

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. YOR

## **Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 10, n° 1 (1974), p. 31-36

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1974\\_\\_10\\_1\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_1_31_0)

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach

par

M. YOR

RÉSUMÉ. — On montre sur des contre-exemples la difficulté qu'il y a à sortir des espaces de Hilbert pour la définition de l'intégrale stochastique d'un processus à valeurs opérateurs par rapport à une martingale (même un mouvement brownien réel).

SUMMARY. — With the help of counter examples, we show the difficulty of extending the definition of the stochastic integral of an operator valued process by a martingale (even a scalar brownian motion) beyond the class of Hilbert spaces.

### 1. PRÉLIMINAIRES

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  espace de probabilité muni d'une famille croissante de sous-tribus  $(\mathcal{F}_{t, t \in \mathbb{R}_+})$  continue à droite, et telle que  $\mathcal{F}_t$  contienne les ensembles négligeables de  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_{s, s \in \mathbb{R}_+})$ ; soit  $(m_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une  $\mathcal{F}_t$  martingale réelle continue telle que  $E[m_t^2] < \infty, \forall t$ , et  $a$ , le processus croissant continu associé.

On note  $B$  un espace de Banach réel, séparable,  $B'$  son dual fort, et  $(y', x) = y'(x) (y' \in B'; x \in B)$  exprime la dualité entre  $B$  et  $B'$ .  $T > 0; C > 0$ ;  $\mathcal{M}_{T, C}(B)$  est l'ensemble des processus  $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow B$   $\mathcal{F}_t$  bien mesurables, et tels que  $\forall s \leq T, \forall \omega, \|\varphi(s, \omega)\|_B \leq C$ . Une définition naturelle de

$\left( \int_0^t \varphi(s) dm_s, t \leq T \right)$  serait un processus  $\Phi(t, \omega)$  — s'il existe — bien mesurable, à valeurs dans  $B$ , tel que :

$$\forall y' \in B', (y', \Phi(t)) = \int_0^t (y', \varphi(s)) dm_s \quad \text{P. p. s.}$$

On montre dans la suite pour les espaces  $B = l^p(\mathbb{N})$  ( $1 \leq p < 2$ ) qu'une telle construction est impossible. En effet, si  $\varphi(s) = (\varphi_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ , alors :

$$(1) \quad \Phi(t) = \left( \int_0^t \varphi_n(s) dm_s \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{P. p. s.}$$

et on exhibera plusieurs exemples de processus  $\varphi \in \mathcal{M}_{T,C}(l^p(\mathbb{N}))$  ( $1 \leq p < 2$ ) tels que :

soit a)  $E[\|\Phi(T)\|_p^p] = \infty$  ou même  $P[\|\Phi(T)\|_p < \infty] = 0$

soit b) pour des processus  $\varphi$  pour lesquels a) n'est pas vérifié (en particulier  $\varphi$  tel que, pour  $n \geq N$ ,  $\varphi_n(s) = 0$ ), il n'existe pas de constante  $K < \infty$  telle que :

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{M}_{T,C}(l^p(\mathbb{N}))} E[\|\Phi(T)\|_p^p] \leq K < \infty$$

où  $\Phi$  désigne l'intégrale stochastique de  $\varphi$  par rapport à un mouvement brownien réel.

Une telle constante  $K$  existe lorsque l'on remplace  $l^p(\mathbb{N})$  par  $H$  espace de Hilbert et que l'on considère  $E[\|\Phi(T)\|_H^k]$  ( $k \geq 1$ ) (il suffit de considérer pour  $m \in \mathbb{N}$ ;  $f(x) = \|x\|_H^{2m}$ , et on applique une formule de Ito) (cf. [2] ou chapitre III.A de [3]).

Remarquons que l'existence d'un processus  $\varphi$  vérifiant a) entraîne b) : il suffit de considérer les processus  $\varphi^{(n)}$  formés avec les  $n$  premières coordonnées de  $\varphi$ .

## 2. LE CAS $l^1(\mathbb{N})$

2.a Pour montrer a), on prend pour  $(m_i)$  un  $\mathcal{F}_t$  mouvement brownien  $(B_i)$

$$\varphi(s) = \left( 1_{\left[ \frac{T}{n+1}, \frac{T}{n} \right]}(s) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{M}_{T,1}(l^1(\mathbb{N}^*)),$$

$$\Phi(T) = \left( \frac{B_T}{n} - \frac{B_T}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

On remarque immédiatement que :

$$E[\|\Phi(T)\|_1] = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} E\left[ \left| \frac{B_T}{n} - \frac{B_T}{n+1} \right| \right] = \sqrt{\frac{2T}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}} = \infty.$$

De plus, on a:  $P[\|\Phi(T)\|_1 = \infty] = 1$ . En effet, les variables  $X_n = \frac{B_T}{n} - \frac{B_T}{n+1}$

sont indépendantes et la convergence de la série  $\sum_n |X_n|$  p. s. est équivalente à la convergence du produit  $\prod_{p=1}^n E[e^{it|X_p|}]$  sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle. Or pour X variable gaussienne réduite,

$$\begin{cases} E[e^{it|X|}] = e^{-\frac{1}{2}t^2}(1 + iF(t)) \\ F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\mu^2} d\mu \end{cases}$$

On pose  $\sigma_n = (E[X_n^2])^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{T}{n(n+1)}}$

On a alors

$$(2) \quad \prod_{p=1}^n E[e^{it|X_p|}] = \prod_{p=1}^n e^{\frac{1}{2}t^2\sigma_p^2(1 + F(\sigma_p t))}$$

Le produit  $\prod_{p=1}^n e^{\frac{1}{2}t^2\sigma_p^2}$  converge. D'autre part,

$$1 + iF(\sigma_n t) = \rho_n e^{i\theta_n} \left( 0 < \theta_n < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\prod_{p=1}^n \rho_p \text{ converge, car } \rho_p = (1 + F(\sigma_p t)^2)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \text{Log } \rho_p \sim \frac{1}{2} (F(\sigma_p t))^2$$

Enfin, pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $\theta_n \simeq \sin \theta_n \simeq F(\sigma_n t)$

$$\begin{aligned} F(\sigma_n t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma_n t} e^{\frac{1}{2}\mu^2} d\mu \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma_n t} \left( \frac{\mu}{\sigma_n t} \right) e^{\frac{1}{2}\mu^2} d\mu \\ &= K \frac{1}{\sigma_n} (e^{\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} - 1) \sim K' \sigma_n \end{aligned}$$

Or,  $\sum_n \sigma_n = \infty$ ; d'où  $\sum_n \theta_n = \infty$  et  $\theta_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$ ; le produit (2) n'est donc pas convergent. Comme  $\{ \omega \mid \|\Phi(T)\|(\omega) = \infty \}$  est indépendant de lui-même, on a le résultat.

L'existence, sans calcul, d'un autre exemple, m'a été signalée par M. Métivier. Considérons sur  $[0, T[$  les intervalles  $I_n = \left[ \frac{T}{n+1}, \frac{T}{n} \right[ (n \in \mathbb{N}^*)$ .

Sur  $I_n$ , d'après un théorème de Lévy, pour des subdivisions  $(\tau_p^n)_{p \in \mathbb{N}}$ , de plus en plus fines, et dont le pas tend vers 0, on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \uparrow \sum_{t_i \in \tau_p^n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty \quad \text{P. p. s.}$$

$$\text{D'où} \quad \mathbb{P} \left[ \lim_{p \rightarrow \infty} \uparrow \left\{ \omega \left| \sum_{t_i \in \tau_p^n} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \geq 1 \right. \right\} \right] = 1$$

Il existe donc  $p_n$  tel que  $\mathbb{P}[\Omega_n] \geq \frac{1}{2}$ , avec :

$$\Omega_n = \left\{ \omega \left| \sum_{t_i \in \tau_{p_n}^n} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \geq 1 \right. \right\}; \quad \sum \mathbb{P}(\Omega_n) = \infty$$

Les ensembles  $\Omega_n$  sont indépendants, le mouvement brownien  $(B_t)$  étant à accroissements indépendants, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega. \quad \text{P. p. s.}$$

Si l'on considère la partition de  $]0, T[$  réalisée avec l'union des  $\tau_p^n$ , et en ordonnant en décroissant les points de cette partition, on :

$$\varphi(s) = (1_{[t_{n+1}, t_n]}(s))_{n \in \mathbb{N}}$$

D'où

$$\|\Phi(T)\|_1 = \sum_n \sum_{t_i \in \tau_{p_n}^n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|$$

Comme P. p. s.,  $\omega$  appartient à une infinité de  $\Omega_n$ ,  $\|\Phi(T)\|_1 = \infty$  P. p. s.

2. b On considère toujours  $m_t = B_t$  mouvement brownien réel.

Soit  $T > 0$ ;  $\varphi^n(s) = (\varphi_k^n(s))_{k \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \varphi_k^n(s) &= 1_{\left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]}(s) & \text{si } 0 \leq k \leq 2^n - 1 \\ &= 0 & \text{si } k > 2^n \end{aligned}$$

On a :  $\|\Phi^n(s)\|_1$  est une fonction croissante de  $n$ , pour presque tout  $\omega$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi^n(T)\|_1 = \infty$  P. p. s., d'après le théorème de Lévy [I].

Donc, d'après le théorème de Beppo-Lévi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\Phi^n(T)\|_1] = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi^n(T)\|_1] = \infty$$

Il n'existe donc pas de constante  $K$  telle qu'en 1. b.

3. LE CAS  $l^p(\mathbb{N})$  ( $1 < p < 2$ )

3.a Le second exemple de 2.a s'étend au cas  $1 < p < 2$  : avec les notations de 2.a, il existe des subdivisions  $(\tau_q^n)_{q \in \mathbb{N}}$  de  $I_n$ , de plus en plus fines, et dont le pas tend vers 0 telles que :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_q^n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^p = \infty$$

(mais la limite n'est pas forcément une limite croissante). Avec les ensembles

$$\Omega_n = \left\{ \omega \mid \sum_{t_i \in \tau_q^n} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|^p \geq 1 \right\} \text{ et } P[\Omega_n] \geq \frac{1}{2}$$

le raisonnement de 2.a s'applique.

L'exemple suivant donne de façon explicite un processus  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_{T,1}(l^p(\mathbb{N}^*))$  tel que  $E[|\Phi(T)|_p^p] = \infty$ .

On considère une fonction  $\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ , croissante, telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = \infty$ , et que l'on déterminera par la suite.

$$\varphi(s) = \left( 1_{\left[ \frac{T}{\alpha(n+1)}, \frac{T}{\alpha(n)} \right[}(s) \right) \in \mathcal{M}_{T,1}(l^p(\mathbb{N}^*))$$

$$\begin{aligned} E[|\Phi(T)|_p^p] &= E \left[ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{B_T}{\alpha(n)} - \frac{B_T}{\alpha(n+1)} \right|^p \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} K_p T^{p/2} \left( \frac{1}{\alpha(n)} - \frac{1}{\alpha(n+1)} \right)^{p/2} \end{aligned}$$

Soit 
$$r(n) = \frac{1}{\alpha(n)};$$

on prend alors

$$r(1) = S^{\frac{2}{p}} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2/p}}$$

$$r(n) = \sum_{q \geq n} \frac{1}{q^{2/p}}$$

Alors,  $(r(n) \downarrow 0)$ , d'où :  $\alpha(n) \uparrow \infty$

et 
$$\sum_n (r(n) - r(n+1))^{p/2} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = \infty$$

3. *b* On emploie les notations de 2. *b* ; soit  $T > 0$  et  $(\tau_n)$  suite de subdivisions de  $[0, T]$ , de plus en plus fines, et dont le pas tend vers 0. Alors :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{p.s.}}} \sum_{t_i \in \tau_n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = T \quad (\text{Théorème de Lévy})$$

Pour  $1 < p < 2$  :

$$\sum_{t_i \in \tau_n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \leq \left( \sum_{t_i \in \tau_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^p \right) \sup_{t_i} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^{2-p}$$

D'où, d'après la continuité de  $B_t$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_k} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^p = \infty$ . Il suffit ensuite d'appliquer le lemme de Fatou pour obtenir :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{t_i \in \tau_k} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^p \right] = \infty$$

En utilisant les mêmes processus que dans 2. *b*, on a donc *b*) pour  $1 < p < 2$ .

*Remarque.* — L'intérêt et le problème de la construction des intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach est apparu dans [3] (ch. IV-C-D).

## RÉFÉRENCES

- [1] J. NEVEU, *Notes sur l'intégrale stochastique*, 1972.
- [2] Y. DALETSKI, Infinite dimensional elliptic operators and parabolic equations connected with them *Uspekhi. Math. Nank.*, t. 22, 1967.
- [3] M. YOR, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle (*à paraître*).

(Manuscrit reçu le 9 juillet 1973).