'où

$$\text{EG}\left(\sum_{m=1}^p c_m X_m\right) \leq \sum_{m=1}^p \int_0^1 \psi_m(c_m u) dM(u) \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} \sum_{m=1}^p \text{EG}(c_m X_m).$$

La suite $\sum_{k \leq n} c_k X_k$ est donc de Cauchy dans L_G et $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G . D'où le résultat.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les espaces étudiés sont des espaces de Banach, c'est-à-dire supposons $G \in K(2,1)$ et convexe (à une équivalence près). On a alors $q_n \in K(2,1)$ et convexe pour tout n . L'espace des suites $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_n q_n(c_n) < \infty$, peut être muni d'une structure d'espace de Banach, soit $l_{(q_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ en posant

$$\|(c_n)\|_{(q_n)} = \inf \left\{ \theta > 0 : \sum_n q_n\left(\frac{c_n}{\theta}\right) = 1 \right\}.$$

Si les variables X_n ont toutes même loi de probabilité, toutes les fonctions q_n sont identiques à une même fonction q et on retrouve l'espace de Banach l_q . On va montrer le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 2.3.5. — *Il existe une constante γ telle que pour toute fonction $G \in K(2,1)$ et toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, centrées, G -intégrables, on puisse trouver une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions d'Orlicz telles que $[X, G]$ soit γ -isomorphe à $l_{(q_n)_{n \in \mathbb{N}}}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, q_n peut se mettre sous la forme $q_n = \text{EG}(X_n) q'_n$ avec $q'_n \in C(G)$.*

Si les variables X_n ont toutes même loi de probabilité, $q_n = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $[X, G]$ est isomorphe à l'espace l_q .

On va montrer la proposition pour le cas où la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est symétrique et on en déduira le résultat par la proposition 2.1.4.

Soit Φ la fonction définie sur la droite réelle par $\Phi(\lambda) = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{G(\lambda x)}{G(x)}$.

Puisque G est convexe et strictement croissante, Φ est une fonction strictement croissante et continue, ainsi que la fonction Φ_1 définie par

$$\Phi_1(\lambda) = \left(\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)^{-1}.$$

On a alors [6], pour $X \in L_G$,

$$\Phi_1(\|X\|_G) \leq EG(X) \leq \Phi(\|X\|_G),$$

et

$$\Phi^{-1}(EG(X)) \leq \|X\|_G \leq \Phi_1^{-1}(EG(X)).$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, symétriques et G -intégrables.

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $c_k = 0$ si $k > n$ et aussi telle que

$$\left\| \sum_n c_n X_n \right\|_G = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}\right).$$

Alors

$$EG\left(\sum_n c_n X_n\right) \leq \frac{1}{4} \text{ et si } q_n(c_n) = EG(c_n X_n),$$

$$(1 - e^{-1}) \sum_n q(c_n) \leq EG\left(\sum_n c_n X_n\right) \leq (1 - e^{-1})^{-1} \sum_n q_n(c_n).$$

De plus, on voit facilement que pour les mêmes fonctions Φ et Φ_1 , on a

$$\Phi^{-1}\left(\sum_n q_n(c_n)\right) \leq \|(c_n)\|_{(q_n)} \leq \Phi_1^{-1}\left(\sum_n q_n(c_n)\right).$$

D'où

$$\Phi^{-1}\left((1 - e^{-1}) \sum_n q_n(c_n)\right) \leq \left\| \sum_n c_n X_n \right\|_G \leq \Phi_1^{-1}\left((1 - e^{-1})^{-1} \sum_n q_n(c_n)\right),$$

et par conséquent

$$\Phi^{-1}((1 - e^{-1})\Phi_1(\|(c_n)\|_{(q_n)})) \leq \left\| \sum_n c_n X_n \right\|_G \leq \Phi_1^{-1}((1 - e^{-1})^{-1}\Phi(\|(c_n)\|_{(q_n)})).$$

On obtient finalement : si $\left\| \sum_n c_n X_n \right\|_G = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$, alors

$$\Phi^{-1}\left((1 - e^{-1})\Phi_1\left(\frac{1}{4}\right)\right) < \|(c_n)\|_{(q_n)} \leq \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{4(1 - e^{-1})}\right)$$

Les bornes peuvent être choisies universelles sur $K(2,1)$ puisque Φ est majorée et minorée uniformément sur $K(2,1)$.

De plus, en notant v_n la loi de probabilité de la variable X'_n ,

$$q_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda x) dv_n(x) = EG(X_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\lambda x)}{G(x)} \frac{G(x)}{EG(X_n)} dv_n(x)$$

et puisque $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x)}{EG(X_n)} dv_n(x) = 1$, on a bien $q_n = EG(X_n)q'_n$ avec $q'_n \in C(G)$.

Le résultat est montré dans le cas des variables X_n symétriques. Par (2,3), on l'étend aux variables centrées. Remarquons que puisque $G \in K(2,1)$, la constante k_2 de (2,3) peut être remplacée par 4.

Si $\frac{G(x)}{x}$ n'est pas une fonction non décroissante, les espaces considérés ne sont plus des espaces de Banach ; on peut définir alors sur L_G une F-norme, $\|X\|_G = \inf \left\{ \theta > 0, EG\left(\frac{X}{\theta}\right) \leq \theta \right\}$ et sur $l_{(q_n)n \in \mathbb{N}}$ une F-norme $\|(c_n)\|_{(q_n)} = \inf \left\{ \theta > 0, \sum_n q_n \left(\frac{c_n}{\theta}\right) \leq \theta \right\}$. Les isomorphismes qu'on peut alors définir sont des isomorphismes topologiques. Néanmoins, s'il existe $\beta > 0$ tel que $G \in K(2, \beta)$, c'est-à-dire tel que $\frac{G(x)}{x^\beta}$ soit croissante pour $x \geq 0$, l'espace L_G peut être muni d'une p -norme. Soit en effet

$$G_\beta(x) = G(|x|^{\frac{1}{\beta}});$$

la fonction G_β est alors équivalente à une fonction convexe [13]. Si θ_X est défini par $EG\left(\frac{X}{\theta_X}\right) = 1$, alors θ_X^β est une β -norme. Il est clair que $\theta_X = 0$ est équivalent à $X = 0$ et que $\theta_{\lambda X} = |\lambda|^\beta \theta_X$. De plus

$$EG_\beta\left(\frac{|X|^\beta}{\theta_X^\beta}\right) = 1.$$

$$EG_\beta\left(\frac{|X+Y|^\beta}{\theta_X^\beta + \theta_Y^\beta}\right) \leq EG_\beta\left(\frac{|X|^\beta + |Y|^\beta}{\theta_X^\beta + \theta_Y^\beta}\right);$$

la convexité de G_β entraîne

$$\begin{aligned} EG_\beta\left(\frac{|X|^\beta + |Y|^\beta}{\theta_X^\beta + \theta_Y^\beta}\right) &= EG_\beta\left(\frac{\theta_X^\beta}{\theta_X^\beta + \theta_Y^\beta} \frac{|X|^\beta}{\theta_X^\beta} + \frac{\theta_Y^\beta}{\theta_X^\beta + \theta_Y^\beta} \frac{|Y|^\beta}{\theta_Y^\beta}\right) \\ &\leq \frac{\theta_X^\beta}{\theta_X^\beta + \theta_Y^\beta} EG_\beta\left(\frac{|X|^\beta}{\theta_X^\beta}\right) + \frac{\theta_Y^\beta}{\theta_X^\beta + \theta_Y^\beta} EG_\beta\left(\frac{|Y|^\beta}{\theta_Y^\beta}\right) = 1 \end{aligned}$$

On a donc $\theta_{X+Y}^\beta \leq \theta_X^\beta + \theta_Y^\beta$.

Les fonctions q_n étant aussi dans $K(2, \beta)$ on peut encore définir une β -norme $\tau((c_n))$ dans $l_{(q_n)_{n \in \mathbb{N}}}$.

En définissant Φ et Φ_1 comme précédemment, et en procédant comme dans le cas des espaces d'Orlicz, on montre facilement l'existence d'un isomorphisme d'espaces β -normés.

Montrons maintenant un résultat dont l'intérêt réside surtout dans les méthodes auxquelles il conduit; elles peuvent permettre en particulier de montrer le théorème 2.3.3.

PROPOSITION 2.3.6. — Soit $G \in K(2, 0)$. A toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles, symétriques, G -intégrables et indépendantes, on peut associer une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles, symétriques G -intégrables, indéfiniment divisibles et indépendantes telles que les espaces $[X, G]$ et $[Y, G]$ soient isomorphes.

On sait déjà que si $(X_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite symétrisée de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $[X, G]$ et $[X^s, G]$ sont isomorphes. Montrons que $[X^s, G]$ et $[Y, G]$ le sont, ce qui entraîne la proposition.

Notons, pour simplifier l'écriture, φ_n la fonction caractéristique de X_n^s . Alors $\varphi_n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit ξ_n la fonction définie par $\xi_n(u) = 1 - \varphi_n(u)$, pour $u \in \mathbb{R}$; on a $0 \leq \xi_n(u) \leq 1$.

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonctions caractéristiques $e^{\varphi_n - 1}$ respectivement. Les variables Y_n sont indéfiniment divisibles et pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, on a

$$\begin{aligned} \text{EG} \left(\sum_{k \leq n} c_k Y_k \right) &= \int_0^1 \left(1 - \prod_{k \leq n} e^{\varphi_k(c_k u) - 1} \right) dM(u) \\ &\leq \int_0^1 \left(1 - \prod_{k \leq n} \varphi_k(c_k u) \right) dM(u) = \text{EG} \left(\sum_{k \leq n} c_k X_k \right). \end{aligned}$$

D'où la convergence de $\sum_n c_n Y_n$ dans L_G si $\sum_n c_n X_n$ converge.

Supposons maintenant que $\sum_n c_n Y_n$ converge dans L_G . Alors $\sum_n c_n Y_n$ converge en loi, ce qui implique la convergence uniforme sur tout compact de la droite réelle de $\prod_n \varphi_{c_n Y_n}(u)$. Les variables Y_n étant indéfiniment divisibles, la limite en loi de $\sum_{k \leq n} c_k Y_k$, quand $n \rightarrow \infty$, l'est aussi, ce qui

entraîne $\prod_n \varphi_{c_n Y_n}(u) > 0$. Il s'ensuit que la convergence de $\sum_n \xi_n(c_n u)$ est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$, en particulier $[0, 1]$.

D'autre part, pour tout $u > 0$, il existe $A > 0$ tel que si $0 \leq x \leq a$, alors $1 - e^{-x} \geq Ax$. Pour $a > 0$, soit $n_a \in \mathbb{N}$ tel que si $p > m > n_a$, alors

$$\sum_m^p \xi_k(c_k u) \leq a \quad \text{pour } u \in [0, 1].$$

On a

$$\begin{aligned} \text{EG}\left(\sum_m^p c_k Y_k\right) &= \int_0^1 (1 - e^{-\sum_m^p \xi_k(c_k u)}) dM(u) \\ &\geq A \int_0^1 \left(\sum_m^p \xi_k(c_k u)\right) dM(u) = A \sum_m^p \text{EG}(c_k X_k). \end{aligned}$$

La convergence $\sum_n c_n Y_n$ dans L_G entraîne donc la convergence de la série $\sum_n \text{EG}(c_n X_n)$ et par conséquent celle de $\sum_n c_n X_n$ dans L_G .

2. CAS DES VARIABLES ÉCHANGEABLES

Dans ce paragraphe la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée être une suite de variables aléatoires échangeables (ou en dépendance symétrique), c'est-à-dire que la loi de probabilité de tout p -uplet $(X_{n_1}, \dots, X_{n_p})$, $n_j \neq n_k$ si $j \neq k$ est indépendante du choix du p -uplet $(n_1, \dots, n_p)$.

On sait [3] qu'à toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables échangeables définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on peut associer une suite $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité produit $(\Omega \times T, \mathcal{A} \otimes \mathcal{T}, P \otimes \mu)$ telles que

- 1) les lois de probabilité de X_n et $\tilde{X}_n$ soient les mêmes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- 2) pour tout $\tau \in T$, la suite $(\tilde{X}_n(\cdot, \tau))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite indépendante.

Il n'y a pas, *a priori*, de rapport entre les $\tilde{X}_n(\cdot, \tau)$ pour des valeurs de τ distinctes.

Cette représentation des suites échangeables va nous permettre de montrer que les résultats obtenus dans le cas des variables indépendantes sont encore valables dans le cas des variables échangeables et ε -invariantes. Cette dernière hypothèse est essentielle : elle permet de se ramener à des variables indépendantes symétriques d'après les résultats de [3].

Montrons d'abord

LEMME 2.3.7. — Soit $G \in K(2,0)$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires échangeables, ε -invariantes et G -intégrables. Soit d'autre part $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite finie de réels ($c_k = 0$ si $k > n$) telle que $|c_k| \leq 1$ si $k \leq n$. Si pour tout $k \leq n$, $EG(c_k X_k) \leq \frac{1}{4}$ et si de plus $EG\left(\sum_k c_k X_k\right) \leq \frac{1}{4}$, alors

$$(1 - e^{-1}) \sum_k EG(c_k X_k) \leq EG\left(\sum_k c_k X_k\right) \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} \sum_k EG(c_k X_k).$$

D'après ce qui précède, on a, pour tout k ,

$$EG(c_k X_k) = \int_T E_\omega G(c_k \tilde{X}_k(\omega, \tau)) d\mu(\tau)$$

et aussi

$$EG\left(\sum_k c_k X_k\right) = \int_T E_\omega G\left(\sum_k c_k \tilde{X}_k(\omega, \tau)\right) d\mu(\tau).$$

L'espace $(T, \mathcal{T})$ peut être choisi comme un espace compact muni de la tribu des boréliens et μ une probabilité de Radon. Posons, pour simplifier l'écriture, $g_k(\tau) = E_\omega G(c_k \tilde{X}_k(\omega, \tau))$, $g(\tau) = E_\omega G\left(\sum_k c_k \tilde{X}_k(\omega, \tau)\right)$. Les fonctions

g_k , $k \leq n$ et g formant un ensemble fini de fonctions de $L^1(\mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver une probabilité ν sur T , à support fini, telle que pour tout $k \leq n$,

$$(1 - \varepsilon) \int_T g_k(\tau) d\mu(\tau) \leq \int_T g_k(\tau) d\nu(\tau) \leq (1 + \varepsilon) \int_T g_k(\tau) d\mu(\tau)$$

et

$$(1 - \varepsilon) \int_T g(\tau) d\mu(\tau) \leq \int_T g(\tau) d\nu(\tau) \leq (1 + \varepsilon) \int_T g(\tau) d\mu(\tau).$$

En choisissant ε assez petit pour que

$$(1 + \varepsilon) \int_T g_k(\tau) d\mu(\tau) \leq \frac{1}{4} \quad \text{pour tout } k \leq n$$

et

$$(1 + \varepsilon) \int_T g(\tau) d\mu(\tau) \leq \frac{1}{4},$$

on est ramené au cas où la mesure μ sur T est de support fini avec

$$EG(c_k X_k) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad EG\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Étudions ce cas. On peut écrire

$$\text{EG}\left(\sum_k c_k X_k\right) = \sum_l \text{E}_\omega G\left(\sum_k c_k \tilde{X}_k(\omega, \tau_l)\right) \mu(\tau_l), \quad l = 1, \dots, L.$$

Soit pour tout l la fonction G_l définie sur $\mathbb{R}$ par $G_l(x) = \mu_l G(\alpha_l x)$ où α_l est tel que $\mu_l G(\alpha_l) = 1$. En posant $c_k^l = \frac{c_k}{\alpha_l}$, on peut écrire

$$\text{EG}\left(\sum_k c_k X_k\right) = \sum_l \text{E}_\omega G_l\left(\sum_k c_k^l \tilde{X}_k(\omega, \tau_l)\right) \mu(\tau_l) \leq \frac{1}{4},$$

d'où

$$\text{E}_\omega G_l\left(\sum_k c_k^l \tilde{X}_k(\omega, \tau_l)\right) \leq \frac{1}{4} \quad \text{pour tout } l.$$

De même pour tout k

$$\text{E}_\omega G_l(c_k^l \tilde{X}_k(\omega, \tau_l)) \leq \frac{1}{4} \quad \text{pour tout } l.$$

Enfin, puisque $\alpha_l \geq 1$, on a $|c_k^l| = 1$.

Les variables aléatoires $\tilde{X}_k(\cdot, \tau_l)$ étant indépendantes et symétriques pour l fixé, on a par (2.5), pour tout l

$$\begin{aligned} (1 - e^{-1}) \sum_k \text{E}_\omega G_l(c_k^l \tilde{X}_k(\omega, \tau_l)) &\leq \text{E}_\omega G_l\left(\sum_k c_k^l \tilde{X}_k(\omega, \tau_l)\right) \\ &\leq \frac{1}{1 - e^{-1}} \sum_k \text{E}_\omega G_l(c_k^l \tilde{X}_k(\omega, \tau_l)) \end{aligned}$$

et en sommant sur l

$$(1 - e^{-1}) \sum_k \text{EG}(c_k X_k) \leq \text{EG}\left(\sum_k c_k X_k\right) \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} \sum_k \text{EG}(c_k X_k).$$

On en déduit, en procédant comme dans le cas des variables indépendantes (théorème 2.3.3).

THÉORÈME 2.3.8. — Soit $G \in K(2,0)$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, échangeables, ε -invariantes et G -intégrables. Pour toute suite de réels $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G si et seulement si la série $\sum_n \text{EG}(c_n X_n)$ converge.

Remarquons que l'hypothèse d' ε -invariance entraînait déjà la suffisance de la condition par la proposition 2.1.6.

Si on suppose maintenant $G \in K(2,1)$, on a, en raisonnant exactement comme dans le cas des variables indépendantes, l'analogie du théorème 2.3.5, à savoir,

THÉORÈME 2.3.9. — *Il existe une constante γ telle que pour toute fonction $G \in K(2,1)$ et toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, échangeables, ε -invariantes et G -intégrables, on puisse trouver une fonction d'Orlicz $q \in C(G)$ (à un facteur multiplicatif près) telle que $[X, G]$ soit γ -isomorphe à l'espace d'Orlicz l_q .*

Les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant échangeables, sont toutes de même loi. Il suffit de poser $q(c) = EG(cX_n)$ pour avoir le résultat.

Énonçons maintenant les résultats pour une fonction d'Orlicz $G \in K(2,1)$ non nécessairement de type négatif. Si G est donnée pour $|x| \geq 1$, désignons par $\hat{G}$ un prolongement quelconque de G sur tout $\mathbb{R}$ tel que $\hat{G}(x) = ax^2$, $a > 0$, dans un voisinage de l'origine. On a alors

PROPOSITION 2.3.10. — *Soit $G \in K(2,1)$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires échangeables, ε -invariantes et G -intégrables. Il existe alors une fonction $q \in K(2,1)$ telle que*

$$\begin{aligned} q &\in C(\hat{G}) && \text{si } G \text{ est définie pour } |x| \geq 1 \\ q &\in C(G \wedge x^2) && \text{si } G \text{ est définie sur tout } \mathbb{R} \end{aligned}$$

pour laquelle $[X, G]$ soit isomorphe à l_q .

Remarquons pour terminer que dans tous les résultats précédents on peut remplacer $C(G)$ par $C_{1,\infty}(G)$ puisque pour une probabilité ν quelconque sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{-1}^1 \lambda^2 x^2 d\nu(x) = 0(G(\lambda)) \quad \text{si } G \in K(2,1).$$

TROISIÈME PARTIE

FORME DES ESPACES DE BANACH A BASE SYMÉTRIQUE ISOMORPHES A UN SOUS-ESPACE D'UN ESPACE D'ORLICZ

I. Introduction et notations

On se propose, dans cette partie, de montrer que pour des espaces d'Orlicz, il n'y a en fait, comme sous-espaces de suites symétriques, que des intersections de deux espaces de type suivant : espaces engendrés

par des fonctions à supports disjoints et espaces de variables aléatoires, échangeables et ε -invariantes. Les espaces du premier type sont parfaitement caractérisés; les espaces du deuxième type n'ont pas de forme analytique simple. Si G est une fonction quelconque, en particulier si $\frac{G(x)}{x^2}$ n'a pas de comportement régulier, on ne sait pas dire grand chose

de la variété engendrée dans L_G par une suite de variables indépendantes équidistribuées. Le résultat énoncé donne donc la forme des espaces des suites se plongeant dans un espace d'Orlicz mais la solution analytique complète du problème nécessite la résolution d'un problème probabiliste encore ouvert dans le cas d'une fonction G quelconque.

Dans cette partie, G désigne une fonction d'Orlicz de K satisfaisant à la condition (Δ_2) . On note L_G l'espace d'Orlicz défini sur l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue m , soit $L_G = L_G([0, 1], m)$.

II. Symétrie.

1. BASES SYMÉTRIQUES

DÉFINITION 3.2.1. — Une base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace de Banach est dite *symétrique* si elle est équivalente à la base $(e_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ pour toute permutation σ des entiers.

Il est clair que toute base symétrique est inconditionnelle; elle est aussi sous-symétrique, c'est-à-dire équivalente à toute base $(e_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour toute suite croissante d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ceci entraîne en particulier que toute base symétrique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base symétrique normalisée $\left(\frac{e_n}{\|e_n\|_B} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Les bases naturelles de c_0 et de l^p , $1 \leq p \leq \infty$ sont des bases symétriques, d'ailleurs uniques à une équivalence près. Les espaces d'Orlicz de suites, les espaces de Lorentz de suites, constituent d'autres exemples d'espaces de Banach à bases symétriques [11].

On sait d'autre part [11] que si B est un espace de Banach à base symétrique, on peut définir une nouvelle norme sur B , dite *norme symétrique*, équivalente à la norme initiale et telle que

$$\left\| \sum_n c_n \varepsilon_n e_{\sigma(n)} \right\| = \left\| \sum_n c_n x_n \right\|$$

pour toute permutation des entiers et tout choix des $\varepsilon_n = \pm 1$. On supposera toujours dans la suite que B est muni de cette norme symétrique.

2. SYMÉTRISATION D'UNE FAMILLE COHÉRENTE DE PROBABILITÉS

Considérons une famille cohérente de probabilités sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire telle que si $\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_n}$ et $\mu_{k'_1}, \dots, \mu_{k'_m}$ représentent les probabilités définies

respectivement sur les espaces de dimension finie $\mathbb{R}_{k_1}, \dots, \mathbb{R}_{k_n} = \prod_{j=1}^n \mathbb{R}_{k_j}$, k_j

tous distincts, et $\mathbb{R}_{k'_1}, \dots, \mathbb{R}_{k'_m} = \prod_{j=1}^m \mathbb{R}_{k'_j}$, k'_j tous distincts, les projections

de $\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_n}$ et $\mu_{k'_1}, \dots, \mu_{k'_m}$ sur l'intersection de $\mathbb{R}_{k_1}, \dots, \mathbb{R}_{k_n}$ et $\mathbb{R}_{k'_1}, \dots, \mathbb{R}_{k'_m}$ coïncident. On sait (théorème de Kolmogorov) qu'une telle famille de probabilités détermine une probabilité unique μ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont elles sont les projections sur les sous-espaces de dimension finie. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi de probabilité μ (c'est-à-dire telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $k_1, \dots, k_n$ distincts de $\mathbb{N}$, la loi de probabilité de $(X_{k_1}, \dots, X_{k_n})$ soit $\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_n}$). On notera quelquefois $\mu_{X_{k_1}, \dots, X_{k_n}}$ pour $\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_n}$.

Soit d'autre part une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Rademacher $\left(P'(\varepsilon_n = 1) = P'(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \right)$, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{A}', P')$. On considère la suite $(\varepsilon_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur l'espace produit $(\Omega, \mathcal{A}, P) \times (\Omega', \mathcal{A}', P')$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit Γ_n le groupe des multiplications par $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$: si $\gamma \in \Gamma_n$,

$$\gamma(X_1, \dots, X_n) = (\gamma(X_1), \dots, \gamma(X_n)) \quad \text{avec} \quad \gamma(X_j) = \pm X_j.$$

Soit d'autre part $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'intervalle $[1, n]$ de $\mathbb{N}$ et pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $\sigma(X_1, \dots, X_n) = (\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)) = (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$. On pose pour tout n

$$\mu_n^s = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\sigma} \sum_{\gamma} \mu_{\sigma\gamma(X_1, \dots, X_n)}.$$

Remarquons que bien que Γ_n et $\mathfrak{S}_n$ ne commutent pas, μ_n^s pourrait encore s'écrire $\frac{1}{n! 2^n} \sum_{\gamma} \sum_{\sigma} \mu_{\gamma\sigma(X_1, \dots, X_n)}$.

Supposons que pour tout m les probabilités $\mu_{k_1, \dots, k_m}$, $k_1 \neq \dots \neq k_m$ forment une famille relativement compacte pour la topologie de la convergence étroite. Soit, pour tout $m \leq n$, $\mu_{n,m}^s$ la probabilité marginale sur

$\mathbb{R}_{1,\dots,m}$ de μ_n^s , c'est-à-dire l'image de μ_n^s par la projection canonique de $\mathbb{R}_{1,\dots,n}$ sur $\mathbb{R}_{1,\dots,m}$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$ et posons

$$\tilde{\mu}_m = \lim_{\mathcal{U}} \mu_{n,m}^s.$$

La relative compacité des probabilités $\mu_{k_1,\dots,k_m}$ pour m fixé, et donc des $\mu_{n,m}^s$ assure que $\tilde{\mu}_m$ existe. De plus les $(\tilde{\mu}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ forment un système projectif de probabilités ($\mu_{n,m}^s$ est la probabilité marginale de $\mu_{n,m+1}^s$ sur $\mathbb{R}^m$). Une telle famille projective $(\tilde{\mu}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définit une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles; par construction même de $(\tilde{\mu}_m)_{m \in \mathbb{N}}$, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est échangeable et ε -invariante.

III. Résultats.

On se propose donc de montrer

THÉORÈME 3.3.1. — *Soit B un espace de Banach à base symétrique isomorphe à un sous-espace de L_G . Alors il existe deux espaces d'Orlicz l_f et l_g tels que B soit isomorphe à $l_f \cap l_g$ (c'est-à-dire l_{f+g}) où $l_f = [Y, G]$ avec $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions à supports disjoints et $l_g = [U, G]$ avec $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires échangeables et ε -invariantes.*

La démonstration du théorème 3.3.1 sera décomposée en lemmes.

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base symétrique, qu'on peut supposer normalisée, sans nuire à la généralité, de B et soit J l'isomorphisme de B dans L_G , de constante d'isomorphisme γ . On note $X_n = J(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors clairement $0 < \frac{1}{\gamma} \leq \|X_n\|_G \leq \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où aussi

$$0 < m \leq \int G(X_n) < M < \infty$$

puisque G satisfait à la condition (Δ_2) . (On écrira $EG(X_n)$ ou $\int G(X_n)$ pour $\int_0^1 G(X_n(x))dx$ afin d'alléger les notations).

DÉFINITION 3.3.2. — *Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de L_G est dite être un a-pic (au sens de L_G) si $a = \sup(b, 0 \leq b \leq 1)$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément X_{k_n} de la suite pour lequel*

$$\int_{A_n} G(X_{k_n}) \geq \left(b - \frac{1}{2^n}\right) \int G(X_{k_n}) \quad \text{avec} \quad m(A_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Si $a = 1$, la suite $G(X_n)$ n'appartient pas à M_G^e au sens de Kadec-Pelczynski ([8], [10, III]) quel que soit $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équiintégréable et $G(X_{k_n})$ tend en probabilité vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Si $a = 0$ la suite $(G(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est équiintégréable. L'équiintégréabilité de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'entraîne pas en général que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit un 0-pic. Mais c'est le cas ici puisque

$$\int G(X_n) \geq m > 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a, en notant A^c le complémentaire de l'ensemble A ,

LEMME 3.3.3. — *Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un a -pic, on peut extraire de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et trouver une suite $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties mesurables de $[0, 1]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \int_{A'_n} G(X_{k_n}) \geq \left(a - \frac{1}{2^n}\right) \int G(X_{k_n}) \quad \text{et} \quad m(A'_n) \leq \frac{1}{2^n}, \\ 2^\circ \quad & \int_{A_n^{c'}} G(X_{k_n}) \geq \frac{1-a}{2} \int G(X_{k_n}), \\ 3^\circ \quad & \sum_{p \geq n+1} \int_{A_p} G(X_{k_n}) \leq \frac{1}{2^n} \int G(X_{k_n}). \end{aligned}$$

La démonstration se fait en suivant l'idée, maintenant classique, de Kadec et Pelczynski. On construit $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence; X_{k_1} et A'_1 sont choisis, d'après la définition des a -pic pour satisfaire 1° et on peut toujours avoir aussi 2° si $a < 1$ puisque la mesure est non-atomique. On choisit ensuite X_{k_2} et A'_2 de façon à avoir 1° et 2° en prenant A'_2 de mesure suffisamment petite pour avoir aussi $\int_{A'_2} G(X_{k_1}) < \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int G(X_{k_1})$. Ceci est possible en allant chercher assez loin dans la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la définition des a -pic pour rendre A'_2 petit par continuité de la mesure $\mu_1(\cdot) = \int \cdot G(X_{k_1})$. On continue, de façon à avoir pour A'_3 ,

$$\int_{A'_3} G(X_{k_1}) \leq \frac{1}{2^2} \frac{1}{2} \int G(X_{k_1}) \quad \text{et} \quad \int_{A'_3} G(X_{k_2}) \leq \frac{1}{2^2} \frac{1}{2} \int G(X_{k_2}),$$

et ainsi de suite. On vérifie que 3° est satisfaite en sommant les majorations.

LEMME 3.3.4. — *Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un a -pic, on peut en extraire une sous-*

suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que B soit isomorphe à $[X', G]$ et telle que $X'_n = Y_n + Z_n$ avec

- 1) les Y_n sont à supports disjoints et la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un 1-pic,
- 2) la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable,
- 3) $Y_n \cdot Z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ du lemme 3.2.3 et soit

$$A_n = A'_n \setminus \left(\bigcup_{p \geq n+1} A'_p \right)$$

$$Y_n = X'_n \cdot 1_{A_n}$$

$$Z_n = X'_n \cdot 1_{A_n^c}.$$

La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est manifestement un 1-pic à supports disjoints. Montrons que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée de variables équi-intégrables.

Si $a = 1$,

$$\begin{aligned} \int G(Z_k) &= \int_{A_k^c} G(X'_k) \leq \int_{A_k^c} G(X'_k) + \int_{\bigcup_{p \geq k+1} A'_p} G(X'_k) \\ &\leq \frac{1}{2^k} \int G(X'_k) + \sum_{p \geq k+1} \int_{A'_p} G(X'_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \int G(X'_k). \end{aligned}$$

Puisque $\int G(X'_k) \leq M$, on a $\int G(Z_k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

Si $a < 1$, la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un 0-pic ; sinon elle serait un b -pic, avec $b > 0$; on pourrait alors trouver une sous-suite $(Z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties mesurables de $[0,1]$ telles que

$$\int_{C_n} G(Z_{k_n}) \geq \left(b - \frac{1}{2^n} \right) \int G(Z_{k_n}), \quad \text{avec} \quad m(C_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Si $B_n = C_n \cap A_n^c$, alors $B_n \cap A_n = \emptyset$ et $m(B_n) \leq \frac{1}{2^n}$ et de plus

$$\int_{B_n} G(X'_{k_n}) \geq \left[\left(\frac{1-a}{2} \right) b - \frac{1}{2^{n+1}} \right] \int G(Z_{k_n})$$

pour n assez grand, par un calcul élémentaire.

On a alors $m(A_n \cup B_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et

$$\int_{A_n \cup B_n} G(X'_{k_n}) \geq \left[\left(\frac{1-a}{2} \right) b + a - \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \right] \int G(X'_{k_n}),$$

soit

$$\int_{A_n \cup B_n} G(X'_{k_n}) \geq \left[\left(\frac{1-a}{2} \right) b + a - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \int G(X'_{k_n}),$$

et $\left(\frac{1-a}{2} \right) b + a > a$, d'où une contradiction puisque $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un a -pic.

LEMME 3.3.5. — *Il existe deux fonctions continues, positives, strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$, soit Φ et Φ' , telles que*

$$\begin{aligned} \text{EG} \left(\sum_{k \leq n} c_k Y_k \right) &\leq \Phi \left(\gamma^2 \left\| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right\|_G \right) \\ \text{EG} \left(\sum_{k \leq n} c_k Z_k \right) &\leq \Phi' \left(\gamma^2 \left\| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right\|_G \right). \end{aligned}$$

De plus B est isomorphe à $[Y, G] \cap [Z, G]$.

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes et indépendantes des fonctions de L_G . L'espérance mathématique par rapport à l'espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ associé à ces variables sera noté E_ε .

On a

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \int G \left(\sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k X_k \right) &= E_\varepsilon \left(\sum_{k \leq n} \int_{A_k} G(c_k \varepsilon_k Y_k + \sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k Z_k) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\bigcap_n A_n^c} G \left(\sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k Z_k \right) \right), \end{aligned}$$

si A_n est le support de Y_n .

Les variables aléatoires, définies sur $(\Omega', \mathcal{A}', P')$,

$$\sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k Z_k \quad \text{et} \quad c_k \varepsilon_k Y_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

sont centrées et indépendantes et G est convexe. L'inégalité de Jensen (2^e partie, I.2) entraîne les inégalités

$$\begin{aligned} E_\varepsilon G \left(\sum_{\substack{j \leq n \\ j \neq k}} c_j \varepsilon_j Z_j + c_k \varepsilon_k Y_k \right) &\geq E_\varepsilon G(c_k \varepsilon_k Y_k), \quad k = 1, \dots, n \\ E_\varepsilon G \left(\sum_{\substack{j \leq n \\ j \neq k}} c_j \varepsilon_j Z_j + c_k \varepsilon_k Y_k \right) &\geq E_\varepsilon G \left(\sum_{\substack{j \leq n \\ j \neq k}} c_j \varepsilon_j Z_j \right), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

D'où

$$E_\varepsilon \int G\left(\sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k X_k\right) \geq E_\varepsilon \left(\sum_{k \leq n} \int_{A_n} G(c_k \varepsilon_k Y_k)\right) = \sum_{k \leq n} G(c_k Y_k)$$

et

$$E_\varepsilon \int G\left(\sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k X_k\right) \geq E_\varepsilon \int G\left(\sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k Z_k\right).$$

D'autre part, puisque
$$\frac{\left\| \sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k e_k \right\|_B}{\left\| \sum_{k \leq n} c_k e_k \right\|_B} = 1$$
 pour toutes les valeurs des ε_n ,

on a

$$\frac{1}{\gamma^2} \leq \frac{\left\| \sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k X_k \right\|_G}{\left\| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right\|_G} \leq \gamma^2$$

où γ est la constante d'isomorphisme de J .

Soit Φ la fonction définie dans la démonstration du théorème 2.3.5.

On a alors

$$\int G\left(\sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k X_k\right) \leq \Phi\left(\left\| \sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k X_k \right\|_G\right).$$

Mais ce qui précède entraîne

$$\begin{aligned} \Phi\left(\left\| \sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k X_k \right\|_G\right) &\leq \Phi\left(\gamma \left\| \sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k e_k \right\|_B\right) = \Phi\left(\gamma \left\| \sum_{k \leq n} c_k e_k \right\|_B\right) \\ &\leq \Phi\left(\gamma^2 \left\| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right\|_G\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\int G\left(\sum_{k \leq n} c_k Y_k\right) \leq \Phi\left(\gamma^2 \left\| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right\|_G\right).$$

La convergence de $\sum_n c_n X_n$ dans L_G entraîne donc celle de $\sum_n c_n Y_n$, par

un argument de Cauchy.

Pour la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on ne peut procéder de la même manière puisqu'on n'a plus l'égalité de $E_\varepsilon \int G\left(\sum_{k \leq n} c_k \varepsilon_k Z_k\right)$ et de $\int G\left(\sum_{k \leq n} c_k Z_k\right)$, les variables Z_n n'ayant pas leurs supports disjoints. Mais k_2 étant la constante associée à la condition (Δ_2) pour G , on a

$$\begin{aligned} \int G\left(\sum_{k \leq n} c_k Z_k\right) &= \int G\left(\sum_{k \leq n} c_k (X_k - Y_k)\right) \\ &\leq k_2 \left[\int G\left(\sum_{k \leq n} c_k X_k\right) + \int G\left(\sum_{k \leq n} c_k Y_k\right) \right] \\ &\leq (k_2 + 1) \Phi\left(\gamma^2 \left\| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right\|_G\right) = \Phi'\left(\gamma^2 \left\| \sum_{k \leq n} c_k X_k \right\|_G\right). \end{aligned}$$

Si $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , il s'ensuit, par un argument de Cauchy, que $\sum_n c_n Z_n$ converge aussi dans L_G .

La convergence dans L_G de $\sum_n c_n X_n$ implique donc celle de $\sum_n c_n X_n$ et de $\sum_n c_n Z_n$.

Réciproquement il est clair, en raisonnant encore sur les suites de Cauchy, que la convergence de $\sum_n c_n Y_n$ et $\sum_n c_n Z_n$ dans L_G entraîne celle de $\sum_n c_n X_n$.

Montrons maintenant le résultat suivant

LEMME 3.3.6. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut extraire de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite, soit $(Y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $[Y'', G]$ soit isomorphe, avec une constante d'isomorphisme $(1 + \varepsilon)$, à un espace d'Orlicz l_f avec $f \in E_\infty(G)$.*

Pour tout n , $\int G(Y_n) > \delta > 0$. En effet

$$\int G(Y_n) = \int_{A_n} G(X'_n) = \int_{A_n' \left(\bigcup_{p \geq n+1} A'_p \right)} G(X'_n) \geq \int_{A_n'} G(X'_n) - \sum_{p \geq n+1} \int_{A'_p} G(X'_n),$$

d'où, par le lemme 3.3.3

$$\int G(Y_n) \geq \left(a - \frac{1}{2^n}\right) \int G(X'_n) - \frac{1}{2^n} \int G(X'_n) = \left(a - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \int G(X'_n),$$

soit enfin

$$\int G(Y_n) \geq \left(a - \frac{1}{2^{n-1}}\right) m = \delta > 0.$$

Soit pour tout n , $\Phi_n(x) = \frac{1}{\int G(Y_n)} \int G(xY_n)$, $x \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\int G(Y_n)} \int \frac{G(xY_n)}{\int G(Y_n)} G(Y_n),$$

pour tout n , $\Phi_n \in C(G)$ et $\Phi_n(0) = 0$ et $\Phi_n(1) = 1$.

Si G est supposée dérivable, de dérivée G' , (ce qui est toujours possible quitte à remplacer G par une fonction équivalente), on a, en posant

$$H_\lambda(x) = \frac{G(\lambda x)}{G(\lambda)} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } x \in [0, 1],$$

$$H'_\lambda(x) = \frac{\lambda G'(\lambda x)}{G(\lambda)} \leq \frac{\lambda G'(\lambda)}{G(\lambda)} \leq \frac{G(2\lambda) - G(\lambda)}{G(\lambda)} \leq (k_2 - 1)$$

où k_2 est la constante associée à la condition (Δ_2) pour G . La famille de fonctions H_λ est donc équicontinue et la famille $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Soit f un point d'accumulation de $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est clair que $f \in \overline{C(G)}$. On peut de plus supposer (en modifiant légèrement la construction de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au lemme 3.3.4) que $|Y_n| \geq n$ sur A_n . Dans ces conditions $f \in E_\infty(G)$.

Soit $(\Phi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers f uniformément sur $[0, 1]$. Pour $0 < x \leq 1$, $G(\lambda) \leq k_{1/x} G(\lambda x)$ où $k_{1/x}$ est la constante associée à la condition $(\Delta_{1/x})$ pour G .

D'où $\frac{G(\lambda x)}{G(\lambda)} \geq \frac{1}{k_{1/x}} > 0$, ce qui entraîne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi'_n(x) = \frac{1}{\int G(Y'_n)} \int \frac{G(xY'_n)}{G(Y'_n)} G(Y'_n) \geq \frac{1}{k_{1/x}} > 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n > 0$ il existe un entier n_η tel que si $n \geq n_\eta$,

$$(1 - \varepsilon)f(x) \leq \Phi'_n(x) \leq (1 + \varepsilon)f(x) \quad \text{pour } x \in [\eta, 1],$$

puisque $\frac{\Phi'_n}{f}$ tend uniformément vers 1 dans $[\eta, 1]$.

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0 telle que $\sum_n f(\varepsilon_n) < \varepsilon$. On peut extraire une sous-suite $(\Phi''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\Phi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [\varepsilon_n, 1]$,

$$(1 - \varepsilon)f(x) \leq \Phi''_p(x) \leq (1 + \varepsilon)f(x) \quad \text{pour tout } p \geq n.$$

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tels que $|c_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les supports des variables Y''_n telles que $\Phi''_n(x) = \frac{1}{\int G(Y''_n)} \int G(xY''_n)$ étant disjoints,

$$\text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k Y''_k\right) = \sum_{k \leq n} \text{EG}(c_k Y''_k).$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_n \text{EG}(c_n Y''_n) &= \sum_{n: c_n \geq \varepsilon_n} \text{EG}(c_n Y''_n) + \sum_{n: c_n < \varepsilon_n} \text{EG}(c_n Y''_n) \\ &= \sum_{n: c_n \geq \varepsilon_n} \int G(Y''_n) \Phi''_n(c_n) + \sum_{n: c_n < \varepsilon_n} \int G(Y''_n) \Phi''_n(c_n). \end{aligned}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int G(Y''_n) \leq M$, on a

$$\sum_{n: c_n \geq \varepsilon_n} \int G(Y''_n) \Phi''_n(c_n) \leq M \sum_{c_n \geq \varepsilon_n} \Phi''_n(c_n) \leq M(1 + \varepsilon) \sum_n f(c_n)$$

et

$$\sum_{n: c_n < \varepsilon_n} \int G(Y''_n) \Phi''_n(c_n) \leq M \sum_{c_n < \varepsilon_n} \Phi''_n(c_n) \leq M \sum_n \Phi''_n(\varepsilon_n) \leq M\varepsilon,$$

d'où

$$\sum_n \text{EG}(c_n Y''_n) \leq M \left((1 + \varepsilon) \sum_n f(c_n) + \varepsilon \right).$$

D'autre part

$$\sum_n \text{EG}(c_n Y''_n) \geq \sum_{n: c_n \geq \varepsilon_n} \int G(Y''_n) \Phi''_n(c_n) \geq \delta \sum_{c_n \geq \varepsilon_n} \Phi''_n(c_n) \geq \delta(1 - \varepsilon) \sum_{c_n \geq \varepsilon_n} f(c_n);$$

comme

$$\sum_n f(c_n) = \sum_{n: c_n \geq \varepsilon_n} f(c_n) + \sum_{n: c_n < \varepsilon_n} f(c_n) \leq \sum_{n: c_n \geq \varepsilon_n} f(c_n) + \sum_{n: c_n < \varepsilon_n} f(\varepsilon_n) \leq \sum_{n: c_n \geq \varepsilon_n} f(c_n) + \varepsilon,$$

on a

$$\sum_{n: c_n \geq \varepsilon_n} f(c_n) \geq \sum_n f(c_n) - \varepsilon;$$

on en déduit

$$\sum_n \text{EG}(c_n Y_n'') \geq \delta(1 - \varepsilon) \left(\sum_n f(c_n) - \varepsilon \right).$$

D'où le lemme.

Nous allons maintenant montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut en fait être remplacée par une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles échangeables et ε -invariantes.

Plus exactement, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant un a -pic,

LEMME 3.3.7. — Si $a < 1$, il existe une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles échangeables et ε -invariantes telle que $[X, G]$ soit isomorphe à $[Y, G] \cap [U, G]$.

Si $a < 1$, on a, par le lemme 3.3.3,

$$\int G(Z_n) = \int_{A_n^c} G(Z_n) = \int_{A_n^c} G(X'_n) \geq \int_{A_n^c} G(X'_n) \geq \frac{1-a}{2} G(X'_n) > 0.$$

D'où

$$\int G(Z_n) \geq \frac{1-a}{2} m = \beta > 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et puisque $\int G(X_n) \geq \int G(Z_n),$

$$M > \text{EG}(Z_n) > \beta > 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La famille $(\mu_{Z_{k_1}, \dots, Z_{k_m}})$, $k_1 \neq \dots \neq k_m$ des lois de probabilité portées par $\mathbb{R}^m$ est donc relativement compacte, à m fixé, pour la topologie de la convergence étroite (puisque $\text{EG}(Z_n) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Construisons, comme dans (II.2), la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de probabilités à partir des probabilités $(\mu_{Z_{k_1}, \dots, Z_{k_m}})$ et soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires associées à la suite $(\tilde{\mu}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de probabilités. On a, pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels,

$$\begin{aligned} \text{EG} \left(\sum_{k \leq m} c_k U_k \right) &= \int_{\mathbb{R}^m} G(c_1 x_1 + \dots + c_m x_m) d\tilde{\mu}_m(x_1, \dots, x_m) \\ &= \lim_{\mathcal{Q}} \int_{\mathbb{R}^m} G(c_1 x_1 + \dots + c_m x_m) d\mu_{n,m}^s(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

En effet, l'équiiintégrabilité de la suite $(G(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ entraîne celle de la famille de fonctions $G(c_1 \varepsilon_{k_1} Z_{k_1} + \dots + c_m \varepsilon_{k_m} Z_{k_m})$ puisque

$$\begin{aligned} G(c_1 \varepsilon_{k_1} Z_{k_1} + \dots + c_m \varepsilon_{k_m} Z_{k_m}) &\leq A(k_2, m) \sum_{j \leq m} G(c_j \varepsilon_{k_j} Z_{k_j}) \\ &\leq A(k_2, m) \Phi \left(\sup_{i \leq m} |c_i| \right) \sum_{j \leq m} G(Z_{k_j}), \end{aligned}$$

où $A(k_2, m)$ est une constante dépendant de la constante k_2 associée à la condition (Δ_2) pour G et du nombre m de variables intervenant dans l'expression et Φ est la fonction définie plus haut.

La valeur de m étant toujours fixée, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \frac{1}{m! \binom{n}{m} 2^m} \sum_{\substack{1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_m \leq n \\ \varepsilon_{k_j} = \pm 1}} G(c_1 \varepsilon_{k_1} Z_{k_1} + \dots + c_m \varepsilon_{k_m} Z_{k_m}).$$

La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équiiintégrable, sinon il existerait un $\eta > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existerait D et $n \in \mathbb{N}$ tels que $P(D) < \eta$ et $\int_D T_n dP > \varepsilon$; on pourrait trouver $k_1, \dots, k_m$ tels que $\int_D G(c_1 \varepsilon_{k_1} Z_{k_1} + \dots + c_m \varepsilon_{k_m} Z_{k_m}) > \varepsilon$, ce qui contredirait l'équiiintégrabilité des fonctions

$$G(c_1 \varepsilon_{k_1} Z_{k_1} + \dots + c_m \varepsilon_{k_m} Z_{k_m}).$$

Les fonctions T_n convergent donc pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, et par conséquent $\int (T_n \cdot 1) dP$ converge. Or

$$\int (T_n \cdot 1) dP = \int_{\mathbb{R}^m} G(c_1 x_1 + \dots + c_m x_m) d\mu_{n,m}^s(x_1, \dots, x_m)$$

d'où l'expression de $EG\left(\sum_{k \leq m} c_k U_k\right)$.

Supposons maintenant que $\sum_n c_n Y_n$ et $\sum_n c_n Z_n$ convergent dans L_G et montrons que $\sum_n c_n U_n$ converge. La convergence de $\sum_n c_n Y_n$ et $\sum_n c_n Z_n$ entraîne celle de $\sum_n c_n X_n$.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant constituée de variables ε -invariantes, les variables $c_n U_n$ constituent les accroissements d'une martingale (remarque 2.2.2) ce qui entraîne que $\text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k U_k\right)$ est une fonction croissante de n et, d'après la proposition 2.1.3, que $\lim_n \text{EG}\left(\sum_{k \leq n} c_k U_k\right) < \infty$ est une condition nécessaire et suffisante de convergence de $\sum_n c_n U_n$ dans L_G .

On a vu (proposition 3.3.5) que

$$\text{EG}\left(\sum_{j \leq m} c_j Z_j\right) \leq \Phi'\left(\gamma^2 \left\| \sum_{k \leq m} c_k X_k \right\|_G\right).$$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une suite basique symétrique de L_G . On sait alors que si $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , l'ensemble $\left\{ \sum_n c_n \varepsilon_n X_{\sigma(n)} \right\}$ où σ décrit l'ensemble des permutations sur $\mathbb{R}$ et δ_n des scalaires tels que $|\delta_n| \leq 1$ est borné ([11]). Il existe donc une constante M telle que

$$\text{EG}(c_1 \varepsilon_{k_1} Z_{k_1} + \dots + c_m \varepsilon_{k_m} X_{k_m}) \leq \Phi'\left(\gamma^2 M \left\| \sum_{k \leq m} c_k X_k \right\|_G\right),$$

pour tout choix de $k_1 \neq \dots \neq k_m$ avec $1 \leq k_j \leq n$ pour $j = 1, \dots, m$, et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^m} G(c_1 x_1 + \dots + c_m x_m) d\mu_{n,m}^s(x_1, \dots, x_m) \leq \Phi'\left(\gamma^2 M \left\| \sum_{k \leq m} c_k X_k \right\|_G\right).$$

Si $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , $\limsup_m \left\| \sum_{k \leq m} c_k X_k \right\|_G < \infty$, donc

$$\limsup_m \Phi'\left(\gamma^2 M \left\| \sum_{k \leq m} c_k X_k \right\|_G\right) < \infty,$$

d'où une contradiction. Par conséquent $\sum_n c_n U_n$ converge dans L_G .

D'autre part la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite basique symétrique est sous-symétrique, c'est-à-dire équivalente à toute sous-suite $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante ([11]), en particulier à la sous-suite $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$

pour laquelle $X_{k_n} = Y_{k_n} + Z_{k_n}$ avec $Y_{k_n} = Y_n''$ où $(Y_n'')_{n \in \mathbb{N}}$ est la sous-suite construite au lemme 3.3.6.

Ecrivons encore, pour simplifier les notations, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour cette suite extraite. L'espace $[X, G]$ qu'elle engendre est isomorphe à l'espace $[X, G]$ initial. De plus l'espace $[Y, G]$ engendré par la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui lui est associée est à base symétrique.

Supposons que $\sum_n c_n Y_n$ et $\sum_n c_n U_n$ convergent dans L_G . Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut trouver des variables $Z_{k_1}, \dots, Z_{k_m}$ telles que

$$\text{EG}(c_1 Z_{k_1} + \dots + c_m Z_{k_m}) \leq 2\text{EG}(c_1 U_1 + \dots + c_m U_m)$$

car sinon on aurait

$$\frac{1}{m! \binom{n}{m}} \sum_{1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_m \leq n} \text{EG}(c_1 Z_{k_1} + \dots + c_m Z_{k_m}) > 2\text{EG}(c_1 U_1 + \dots + c_m U_m),$$

ce qui contredit que

$$\begin{aligned} \text{EG}\left(\sum_{j \leq m} c_j U_j\right) &= \lim_q \frac{1}{m! \binom{n}{m} 2^m} \sum_{1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_m \leq n} \text{EG}(c_1 \varepsilon_{k_1} Z_{k_1} + \dots + c_m \varepsilon_{k_m} Z_{k_m}) \\ &= \lim_q \frac{1}{m! \binom{n}{m}} \sum_{1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_m \leq n} \text{EG}(c_1 Z_{k_1} + \dots + c_m Z_{k_m}). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \text{EG}(c_1 X_{k_1} + \dots + c_m X_{k_m}) \\ \leq k_2(\text{EG}(c_1 Y_{k_1} + \dots + c_m Y_{k_m}) + \text{EG}(c_1 Z_{k_1} + \dots + c_m Z_{k_m})), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \text{EG}(c_1 X_{k_1} + \dots + c_m X_{k_m}) \\ \leq k_2(\text{EG}(c_1 Y_{k_1} + \dots + c_m Y_{k_m}) + 2\text{EG}(c_1 U_1 + \dots + c_m U_m)). \end{aligned}$$

$$\text{Soit } A = \sup_m (\text{EG}(c_1 Y_{k_1} + \dots + c_m Y_{k_m}) + 2\text{EG}(c_1 U_1 + \dots + c_m U_m));$$

on a déjà vu que

$$\sup_m \text{EG}\left(\sum_{k \leq m} c_k U_k\right) < \infty;$$

d'autre part comme $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base symétrique de $[Y, G]$,

$$\sup_m \text{EG}(c_1 Y_{k_1} + \dots + c_m Y_{k_m}) < \infty,$$

puisque par hypothèse $\sum_n c_n Y_n$ converge dans L_G . D'où

$$EG(c_1 X_{k_1} + \dots + c_m X_{k_m}) \leq k_2 A < \infty$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, et

$$\|c_1 X_{k_1} + \dots + c_m X_{k_m}\|_G \leq \Phi_1^{-1}(k_2 A) < \infty.$$

Par suite

$$\|c_1 X_1 + \dots + c_m X_m\|_G \leq \gamma^2 \Phi_1^{-1}(k_2 A) < \infty$$

et la série $\sum_n c_n X_n$ converge dans L_G , donc aussi $\sum_n c_n Z_n$. D'où le lemme,

Le théorème se déduit des lemmes précédents : B est isomorphe à l'espace $[X, G]$ engendré par des variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies comme à la fin de la démonstration du lemme 3.3.7 ; et $[X, G]$ est isomorphe à $[Y, G] \cap [U, G]$, où $[Y, G]$ est un espace d'Orlicz à base symétrique, donc de la forme l_f et $[U, G]$ un espace engendré par des variables échangeables et ε -invariantes, donc de la forme l_g .

Des théorèmes 2.3.9 et 3.3.1 et de la remarque 2.2.2 on déduit

THÉORÈME 3.3.8. — *Soit B un espace de Banach symétrique et soit G une fonction d'Orlicz, $G \in (\Delta_2)$. Alors B se plonge dans L_G si et seulement si B est isomorphe à l_g avec*

$$g \in \bar{C} \left(\frac{G(\lambda x) \wedge \lambda^2 x^2}{G(\lambda) \wedge \lambda^2}, \lambda \in]0, \infty[\right) \text{ si } \frac{G(x)}{x^2} \text{ est décroissante,}$$

$$g \in \bar{C} \left(x^2, \lim_{\mathcal{U}} \frac{G(\lambda x)}{G(\lambda)}, \mathcal{U} \text{ ultrafiltre à l'infini} \right) \text{ si } \frac{G(x)}{x^2} \text{ est croissante.}$$

IV. Cas des espaces localement bornés.

Dans ce qui précède, la convexité de la fonction G n'a, en fait, été utilisée que pour appliquer l'inégalité de Jensen. Si $G \in K$ sans être convexe, on peut remplacer cette inégalité par une inégalité plus faible (d'un coefficient 2), mais néanmoins suffisante pour les besoins de la cause.

La parité de G entraîne que pour tout x et y réels,

$$G(x + y) + G(x - y) \geq G(x) \vee G(y).$$

En reprenant les expressions du lemme 3.3.5, on a

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon} G \left(\sum_{\substack{j \leq n \\ j \neq k}} c_j \varepsilon_j Z_j + c_k \varepsilon_k Y_k \right) \\ = \frac{1}{2} \left[E_{\varepsilon'} G \left(\sum_{\substack{j \leq n \\ j \neq k}} c_j \varepsilon_j Z_j + c_k Y_k \right) + E_{\varepsilon'} G \left(\sum_{\substack{j \leq n \\ j \neq k}} c_j \varepsilon_j Z_j - c_k Y_k \right) \right] \\ \geq \frac{1}{2} E_{\varepsilon'} G \left(\sum_{\substack{j \leq n \\ j \neq k}} c_j \varepsilon_j Z_j \right) \vee \frac{1}{2} E_{\varepsilon'} G(c_k Y_k) \end{aligned}$$

où $\varepsilon' = (\varepsilon_n)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq k}}$.

Dans l'étude des variables échangeables, ε -invariantes et de manière générale dans les majorations du type $\Phi_1(\|Z\|) \leq EG(Z) \leq \Phi(\|Z\|)$, nous avons utilisé des propriétés d'homogénéité de la norme. Les démonstrations restent valables telles quelles si l'on remplace la norme par une p -norme. On en déduit

THÉORÈME 3.4.1. — *S'il existe un $\beta > 0$ tel que $G \in K(1, \beta)$ et si B est un espace vectoriel topologique quasi-normé, complet à base symétrique, le théorème 3.3.1 reste vrai.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ASSOUD, Un résultat d'extrapolation pour des espaces d'Orlicz. *C. R. Acad. Sci. Paris*, p. 275 (2 oct. 1972), Série A, p. 651-653.
- [2] S. M. BERMAN, Sign-invariant random variables and stochastic processes with sign-invariant increments. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **119**, 1965, p. 216-243.
- [3] J. BRETAGNOLLE et D. DACUNHA-CASTELLE, Application de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces L^p , *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e série, t. **2**, 1969, p. 473-480.
- [4] D. L. BURKHOLDER, Distribution function inequalities for martingales. *The Annals of Probability*, vol. **1**, n° 1, 1973, p. 19-42.
- [5] D. DACUNHA-CASTELLE, Remarques sur les isomorphismes entre espaces d'Orlicz. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. B, vol. IX, n° 1, 1973, p. 59-75.
- [6] D. DACUNHA-CASTELLE et J. L. KRIVINE, Applications des ultraproducts à l'étude des espaces et des algèbres de Banach. *Studia Math.*, t. **41**, 1972, p. 315-334.
- [7] D. DACUNHA-CASTELLE et M. SCHREIBER, Sous-espaces symétriques des espaces d'Orlicz. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **276**, Série A, (19 février 1973), p. 629-631.
- [8] M. I. KADEC and A. PELCZYNSKI, Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p . *Studia Math.*, t. **21**, 1962, p. 161-176.
- [9] M. A. KRASNOSELSKII and Ya. B. RUTICKII, *Convex functions and Orlicz spaces*. Nordhoff Groningen, 1961.
- [10] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI, On Orlicz sequence spaces. *Israel J. Math.* I. vol. **10**, 1971, p. 379-390; II. vol. **11**, 1972, p. 355-379; III. vol. **14**, 1973, p. 368-389.

- [11] L. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI, Classical Banach spaces. *Lectures Notes in Math.*, n° 338, Springer-Verlag Berlin, 1973.
- [12] M. LOEVE, *Probability theory*, Van Nostrand New York, 1960.
- [13] W. MATUSZEWSKA, On generalized Orlicz spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. sci. math., astr. et phys.*, t. 8, 1960, p. 349-353.
- [14] J. NEVEU, *Martingales à temps discret*, Masson, Paris, 1972.
- [15] H. P. ROSENTHAL, On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables. *Israel J. Math.*, vol. 8, 1970, p. 273-303.
- [16] H. P. ROSENTHAL, On the span in L^p of sequences of independent random variables (II). Proc. 6th Berkeley Symp. on Prob. and Stat. *Probability Theory*, t. 2, 1972, p. 149-167.
- [17] M. SCHREIBER, Fermeture en probabilité de certains sous-espaces d'un espace L^2 . Application aux chaos de Wiener. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. 14, 1969, p. 36-48.

(Manuscrit reçu le 5 avril 1974)