ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GÖRAN HÖGNÄS

Marches aléatoires sur un demi-groupe compact

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 1 (1974), p. 115-154
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_1_115_0>

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 1, 1974, p. 115-154.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Marches aléatoires sur un demi-groupe compact

par

Göran HÖGNÄS

Département de Mathématiques,
Åbo Akademi, Åbo, Finlande

RÉSUMÉ. — Soit S un demi-groupe topologique compact engendré par une probabilité régulière v. Les fonctions de transition $P_d(x, A) = v(x^{-1}A)$, $P_b(x, A) = (v \times v)\{(s, t) \mid sxt \in A\}$ et $P_m(x, A) = av(Ax^{-1}) + (1-a)v(x^{-1}A)$ $(0 < a < 1)$ définissent trois marches aléatoires sur S que l'on appellera marche (unilatère) à droite, marche bilatère et marche mixte, respectivement.

Dans ce travail, on établira des conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois marches soient ergodiques et mélangeantes. Pour S un demi-groupe compact séparable on obtiendra quelques résultats sur la limite de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(W_k)$$

où W_k $(k = 1, 2, \ldots)$ est la marche en question et f est une fonction continue de S dans R.

De plus, on déterminera les classes essentielles ainsi que les éléments récurrents et transitoires des trois marches.

SUMMARY. — Let S be a compact topological semigroup generated by the regular probability measure v. The transition functions $P_d(x, A) = v(x^{-1}A)$, $P_b(x, A) = (v \times v)\{(s, t) \mid sxt \in A\}$ and $P_m(x, A) = av(Ax^{-1}) + (1-a)v(x^{-1}A)$ $(0 < a < 1)$ define three random walks on S to be called (one-sided) right random walk, two-sided random walk and mixed random walk, respectively.

In this paper, we establish necessary and sufficient conditions for ergodicity and mixing for the three random walks. For S compact separable we also obtain some results on the limit of

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(W_k)$$

where W_k ($k = 1, 2, \ldots$) is the random walk and f is a continuous real-valued function on S.

Furthermore, we determine, for the three random walks, the essential classes as well as the recurrent and transient elements.

---

0. INTRODUCTION

M. Rosenblatt a étudié, dans [9], chapitre V, la convergence des suites de convolutions de probabilités régulières sur un demi-groupe compact et les marches aléatoires unilatères engendrées par une telle mesure de probabilité. Il a donné, par exemple, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les marches unilatères soient ergodiques et mélangeantes.

Ici nous compléterons ces résultats en ce qui concerne le cas non stationnaire, qui sera, en effet, asymptotiquement stationnaire dans un sens à préciser plus tard. Aussi nous nous proposons de les étendre à deux autres marches, dites bilatère et mixte, respectivement. Dans cette étude nous emploierons constamment les méthodes et les résultats de Rosenblatt dans [9].

Enfin nous définirons et étudierons les notions de classe essentielle et élément récurrent et transitoire.

1. DÉFINITIONS

Soit S un demi-groupe (de Hausdorff) compact, engendré par une mesure (de probabilité) régulière ν définie sur la plus petite tribu $\mathscr{B}$ contenant les ouverts de S. Cf. [3] [9].

Désormais toute mesure (probabilité) que nous considérerons sera régulière.

Les trois marches aléatoires suivantes seront étudiées dans la suite :

1.1. *La marche (unilatère) à droite* est définie par une certaine proba-

bilité initiale ν_0, dont le support est contenu dans S, et la fonction de transition

$$(1.1) \qquad P_d(x, A) = \nu(x^{-1}A) = \nu\{ s \in S \mid xs \in A \}, \qquad x \in S, \quad A \in \mathscr{B}.$$

S'il n'y a pas de danger de confusion nous écrirons P au lieu de P_d.

L'étude des marches à droite revient donc à l'étude des produits du type

$$(1.2) \qquad w_n = w_0 s_1 s_2 \ldots s_n$$

où les facteurs w_0 et s_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sont indépendants et de loi ν_0 et ν, respectivement.

La marche à gauche se définit d'une manière tout à fait analogue.

N. B. — Nous avons adopté ici la terminologie de Martin-Löf [*5*] et Larisse [*4*] abandonnant celle de [*2*] et [*9*].

La marche unilatère est *stationnaire* si la probabilité initiale ν_0 est égale à

$$(1.3) \qquad \mu = \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \nu^{(j)}$$

c'est-à-dire la mesure idempotente et invariante par ν sur l'idéal minimal K de S. Cf. ci-après au numéro 2.10.

Sinon, la marche est dite *asymptotiquement stationnaire.*

1.2. *La marche bilatère* se définie par sa probabilité initiale ν_0 et la fonction de transition

$$(1.4) \qquad P_b(x, A) = (\nu \times \nu)\{ (s, t) \mid sxt \in A \}, \qquad x \in S, \quad A \in \mathscr{B}.$$

On écrira P au lieu de P_b s'il n'y a pas de confusion possible.

Dans ce cas-là les produits à étudier sont de la forme :

$$(1.5) \qquad w_n = s_n s_{n-1} \ldots s_2 s_1 w_0 t_1 t_2 \ldots t_{n-1} t_n$$

où s_i $(i = 1, 2, \ldots)$, t_j $(j = 1, 2, \ldots)$ et w_0 sont indépendants et de loi ν et ν_0, respectivement.

La marche stationnaire (asymptotiquement stationnaire) se définit comme ci-dessus au numéro 1.1.

1.3. *La marche mixte* est le processus $\{ w_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots \}$ ou

$$(1.6) \qquad w_n = \begin{cases} s_n w_{n-1} & \text{avec probabilité } a, \quad 0 < a < 1 \\ w_{n-1} s_n & \text{avec probabilité } 1 - a \end{cases}$$

avec w_0 et s_i ($i = 1, 2, \ldots$) indépendants, de loi ν_0 et ν, respectivement. Pour la marche mixte la fonction de transition sera, cf. [2],

$$(1.7) \qquad P_m(x, A) = a\nu(Ax^{-1}) + (1 - a)\nu(x^{-1}A), \qquad x \in S, \quad A \in \mathscr{B}.$$

S'il n'y a pas de confusion possible on écrira P au lieu de P_m.

La stationnarité (stationnarité asymptotique) se définit encore comme pour la marche unilatère à droite.

Noter que si $a = 0$, ou si S est commutatif, w_n sera la marche à droite. Si S est commutatif la marche bilatère s'identifiera à la marche à droite engendrée par la probabilité $\nu^{(2)}$.

2. QUELQUES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Nous donnerons ici rapidement quelques résultats qui seront utilisés plus tard.

LEMME 2.1. — Les $P_i(x, A)$ ($i = d, b, m$) sont des fonctions boréliennes en x (pour $A \in \mathscr{B}$ fixé) et des probabilités régulières en A (pour $x \in S$ fixé).

Démonstration. — Le résultat est démontré dans [9], p 130 pour les marches à droite et à gauche. P_m étant une combinaison linéaire des fonctions de transition des deux marches unilatères le résultat vaut aussi pour P_m.

Nous démontrons le lemme pour la fonction de transition de la marche bilatère d'une façon analogue à la méthode de [9].

Si $A \in \mathscr{B}$ alors $\{ (s, t) \mid sxt \in A \} \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$ étant image inverse de A par l'application continue $(s, t) \mapsto sxt$. $\nu \times \nu$ est une probabilité régulière [7]. Il existe donc un fermé C tel que

$$(\nu \times \nu)(\{ (s, t) \mid sxt \in A \} \setminus C) < \varepsilon.$$

$F = \{ sxt \mid (s, t) \in C \}$ est un fermé, par la continuité de l'application $(s, t) \mapsto sxt$, inclus dans A. $C \subseteq \{ (s, t) \mid sxt \in F \} \subseteq \{ (s, t) \mid sxt \in A \}$ d'où $P(x, A) - P(x, F) < \varepsilon$.

Il est facile de vérifier que $P(x, \cdot)$ est une probabilité sur $\mathscr{B}$. $P(x, \cdot)$ est donc une probabilité régulière sur $\mathscr{B}$.

Pour montrer que $P(\cdot, A)$ est borélienne il suffit, d'après la démonstration dans [9], de montrer que $P(\cdot, O)$ est borélienne pour O un ouvert fixé.

$P(x, \cdot)$ est une probabilité régulière. Il s'ensuit (par le lemme d'Urysohn) que

$$P(x, O) = \sup_{\substack{f \text{ continue} \\ f=0 \text{ sur } O^c}} \int f(y)P(x, dy) = \sup_{\substack{f \in \mathscr{C} \\ f=0 \text{ sur } O^c}} \iint f(sxt)\nu(ds)\nu(dt)$$

où $\mathscr{C}$ est l'ensemble de fonctions continues à valeurs dans [0, 1] définies sur S.

On en déduit, voir [9], que l'ensemble

$$A_\alpha = \{ s \mid P(s, O) > \alpha \}$$

est ouvert, donc appartient à $\mathscr{B}$. Cela montre que $P(\cdot, O)$ est une fonction borélienne et, d'après ce qui précède, que $P(\cdot, A)$ est borélienne quel que soit $A \in \mathscr{B}$. ■

LEMME 2.2. — Soient A et B deux fermés de S tels que $AB = C$. Quel que soit l'ouvert $O(C)$ contenant C il existe des ouverts $O(A) \supseteq A$ et $O(B) \supseteq B$ avec $O(A)O(B) \subseteq O(C)$.

Démonstration. — Voir [3]. ■

LEMME 2.3. — Soit f une fonction continue de S dans [0, 1]. Il existe un recouvrement fini $\{ U_i \}$ $(i = 1, \ldots, N)$ de S tel que

$$\forall s, t \in S \cup \emptyset : \sup_{x, x' \in U_i} | f(sxt) - f(sx't) | < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

où la notation $S \cup \emptyset$ est introduite pour tenir compte des produits de la forme sx et xt.

Démonstration. — Voir [2] [3] et [9]. ■

DÉFINITION 2.4. — Soit $f \in \mathscr{C}$. L'opérateur de transition P associé à la fonction de transition P se définit par

$$Pf(x) = \int P(x, dy)f(y).$$

Les itérés de P sont donnés par

$$P^n f(x) = \int P(x, dy)P^{n-1}f(y) = \int P^n(x, dy)f(y).$$

Remarques. — (1) L'opérateur de transition P_i sera, bien entendu, celui associé à la fonction de transition P_i $(i = d, b, m)$.

(2) Si f est une fonction continue du compact S dans R, alors

$$\| f \| \equiv \sup_{s \in S} | f(s) | < \infty$$

En normant f convenablement f peut être incluse dans $\mathscr{C}$.

Désormais nous considérerons, sauf contre-indication spécifique, que $0 \leqq f \leqq 1$ si f est continue sur S.

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} P_d f(x) &= \int \nu(ds) f(xs) \\ P_b f(x) &= \int \nu(ds) f(sxt) \nu(dt) \\ P_m f(x) &= \int \nu(ds) \{ af(sx) + (1 - a) f(xs) \} \end{aligned}$$

DÉFINITION 2.5 ([9], p. 133). — Une famille $\mathscr{F}$ de fonctions continues du compact S dans [0, 1] est dite *équicontinue* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $\{ O_j \mid j = 1, \ldots, n \}$ fini (qui dépend de ε en général) tel que

$$\forall f \in \mathscr{F} : \sup_{s,t \in O_j} | f(s) - f(t) | < \varepsilon.$$

DÉFINITION 2.6. — Un opérateur linéaire borné P, qui applique $\mathscr{C}$ dans lui-même, est dit *équicontinu* si la suite $\{ P^n f \mid n = 0, 1, 2, \ldots \}$ est équicontinue et bornée, quelle que soit $f \in \mathscr{C}$ fixée.

Tous les opérateurs à étudier dans la suite seront des opérateurs bornés appliquant $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$.

LEMME 2.7. — Les opérateurs P_i des définitions 1.1, 1.2 et 1.3 ($i = d, b, m$) sont équicontinus.

Démonstration. — Voir [9] et [2] pour $i = d$ et m, respectivement. Dans le cas b il suffit de remarquer que ($P = P_b$)

$$\sup_{x,x' \in U_i} | Pf(x) - Pf(x') | = \sup_{x,x' \in U_i} \left| \int (\nu \times \nu) \{ (s, t) \mid sxt \in dy \} f(y) - \int (\nu \times \nu) \{ (s, t) \mid sx't \in dy \} f(y) \right|$$

ce qui est $< \varepsilon$ si l'on choisit le recouvrement U_i d'après le lemme 2.3 ($f \in \mathscr{C}$). P applique bien $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ et l'on a aussi, pour tout n,

$$\sup_{x,x' \in U_i} | P^n f(x) - P^n f(x') | < \varepsilon.$$

Donc, P est équicontinu dans le sens de la définition 2.6.

DÉFINITION 2.8. — Une suite d'opérateurs (T_n) sur $\mathscr{C}$ est dite *convergente* vers l'opérateur $\bar{T}$ si, quelle que soit $f \in \mathscr{C}$

$$\| T_n f - \bar{T} f \| \equiv \sup_{s \in S} | T_n f(s) - \bar{T} f(s) | \to 0.$$

On dit que l'opérateur linéaire T est *positif* si $f \geqq 0$ implique $Tf \geqq 0$.

Une conséquence immédiate de l'équicontinuité de P est, d'après [9], théorème V.3.1, le

LEMME 2.9. — Soit P un opérateur positif équicontinu (sur $\mathscr{C}$). Alors la suite (P_n) où

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k$$

converge vers un opérateur $\bar{P}$, qui applique $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$, tel que

$$\bar{P}P = P\bar{P} = \bar{P}^2 = \bar{P}.$$

DÉFINITION 2.10. — Nous dirons que la suite (ν_n) de probabilités régulières sur S converge vers la probabilité régulière $\bar{\nu}$ si

$$\int \nu_n(dx) f(x) \to \int \bar{\nu}(dx) f(x)$$

pour toute $f \in \mathscr{C}$.

A l'aide du lemme précédent on démontre, [9], que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \nu^{(k)} \to \mu \tag{2.1}$$

et

$$\mu * \nu = \nu * \mu = \mu^{(2)} = \mu. \tag{2.2}$$

LEMME 2.11. — Soit ν une probabilité régulière sur S. On supposera que S soit engendré par ν, c'est-à-dire

$$S = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (C(\nu))^n} \tag{2.3}$$

où

$$\begin{aligned} C(\nu) &= \{ s \mid \text{tout voisinage de } s \text{ a } \nu\text{-mesure positive} \} \\ &= \text{le support de } \nu. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Alors, quel que soit l'ouvert O contenant l'idéal minimal K de S, il existe un m tel que

$$\nu^{(n)}O > 1 - \varepsilon \qquad \text{dès que } n > m.$$

Démonstration. — Voir [9], lemme V.4.3. ■

Autrement dit, la suite de convolutions tend à se concentrer « près de » K.

2.12. — La probabilité limite μ est donc une probabilité régulière sur l'idéal minimal K de S. Nous rappelons que K est un demi-groupe complètement simple et qu'il est homéomorphe et algébriquement isomorphe à

$$X \times G \times Y \tag{2.5}$$

(avec la topologie produit) où X, Y sont des compacts et G un groupe compact. X(Y) s'identifie à l'ensemble d'idéaux minimaux à droite (gauche) de S. La multiplication sur $X \times G \times Y$ est donnée par

$$(x, g, y)(x', g', y') = (x, g\phi(y, x')g', y') \tag{2.6}$$

où ϕ est une application continue de $Y \times X$ dans G. La représentation de K donnée ci-dessus s'appelle la représentation de Rees-Suschkewitsch. Pour une discussion complète voir par exemple [6] ou [9].

La mesure idempotente μ de (2.1) se décrit d'une façon simple à l'aide de décomposition de Rees-Suschkewitsch.

LEMME 2.13. — Soit μ une probabilité régulière indempotente sur le demi-groupe compact $K = X \times G \times Y$ et $C(\mu) = K$. Alors μ est une mesure produit

$$\mu = \alpha \times \chi \times \beta \tag{2.7}$$

sur la tribu produit $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(G) \otimes \mathscr{B}(Y)$ des tribus boréliennes sur X, G et Y, respectivement, où χ est le mesure de Haar normée sur G et α et β des mesures de probabilité régulières sur X et Y avec $C(\alpha) = X$ et $C(\beta) = Y$.

Démonstration. — Voir [9], théorème V.4.3. ■

Finalement, nous rappelons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $(\nu^{(n)})$ converge, [9], théorème V.5.1.

LEMME 2.14. — Soit ν une probabilité régulière sur le demi-groupe compact S, engendré par ν. La suite $(\nu^{(n)})$ ne converge pas si et seulement si il existe un sous-groupe propre distingué $G' \subseteq G$, $G' \neq G$, tel que, dans la représentation de Rees-Suschkewitsch, $\phi(Y, X) \subseteq G'$ et

$$(X \times G' \times Y)C(\nu) \subseteq (X \times gG' \times Y) \tag{2.8}$$

où

$$g \notin G' \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} g^j G'} = G. \tag{2.9}$$

Démonstration. — Nous démontrerons, suivant Rosenblatt [9] où l'on peut trouver la démonstration complète, que la condition est nécessaire. Cela parce que quelques notions importantes, introduites dans cette démonstration, nous serviront plus tard.

Supposons donc que $(\nu^{(n)})$ ne converge pas quand $n \to \infty$.

$$\Sigma(\nu) = \overline{\{ \nu^{(n)} \mid n = 1, 2, \ldots \}}$$

est un demi-groupe (séparé) commutatif compact dont l'idéal minimal $K(\nu)$ est un groupe commutatif [6]. $K(\nu)$ a plus d'un élément puisque $(\nu^{(n)})$ est supposée non convergente [9].

$$\eta_e = \text{l'élément neutre du groupe } K(\nu), \tag{2.10}$$

est un idempotente de $\Sigma(\nu)$ et donc de la forme

$$\alpha \times \chi_{G'} \times \beta \tag{2.11}$$

où α et β sont des probabilités sur X et Y, respectivement, et $\chi_{G'}$ la mesure de Haar sur un sous-groupe fermé G′ de G. $C(\alpha) = X$ et $C(\beta) = Y$ car ν engendre S. (On démontre facilement que η_e et μ de (2.1) commutent. Or $C(\eta_e * \mu) = C(\eta_e)K = KC(\eta_e) = C(\mu * \eta_e)$. La projection sur X du support de η_e, c'est-à-dire $C(\alpha)$ est donc tout X = la projection de K sur X). Il en résulte que $\phi(Y, X) \subseteq G'$.

G′ est un sous-groupe propre de G. Sinon on aurait

$$\eta = \eta_e * \eta * \eta_e = \eta_e$$

pour tout $\eta \in K(\nu)$, car le support d'un élément de $K(\nu)$ est inclus dans K (le fait que $\nu^{(n)} * K(\nu) \subseteq K(\nu)$ pour tout n et le lemme 2.11). Or, par hypothèse il y a dans $K(\nu)$ d'autres éléments que η_e.

Si $\eta \in K(\nu)$, alors

$$\eta * \eta_e = \eta_e * \eta = \eta,$$

ce qui implique que la projection sur G de $C(\eta)$ est une réunion de classes $CG' = G'C$. $K(\nu)$ étant un groupe il existe $\eta' \in K(\nu)$ tel que

$$\eta * \eta' = \eta' * \eta = \eta_e$$

d'où l'on déduit que la projection en question est, en fait, une classe simple $gG' = G'g$ où $g \notin G'$.

Poser

$$\eta = \nu * \eta_e = \eta_e * \nu. \tag{2.12}$$

Alors $\eta \in K(\nu)$. S étant engendré par ν il s'ensuit que G est engendré par η, plus précisément que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} g^j G'$$

est dense dans G.

G′ est un sous-groupe distingué. A cet effet, considérer $h \in G$. Il faut montrer que $hG' = G'h$. Mais $h = \lim g^{j_i} g'_{j_i} = \lim g''_{j_i} g^{j_i}$, où (j_i) est une suite d'entiers et $g', g'' \in G'$.

La multiplication est continue et G′ est compact d'où

$$hG' = \lim (g^{j_i} g'_{j_i} G') = \lim (g''_{j_i} g^{j_i} G') = G'h.$$

$$C(\eta) = C(\eta_e) C(\nu)$$

d'où

$$(X \times G' \times Y) C(\nu) = X \times gG' \times Y = X \times G'g \times Y$$

ce qui achève la démonstration. ■

3. PROCESSUS STATIONNAIRES ERGODIQUES ET MÉLANGEANTS

3.1. — Soit Ω l'espace canonique d'un processus de Markov sur S, de mesure initiale μ et de fonction de transition $P(x, A)$; $\omega = (Y_0(\omega), Y_1(\omega), \ldots)$ où Y_i est la i-ème coordonnée de la trajectoire ω. Le processus est dit *stationnaire* si

$$\mu A = \int \mu(dx) P(x, A) \qquad \text{quel que soit } A \in \mathscr{B}.$$

3.2. — Un processus stationnaire Y est *ergodique* si pour toute fonction f borélienne et intégrable par rapport à μ, l'on a

$$\hat{f}(Y) \equiv \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(Y_k(\omega)) = \int f(x) \mu(dx) \equiv Ef \tag{3.1}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Cela équivaut à la condition suivante

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_A \mu(dx) P^k(x, B) \to \mu A \mu B \qquad A, B \in \mathscr{B} \tag{3.2}$$

et encore à

$$(3.3) \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(P^j f)(x) \to Ef \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in S$$

quelle que soit f borélienne μ-intégrable.

L'ergodicité peut encore s'exprimer comme une condition sur les ensembles *invariants* par P, c.-à-d. les ensembles A tels que $P(x, A) = 1_A(x)$ pour μ-presque tout x (1_A est la fonction indicatrice de l'ensemble A). Les ensembles invariants forment une tribu $\mathscr{I}$. Le théorème ergodique de Birkhoff dit que

$$(3.4) \quad \hat{f}(Y)(\omega) \equiv \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(Y_k(\omega)) = E\{ f \mid \mathscr{I} \}(\omega) \quad \text{pour presque tout } \omega.$$

Il s'ensuit que le processus est ergodique si et seulement si $\mathscr{I}$ est triviale, c'est-à-dire $\mathscr{I} = \{ \emptyset, K \}$ à des ensembles μ-négligeables près.

3.3. — Le processus est dit *mélangeant* si, en plus,

$$(3.5) \qquad \int_A \mu(dx)P^n(x, B) \to \mu A \mu B, \qquad A, B \in \mathscr{B}$$

ce qui implique

$$(3.6) \qquad \int \mu(dx) f(x)(P^n g)(x) \to Ef\,Eg$$

quelles que soient les fonctions boréliennes carré-intégrables par rapport à μ.

Pour des informations plus complètes sur les processus ergodiques et mélangeants le lecteur est renvoyé à [9], chapitre IV.

4. LA MARCHE A DROITE

Nous examinerons, dans ce chapitre, un peu plus en détail la marche aléatoire à droite dont la fonction de transition $P(= P_d)$ est

$$(1.1) \qquad P(x, A) = \nu(x^{-1}A) = \nu\{ s \in S \mid xs \in A \} \qquad x \in S, \quad A \in \mathscr{B}.$$

Poser $\mu = \lim \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \nu^{(j)}$ ((2.1)). On a

$$(4.1) \qquad \int \mu(dx)P(x, A) = \int \mu(dx)\nu(x^{-1}A) = (\mu * \nu)A = \mu A.$$

μ est donc une mesure invariante par P. La marche à droite stationnaire de 1.1 est bien un processus stationnaire au sens du chapitre 3.

THÉORÈME 4.1. — Soit S un demi-groupe compact engendré par une probabilité régulière ν. La marche à droite stationnaire sur S définie par μ de (2.1) et P de (1.1) est ergodique si et seulement si le seul idéal minimal à droite est l'idéal minimal (bilatère) K. La marche est mélangeante si et seulement si, de plus, le support $C(\nu)$ de ν n'est pas inclus dans un ensemble de la forme

$$(X \times G' \times Y)^{-1}(X \times gG' \times Y)$$

avec G' un sous-groupe propre distingué fermé de G contenant $\phi(Y, X) = \phi(Y)$ et tel que $g \notin G'$ et gG' engendre G.

Remarquer que la marche est mélangeante si et seulement si elle est ergodique et $(\nu^{(n)})$ converge.

Démonstration du théorème 4.1. — Rosenblatt [9] a démontré le théorème dans le cas d'une marche stationnaire sur K. Il ne nous reste qu'à étendre le résultat au cas d'une marche stationnaire sur S.

Pour montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_A \mu(dx)P^k(x, B) \to \mu A \mu B \tag{3.2}$$

$$\left[(3.5) \quad \int_A \mu(dx)P^n(x, B) \to \mu A \mu B\right]$$

il suffit de montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int P^k(x, dy)f(y) \to \int \mu(dy)f(y) \equiv Ef \tag{4.2}$$

$$\left[(4.3) \quad \int P^n(x, dy)f(y) \to \int \mu(dy)f(y)\right]$$

quelle que soit $f \in \mathscr{C}$, l'ensemble de fonctions continues de S dans [0, 1].

En effet, à tout B borélien correspond une f telle que

$$\int \mu(dx) \mid 1_B(x) - f(x) \mid < \varepsilon \tag{4.4}$$

($\varepsilon > 0$ arbitraire, fixé) car μ est une probabilité régulière. Alors

$$\left| \mu B - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, B) \right| \leqq | \mu B - Ef | + \left| Ef - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int P^k(x, dy) f(y) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int P^k(x, dy) \, | 1_B(y) - f(y) | .$$

Intégration par rapport à μ sur A donne (pour n assez grand)

$$\int_A \mu(dx) \left| \mu B - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, B) \right| \leqq \int \mu(dx) \left| \mu B - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, B) \right| \leqq \varepsilon + \varepsilon + \int \mu(dy) \, | 1_B(y) - f(y) | \leqslant 3\varepsilon.$$

L'implication (4.3) $\Rightarrow$ (3.5) se démontre analoguement.

Considérer l'idéal minimal $K(v)$ du demi-groupe $\Sigma(v) = \overline{\{ v^{(n)} \mid n = 1, 2, \ldots \}}$. $K(v)$ est un groupe commutatif, cf. la démonstration du lemme 2.14. On va appliquer le lemme 2.3 au compact $K(v)$. Une base d'ouverts de la topologie de $\Sigma(v)$ est donnée par

$$U(\sigma) = \left\{ \tau \in \Sigma(v) \mid \left| \int f(s)\sigma(ds) - \int f(s)\tau(ds) \right| < \varepsilon \right\}$$

où f est une fonction continue sur S, cf. [9]. Le lemme 2.3 s'exprime de la façon suivante :

Soit $f \in \mathscr{C}$. Il existe un recouvrement $\{ U_i \mid i = 1, \ldots, N \}$ de $K(v)$ tel que, pour toute $\sigma \in \Sigma(v)$,

$$\sup_{\tau, \tau' \in U_i} \left| \int f(s)\tau * \sigma(ds) - \int f(s)\tau' * \sigma(ds) \right| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Nous supposerons $\eta_e \in U_1$ où η_e est défini par (2.10). Pour un m assez grand l'on aura $v^{(m)} \in U_1$. Alors, pour tout entier k,

$$\left| \int f(s)\eta_e * v^{(k)}(ds) - \int f(s) v^{(m+k)}(ds) \right| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Il existe donc un m tel que, quel que soit k, $P^{(m+k)}f(x) \equiv \int v^{(m+k)}(ds) f(xs)$ égale, à ε près

$$\int P'^k(x, ds) f(s) \equiv \int (\eta_e * v)^{(k)}(ds) f(xs) \tag{4.7}$$

(remplacer $f(s)$ par $f(xs)$ dans (4.6) ; par la commutativité de $\Sigma(v)$ $(\eta_e * v)^k = \eta_e * v^k$)

$$(4.8) \qquad \left| \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}^j f(x) - \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}'^j f(x) \right| < 2\varepsilon$$

dès que n est assez grand, par exemple tel que $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}^j f(x) < \varepsilon$.

Donc, si nous parvenons à démontrer que la marche à droite sur K définie par μ et $\mathrm{P}'(x, \mathrm{A}) = (\eta_e * v)(x^{-1}\mathrm{A})$ satisfait à

$$(4.2)' \qquad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}'^j f(x) \to \mathrm{E}f \qquad \text{pour toute } f \in \mathscr{C},$$

il s'ensuit que la marche à droite sur S définie par μ et $\mathrm{P}(x, \mathrm{A})$ le fait aussi.

On constate d'abord que μ est invariante par P'.

$$(4.9) \qquad \left| \int f(st)\mu(ds) - \int f(st)v_n(ds) \right| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } t \in \mathrm{S}$$

dès que n est assez grand, où v_n est défini par

$$(4.10) \qquad v_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v^{(j)}.$$

Cela suit du fait que $v_n \to \mu$ ((2.1)) et de la compacité de S. ((4.9) vaut pour u dans un voisinage $\mathrm{V}(t)$ de t ; les $\mathrm{V}(t)$, $t \in \mathrm{S}$, recouvrent S ; choisir n tel que (4.9) vaut pour $u \in \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{V}_i$, le recouvrement fini de S extrait de $\{ \mathrm{V}(t) \}$).

D'autre part, il existe $m \geqq n$ avec

$$(4.11) \qquad \left| \int f(st)v^{(m)}(dt) - \int f(st)\eta_e(dt) \right| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } s \in \mathrm{S}.$$

(Pour le démontrer on fait appel à la compacité de S de la même manière que tout à l'heure.)

On aura donc

$$\left| \int f(st)\mu(ds)v^{(m)}(dt) - \int f(st)\mu(ds)\eta_e(dt) \right|$$
$$\leqq \left| \int f(st)(\mu(ds) - v_n(ds))v^{(m)}(dt) \right| + \left| \int f(st)v_n(ds)(v^{(m)}(dt) - \eta_e(dt)) \right| < 2\varepsilon,$$

d'où $\mu * \eta = \mu * \nu^{(m)} = \mu$ et encore $\mu * \nu = \mu * \nu * \eta_e = \mu$, i. e. μ est invariante par P'.

Il ne nous reste qu'à vérifier que η engendre K ce qui est évident du fait que ν engendre S.

Rosenblatt montre [9] que si $|X| = 1$ $(K = X \times G \times Y)$ P' satisfait à (4.2), d'où il suit que les deux marches définies par μ, P' et μ, P, respectivement, sont ergodiques.

D'après ce qui précède on déduit également que si

$$\lim P'^n f(x) \quad \text{existe}$$

alors

$$\lim P^n f(x) \quad \text{existe aussi et les deux limites sont égales.}$$

Donc si $|X| = 1$ et $(\nu^{(n)})$ converge (ce qui équivaut à la condition énoncée) les marches stationnaires sur K et S sont mélangeantes.

Inversement, si $|X| \geqq 2$ il existe des ouverts O_1, O_2, U_1, U_2 (qui coupent K) avec $\bar{O}_1 \cap \bar{O}_2 = \emptyset$, $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$ et $U_i S \subseteq O_i$ $(i = 1, 2)$. Cela se déduit de $RS = R$ et le lemme 2.2; R est un idéal minimal à droite quelconque. On aura

$$\int_{U_1} \mu(dx) P^n(x, O_2) = 0 \qquad \text{pour tout } n$$

tandis que $\mu U_1 \mu O_2 > 0$. $|X| \geqq 2 \Rightarrow$ la marche à droite n'est pas ergodique.

Soit G' un sous-groupe propre de G avec les propriétés de l'énoncé du théorème. G' et gG' sont deux fermés disjoints. Par conséquent il existe deux ouverts $O \supseteq G'$ et $O_1 \supseteq gG'$ à fermetures disjointes.

$$(X \times G' \times Y)C(\nu) = (X \times gG' \times Y)$$

implique que l'on peut trouver O tel que

$$(X \times O\bar{O}G' \times Y)C(\nu) \subseteq (X \times \bar{O}_1 G' \times Y).$$

Pour $x \in O$, $g^{n_i} \in O$ (un voisinage de e), $P^{n_i+1}(x, O) = 0$ et $P^{n_i+1}(x, \bar{O}_1) = 1$.

Alors

$$\int_0 \mu(dx) P^{n_i+1}(x, O) = 0,$$

n_i arbitrairement grand, contredisant $\mu O > 0$ (O ouvert de $C(\mu)$). Donc la marche n'est pas mélangeante. ■

Pour étudier le cas non ergodique on aura besoin de la tribu des invariants $\mathscr{I}$ du numéro 3.2.

LEMME 4.1. — Les ensembles invariants par P sont, à des ensembles μ-négligeables près, des réunions d'idéaux minimaux à droite.

Autrement dit, A est invariant si et seulement si A est μ-équivalent à un $A' \times G \times Y$ avec $A' \in \mathscr{B}(X)$.

Démonstration. — La condition est suffisante car si

$$A = A' \times G \times Y = \bigcup_{x \in A} xS,$$

alors $P(x, A) = 1_A(x)$.

D'autre part si $P(x, A) = 1_A(x)$ alors $P^n(x, A) = \nu^{(n)}(x^{-1}A) = 1_A(x)$ et encore $\nu_n(x^{-1}A) = 1_A(x)$. Si $f \in \mathscr{C}$ est telle que

$$\int \mu(dx) \mid 1_A(x) - f(x) \mid < \varepsilon$$

alors

$$\int \mu(dx) \mid \mu(x^{-1}A) - 1_A(x) \mid$$
$$\leqq \int \mu(dx)\mu(x^{-1}ds) \mid 1_A(s) - f(s) \mid + \int \mu(dx) \left| \int \mu(x^{-1}ds) f(s) - \int \nu_n(x^{-1}ds) f(s) \right|$$
$$+ \int \mu(dx)\nu_n(x^{-1}ds) \mid 1_A(s) - f(s) \mid < 3\varepsilon$$

si n est assez grand car $\mu * \mu = \mu * \nu_n = \mu$ et $\nu_n \to \mu$.

On a donc obtenu

$$\mu(x^{-1}A) = 1_A(x) \qquad \mu\text{-presque partout}$$

Poser $\mathscr{I} = \{ A \in \mathscr{B} \mid \mu(x^{-1}A) = 1_A(x) \}$. $\mathscr{I}$ est stable pour les réunions disjointes finies, les intersections finies et la complémentation

$$\mu(x^{-1}A^c) = 1 - \mu(x^{-1}A) = 1 - 1_A(x) = 1_{A^c}(x).$$

Du fait que $\mu(x^{-1}.)$ est une mesure résulte que $\mathscr{I}$ est monotone. Il nous reste à déterminer quels générateurs de $\mathscr{B}(K)$ appartiennent à $\mathscr{I}$.

Soit $A = A' \times B \times C$ (donc un générateur de $\mathscr{B}(K) = \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(G) \otimes \mathscr{B}(Y)$)

$$\mu(x^{-1}A) = \mu \{ s \mid xs = (a, g\phi(b, a')g', b') \in A' \times B \times C \} = \begin{cases} \chi B \beta C & \text{si } a \in A' \\ 0 & \text{si } a \notin A' \end{cases}$$

où $x = (a, g, b)$ et $s = (a', g', b')$ (voir la représentation de Rees-Suschkewitsch au numéro 2.12; il est important de noter que $\mu = \alpha \times \chi \times \beta$, où χ est la mesure de Haar sur G, c'est-à-dire elle est invariante par translation).

Nous avons donc montré que

$$\mu(x^{-1}A) = 1_A(x) \Rightarrow B = G,\ C = Y \qquad (\mu\text{-p. p.})$$

Les générateurs de $\mathscr{I} = \{ A' \times G \times Y \mid A' \in \mathscr{B}(X) \} = \mathscr{I}$. ■

Remarque. — Si $x \in K$ et $O \in \mathscr{B}$ l'on a

$$\mu(x^{-1}O) = (\chi \times \beta)(O \cap xK) \tag{4.12}$$

où xK est l'idéal minimal à droite contenant x. [*3*].

Soit Y la marche à droite stationnaire. Du théorème de Birkhoff (3.4) suit

$$\hat{f}(Y)(\omega) = E\{f \mid \mathscr{I}\}(\omega) = \int_{R(\omega)} f(s)(\chi \times \beta)(ds) \qquad \text{pour presque tout } \omega \tag{4.13}$$

où $R(\omega) = Y_0(\omega)K$, l'idéal minimal à droite contenant $Y_0(\omega)$ et donc tout $Y_k(\omega)$.

4.2. — Nous allons maintenant étudier le cas général, c'est-à-dire le cas asymptotiquement stationnaire. Pour montrer dans quel sens la marche est asymptotiquement stationnaire on aura besoin de la notion de *marche parallèle* de [*2*] et [*3*]. Cette notion sera toutefois quelque peu corrigée et précisée ici.

Nous nous donnons un espace probabilisé $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ et des variables aléatoires sur cet espace à valeurs dans le demi-groupe compact S. De plus on suppose S *séparable*. Soit $\{ U_i \}$ un recouvrement ouvert fini de l'idéal minimal K de S tel que $\mu U_i > 0$ $(i = 1, \ldots, N)$; ceci a lieu, par exemple, si tous les U_i coupent K. Les variables aléatoires définies sur $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ sont les suivantes : Y_0^i de loi

$$\mu^i = (\mu \mid_{U_i})/\mu U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{4.14}$$

(μ restreinte à U_i divisée par $\mu U_i > 0$), W_0 de loi ν_0, Y_0 de loi μ et S_j de loi ν $(j = 1, 2, \ldots)$.

La marche stationnaire s'écrit alors

$$Y_j = Y_{j-1}S_j \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{4.15}$$

Noter que la séparabilité de S assure la mesurabilité de $Y_{j-1}S_j$.

Supposer que Y soit ergodique, c'est-à-dire pour toute f continue (même mesurable)

$$\hat{f}(Y)(\omega') = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(Y_k(\omega')) = Ef \quad \text{sur} \quad N^c \subseteq \Omega' \text{ ou N est négligeable.}$$

N. B. — L'espace Ω des trajectoires de Y est un sous-ensemble de Ω'. La mesure P sur Ω coïncide avec P' sur Ω parce qu'elle le fait sur les générateurs de Ω.

La marche non stationnaire à étudier est

$$W_j = W_{j-1}S_j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{4.16}$$

Soit $O_r = \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ où $\{ U_i \mid i = 1, \ldots, N \}$ est un recouvrement ouvert fini de l'idéal minimal K tel que

$$\sup_{x,x' \in U_i} | f(xs) - f(x's) | < r \qquad \text{pour tout } s \in S \tag{4.17}$$

et

$$\mu U_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Un tel recouvrement existe d'après le lemme 2.3 et car $\mu O > 0$ quel que soit l'ouvert O qui coupe $K = C(\mu)$.

Poser ensuite

$$T_0(\omega') = \begin{cases} \inf \{ n \geqq 0 \mid W_n(\omega') \in O_r \} \\ \infty \quad \text{si} \quad W_n(\omega') \notin O_r \qquad \text{pour tout } n. \end{cases} \tag{4.18}$$

LEMME 4.3. $ET_0 < \infty$. En particulier, T_0 est p. s. fini.

Démonstration. —

$$ET_0 = \sum_n nP' \{ T_0 = n \} \leqq \sum_n nP' \{ T_0 \geqq n \} \leqq \sum_n nP' \{ W_{n-1} \notin U \}$$

où U est un ouvert tel que $US \subseteq O_r$, $SU \subseteq O_r$. Le reste de démonstration suivra le lemme plus général suivant :

LEMME 4.4. — Quel que soit l'ouvert $U \supseteq K$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)} U^c < \infty$$

Démonstration. — L'on a $SK = K = KS$ d'où l'existence d'un ouvert V ($V \subseteq U$) tel que $SV \subseteq U$, $VS \subseteq U$ (lemme 2.2).

Soit $\nu_0 = \nu$. Alors

$$P' \{ W_n \in A \} = \nu^{(n)} A \qquad (A \in \mathscr{B}).$$

L'événement $\{ W_{n+m} \notin U \}$ implique $\{ W_n \notin V, W'_m \equiv S_{n+1} S_{n+2} \ldots S_{n+m} \notin V \}$ d'où

$$P' \{ W_{n+m} \notin U \} \leqq P' \{ W_n \notin V \} P' \{ W'_m \notin V \} = \nu^{(n)} V^c \nu^{(m)} V^c \quad (n, m = 1, 2, \ldots)$$

car W_n et W'_m sont indépendants, de loi $\nu^{(n)}$ et $\nu^{(m)}$, respectivement. Par conséquent

$$\nu^{(n+km)}U^c \leqq (\nu^{(m)}V^c)^k \nu^{(n)}V^c \qquad (n, m, k = 1, 2, \ldots).$$

Pour m et n assez grands, par exemple tels que $\nu^{(m)}V^c \leqq \frac{1}{2}$ et $n \geqq N$ où $\nu^{(N+i)}V^c \leqslant \varepsilon$ pour tout entier i positif (cf. lemme 2.11),

$$\nu^{(n+km)}U^c \leqq 2^{-k}\varepsilon$$
$$\nu^{(n+km+j)}U^c \leqq (\nu^{(m)}V^c)^k \nu^{(n+j)}V^c \leqq 2^{-k}\varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Donc finalement

$$\sum_n \nu^{(n)}U^c = \text{const.} + m\varepsilon \sum_k 2^{-k} < \infty. \quad \blacksquare$$

Revenons à la démonstration du lemme 4.3.

$$\begin{aligned} ET_0 \leqq \sum_n n\nu^{(n-1)}U^c &\leqq \sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=N+1}^{\infty} n\nu^{(n-1)}U^c \\ &\leqq \text{const.} + \sum_{k \geqslant 1} \sum_{j=1}^{m} (N + 1 + km + j)2^{-k}\varepsilon \\ &\leqq \text{const.} + \sum_k 2^{-k}\varepsilon m(N + 1 + km + m) < \infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Définir une marche Y^i par

$$Y^i_j = Y^i_{j-1}S_j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{4.19}$$

LEMME 4.5. — Si $\hat{f}(Y) = Ef$ p. s. alors $\hat{f}(Y^i) = Ef$ p. s.

Démonstration. — Soit A un borélien de S.

$$\begin{aligned} P'\{ Y^i_k \in A \} &= \iint 1_A(xt)\nu^{(k)}(dt)\mu \mid_{U_i}(dx)/\mu U_i \\ &= \int_{U_i} \int 1_A(xt)\nu^{(k)}(dt)\mu(dx)/\mu U_i = \frac{P'\{ Y_k \in A, Y_0 \in U_i \}}{P'\{ Y_0 \in U_i \}} \end{aligned}$$

Pareillement pour tout ensemble dans $\mathscr{F}^i_k$ (la tribu engendrée par les Y^i_j $(j \leqq k)$) et leur réunion $\mathscr{F}^i$. En particulier, si f est borélienne,

$$\begin{aligned} &P'\{ \hat{f}(Y^i) = Ef \} \\ &\quad = P'\{ \hat{f}(Y) = Ef \mid Y_0 \in U_i \} = \frac{P'\{ \hat{f}(Y) = Ef, Y_0 \in U_i \}}{P'\{ Y_0 \in U_i \}} \\ &\quad = \frac{P'(N^c \cap \{ Y_0 \in U_i \})}{P'\{ Y_0 \in U_i \}} = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarquer que Y^i est une marche non stationnaire pour laquelle $\hat{f}(Y^i) = Ef$ (p. s.) quelle que soit f borélienne.

Prendre un $\omega' \in N^c \cap M^c$ avec M l'ensemble négligeable où T_0 est infini. $T_0(\omega')$ est alors fini. $W_{T_0} \in O_r$. Poser

$$j_0(\omega') = \min_{i=1,\ldots,N} \{ i \mid W_{T_0}(\omega') \in U_i \}. \tag{4.20}$$

DÉFINITION 4.6. — *La marche (r-)parallèle à* $W_j(\omega')$ est définie par

$$Z_0(\omega') = Y_0^{j_0}(\omega')$$
$$Z_j(\omega') = Z_{j-1}(\omega')S_{j+T_0}(\omega') \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

si $\omega' \in N^c \cap M^c$. Si $\omega' \in N \cup M$

$$Z_j(\omega') = s_0 \in K \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

La marche parallèle Z est une marche sur K qui commence à l'instant T_0 où W entre dans O_r. Elle commence « près de » (dans le même U_i que) W et les « accroissements » S_j de Z sont ceux de W.

La marche parallèle est un processus de Markov car

$$P' \{ Z_n \in A \mid Z_0, \ldots, Z_{n-1} \} = P' \{ Z_n \in A \mid Z_{n-1} \} = \nu(Z_{n-1}^{-1}A).$$

La construction des U_i (4.17) implique que

$$| f(W_k) - f(Z_{k-T_0}) | < r \qquad \text{dès que } k > T_0.$$

Si la marche stationnaire Y est ergodique alors $\hat{f}(Z) = Ef$ (p. s.) (lemme 4.5).

THÉORÈME 4.2. — Soit f une fonction continue sur le demi-groupe séparable compact S avec un seul idéal minimal à droite K. Alors la marche à droite (asymptotiquement stationnaire) W définie par la probabilité initiale ν_0 et la fonction de transition $P_d(x, A) = \nu(x^{-1}A)$ satisfait à

$$\hat{f}(W) \equiv \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(W_k) = Ef \qquad \text{p. s.}$$

Démonstration. — D'après ce qui précède l'on a, quels que soient $r > 0$ et $\omega' \in N^c \cap M^c$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(W_k) - Ef \right| \leqq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(W_k) - \frac{1}{n} \sum_{k=T_0}^{n} f(Z_{k-T_0}) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=T_0}^{n} f(Z_{k-T_0}) - Ef \right| < 3r$$

si $n > T_0$ est assez grand, par exemple tel que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=T_0}^{n} f(Z_{k-T_0}) - Ef \right| < r \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{T_0} f(W_k) < nr. \quad \blacksquare$$

Passons maintenant au cas où la structure droite de K est non-triviale. Dans ce cas-là on a pour la marche parallèle Z

$$\hat{f}(Z)(\omega') = E\{ f \mid \mathscr{I} \}(\omega') = \int_{R(\omega')} f d\mu \qquad \text{p. s.} \qquad (f \in \mathscr{C}),$$

où $R(\omega') = Z_0(\omega')K$, l'idéal minimal à droite contenant $Z_0(\omega')$. La valeur de l'intégrale dépend de ω' et elle varie même si $j_0(\omega')$ ne varie pas.

L'ensemble X est compact. Donc, s'il est discret il est fini. Si X est fini on choisit le recouvrement $\{ U_i \mid i = 1, \ldots, N \}$ de (4.17) tel que chaque U_i ne contienne d'éléments que d'un idéal minimal à droite. $T_0(\omega')$ est encore fini pour presque tout ω' et il s'ensuit que

$$\hat{f}(Z)(\omega') = \int_{R(j_0)} f d\mu$$

où $R(j_0) = Z_0(\omega')K$. La construction de $\{ U_i \}$ assure que la valeur de l'intégrale est déterminée par j_0. Comme ci-dessus on déduit que $\hat{f}(W) = \hat{f}(Z)$ p. s.

Si X est infini on peut néanmoins affirmer que $\hat{f}(W)(\omega')$ existe pour presque tout ω'. En effet, par ce qui précède, pour tout $r > 0$ on peut donner un nombre

$$\int_{R(\omega')} f d\mu$$

tel que la différence entre celui-là et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(W_k)(\omega')$ n'excède pas r, dès que n est assez grand.

Nous venons de démontrer le

THÉORÈME 4.3. — Soit f une fonction continue sur le demi-groupe séparable compact S. Alors la marche à droite W définie par ν_0 et $P_d(x, A) = \nu(x^{-1}A)$ satisfait à

$$\hat{f}(W) \qquad \text{existe p. s.}$$

Si X est fini, il existe un idéal minimal $R(j_0) = Z_0(\omega')K$ tel que

$$\hat{f}(W) = \int_{R(j_0)} f(s)(\chi \wedge \beta)(ds)$$

Remarque. — Les théorèmes 4.2 et 4.3 expriment le fait que la marche non stationnaire W (appelée, par définition (chap. 1), asymptotiquement stationnaire), en ce qui concerne

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(W_k) \qquad (f \text{ continue})$$

se comporte *asymptotiquement* de la même manière que la marche stationnaire. (Noter aussi que, pour O ouvert, $\mu O = \sup_{\substack{f\in\mathscr{C} \\ f=0 \text{ sur } O^c}} Ef$.)

Examinons maintenant les états récurrents et transitoires de la marche à droite. Nous commençons par la définition de l'opérateur potentiel U.

DÉFINITION 4.7. — L'opérateur *potentiel* U_i associé à l'opérateur de transition P_i est donné par

$$U_i f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i^n f(x), \qquad f\in\mathscr{C}, \qquad i = d, b, m.$$

DÉFINITION 4.8. — On dira qu'un élément $x\in S$ est *récurrent* pour la marche à droite (bilatère ; mixte) si

$$U_d 1_V(x) = \infty\,; \qquad (U_b 1_V(x) = \infty\,; \qquad U_m 1_V(x) = \infty)$$

quel que soit le voisinage V de x. Sinon, on dira que x est *transitoire.*

Noter que $U1_V(x)$ est l'espérance du nombre de fois que la marche passe par V partant de $x\in V$.

THÉORÈME 4.4. — Pour la marche à droite les éléments de K sont récurrents, les éléments de K^c transitoires.

Démonstration. — Soit $x\in K$ et V un voisinage de x. Soit $f\in\mathscr{C}$ telle que $f\leqq 1_V$ et $f(x) = 1$. Alors

$$P_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int \nu^{(k)}(ds) f(xs) \to \int \mu(ds) f(xs) \quad (2.1).$$

$$P_n 1_V(x) \geqslant P_n f(x) > \int \mu(ds) f(xs) - \delta \geqq a > 0$$

dès que n est assez grand (dépend de δ). Cela suit du fait que $f\in\mathscr{C}$ et $f(x)=1$.

$$P_n 1_V(x) \geqq \frac{a}{2}$$

pour $n \geqq n'$ assez grand, d'où

$$U_d 1_V(x) = \infty.$$

Soit, d'autre part, $x \notin K$. Il existe un ouvert $U' \supseteq K$ et un voisinage V de x avec $\bar{V} \cap \bar{U}' = \emptyset$. Soit U tel que SU, US $\subseteq U'$.

$$U 1_V(x) = \sum_n P^n 1_V(x) = \sum_n \nu^{(n)}(x^{-1}V)$$
$$\leqq \sum_n \nu^{(n)}(x^{-1}U'^c) \leqq \sum_n \nu^{(n-1)}U^c < \infty$$

(lemme 4.4). ■

THÉORÈME 4.5. — Soit $x \in K$. Quel que soit l'ouvert U, $U \cap xK \neq \emptyset$, le temps d'entrée (temps de retour si $y \in U$) dans U partant de $y \in xK$,

$$T_U = \begin{cases} \inf\{ n \geqslant 1 \mid yW_n \in U \} \\ \infty \qquad \text{si} \quad yW_n \notin U \text{ pour tout } n, \end{cases}$$

où les W_n sont définies au numéro 4.2 avec $\nu_0 = \nu$, est d'espérance bornée.

Démonstration. — $yS = xK$ et $zS = xK$ pour tout $z \in xK$. De plus xK est compact. Il existe donc des ouverts (dans xK ou S) O_y ($y \in O_y \subseteq xK$), O_i ($i = 1, \ldots, N$), V_i ($i = 1, \ldots, N$), W tels que

$$O_y W \subseteq U, \quad O_i V_i \subseteq W \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

et

$$\bigcup_{i=1}^{N} O_i \supseteq xK,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \nu(y^{-1}\bar{O}_i) < 1 + \varepsilon.$$

La borne qui sera exhibée vaudra pour tout $y \in O'_y$, O'_y ouvert. Employant la compacité de xK on peut démontrer l'existence d'une borne valable pour xK tout entier.

$$P\{ T_U > n \} \leqq P\{ W_k \in W^c, k = 1, \ldots, n \}$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{N} P\{ yS_1 \in O_i, W'_k \notin V_i, k = 1, \ldots, n-1 \}$$

où $W'_k = S_2 \ldots S_k$ est de loi $\nu^{(k-1)}$ (cf. 4.2).

$\forall i$, $1 \leqq i \leqq N$, il existe un entier n_i avec $v^{(n_i-1)}V_i^c = v_i < 1 - \varepsilon$. Soit $p_i = v(y^{-1}O_i)$. Alors

$$P\{T_U > \max_{1 \leqq i \leqq N} n_i\} \leqq \sum_{i=1}^{N} p_i v_i.$$

Si l'on pose $M = \max_{1 \leqq i \leqq N} n_i$ et $\sum_{i=1}^{N} p_i v_i = \pi < 1 - \varepsilon^2$

$$P\{T_U > kM\} \leqq \pi^k.$$

D'où

$$ET_U \leqq \sum_n nP\{T_U \geqq n\} \leqslant \text{const.} + \sum_k \sum_{j=1}^{M} (kM + j)\pi^k < \infty. \quad \blacksquare$$

Nous venons de prouver que $U1_O(x) < \infty$ si $x \in O$ et O se sépare de K. On se gardera cependant de croire que $U1_O < \infty$, si O simplement est contenu dans K^c.

Prendre par exemple $O = K^c$. Dans un bon nombre d'applications $v^{(n)}(x^{-1}K^c) = 1$ pour tout $x \in K^c$ et tout n. Considérer le demi-groupe compact des 2×2-matrices stochastiques [*1*] [*9*].

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{pmatrix};\ \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{matrix} \right\} \qquad K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 1-x \\ x & 1-x \end{pmatrix};\ 0 \leqq x \leqq 1 \right\}$$

Soit v la probabilité induite sur S par la mesure de Lebesgue $\mathscr{L}$ sur R^2. $vK = \mathscr{L}\{(x, y) \mid x = y\} = 0$.

$$\begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & 1-x' \\ y' & 1-y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - xy' + y' & \cdot \\ yx' - yy' + y' & \cdot \end{pmatrix}$$

Un calcul simple montre que le produit de deux éléments de S n'appartient à K que si un au moins des deux le fait. Dans le cas en question on a bien $v^{(n)}(x^{-1}K^c) = 1$ pour tout n et tout $x \notin K$.

Si f est une fonction continue qui est nulle sur K et si $f(s)$ tend vers 0 assez vite quand $s \to K$ alors $Uf(x) < \infty$. Un exemple simple montre que cela ne se produit pas si f tend trop lentement vers 0.

Soit $S = \left[0, \frac{1}{2}\right] \subseteq R$ un sous-demi-groupe du demi-groupe multiplicatif $(R, \cdot)$. $K = \{0\}$, [*6*]. Soit v la mesure de Lebesgue normée sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

La fonction $f \in \mathscr{C}$ est donnée par

$$f(0) = 0$$
$$f(s) = \frac{1}{n} + \frac{s - 2^{-n}}{2^{-n}}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \text{ si } s \in [2^{-n}, 2^{-n+1}] \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Alors $\sum_n \int v^{(n)}(ds) f(2^{-m}s) \geqq \sum_n \frac{1}{2n+m} = \infty$ et $Uf(x) = \infty$ $(x \notin K)$ même si f est continue et nulle sur K.

Voici un critère, parmi d'autres, pour qu'une fonction continue descende assez vite vers 0.

LEMME 4.9. — Soit Σr_n une série convergente et $x \in S$. Soit

$$O_n = \{ s \in S \mid \ |f(s)| < r_n \} \supseteq K$$

et U_n tel que

$$SU_n \subseteq O_n \qquad [xU_n \subseteq O_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Si la série $\Sigma v^{(n)} U_n^c$ converge, alors

$$\| Uf \| \leqq M < \infty \qquad [Uf(x) < \infty].$$

Démonstration.

$$Uf(x) = \Sigma \int v^{(n)}(ds) f(xs) = \Sigma\left(\int_{U_n} v^{(n)}(ds) f(xs) + \int_{U_n^c} v^{(n)}(ds) f(xs) \right)$$
$$\leqq \Sigma(r_n + v^{(n)} U_n^c \| f \|) = M < \infty. \quad \blacksquare$$

4.10. — Notre discussion de la marche à droite se terminera par quelques résultats sur les classes essentielles de la marche. Cf. [*4*].

DÉFINITION 4.11. — On dit que $s \in S$ *mène* à $s' \in S$, ce que l'on note $s \to s'$, si pour tout voisinage V de s' il existe un entier n tel que $P^n(s, V) > 0$.

LEMME 4.12. $s \to s' \Leftrightarrow s' \in sS$.

Démonstration. $\Rightarrow$ évident.

$\Rightarrow$. Si $s' = st$, $t \in S$, pour tout voisinage V de s' il existe un entier n et un voisinage U de t tels que $V \supseteq sU$ et $U \cap (C(v))^n \neq \emptyset$. (Se rappeler que $S = \overline{\bigcup_n (C(v))^n}$ où $C(v)$ est le support de v). $v^{(n)}U > 0$ et donc

$$P^n(s, V) = v^{(n)}(s^{-1}V) \geqq v^{(n)}U > 0. \quad \blacksquare$$

Si $s \to s'$ et $s' \to s$ on dira que s et s' *communiquent*, noté $s \leftrightarrow s'$. La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur un certain sous-ensemble

de S, les états *répétitifs* $\{ s \mid s \to s \}$. La transitivité de $\leftrightarrow$ se démontre de la façon suivante : $s \leftrightarrow t$, $t \leftrightarrow u \Rightarrow \exists a, b, c, d \in S$ avec $t = sa$, $u = tb$, $t = uc$, $s = td \Rightarrow u = sab \in sS$ et $s = ucd \in uS \Rightarrow s \leftrightarrow u$ (lemme 4.12).

DÉFINITION 4.13. — L'élément s est dit (état) *essentiel* si $s \to s' \Rightarrow s' \to s$. Autrement s est dit *inessentiel*.

Les éléments de la même classe d'équivalence sont du même type. $s \leftrightarrow s'$ et $s \to t \Rightarrow t \to s$ s'écrit $s = s'a$, $s' = sb$, $t = sx \Rightarrow s = tx'$. Alors on aura $s' \to t$ (c.-à-d. $t = s'r$) $\Rightarrow t = s(br) \Rightarrow s = tx' \Rightarrow s' = tx'b$ (c.-à-d. $t \to s'$).

THÉORÈME 4.6. — s essentiel $\Leftrightarrow s \in K$. Les classes essentielles sont les idéaux minimaux à droite.

Démonstration. — $s \to s' \Rightarrow s' \to s$ s'écrit $s' \in sS \Rightarrow s \in s'S$ d'où $sS = sSS$ ($s' = st = s'ut \Rightarrow sS \subseteq sSS \subseteq sS$). sS est donc un idéal à droite. Il est minimal car $s'S = sS$ quel que soit $s' \in sS$ ($st = s'ut \Rightarrow sS \subseteq s'S$). Or K est la réunion des idéaux minimaux à droite.

Inversement, $s \in K \Rightarrow s \in sS = s'S$ quel que soit $s' \in sS$. Donc $s \to s' \Rightarrow s' \to s$. ■

4.14. — Il va de soi que les résultats obtenus pour la marche unilatère à droite s'appliquent intégralement, moyennant des transformations évidentes, à la marche unilatère *à gauche*.

5. LA MARCHE BILATÈRE

5.1. — Nous ferons ici une étude du même genre pour la marche bilatère que celle que l'on a faite tout à l'heure de la marche unilatère à droite.

Rappelons que la fonction de transition $P_b = P$ est définie par

$$P(x, A) = (v \times v)\{ (s, t) \in S \times S \mid sxt \in A \} \tag{1.4}$$

L'opérateur P associé est

$$Pf(x) = \int P(x, dy) f(x) = \int v(ds) v(dt) f(sxt). \tag{5.1}$$

D'après le lemme 2.7 l'opérateur P est équicontinu, donc la suite (P_n) où

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P_j$$

converge vers un opérateur $\bar{P}$ (lemme 2.9) avec

$$\bar{P}P = P\bar{P} = \bar{P}^2 = \bar{P}.$$

$\bar{P}$ est un opérateur linéaire continu qui applique l'espace des fonctions continues (sur S) dans lui-même. Pour x fixé

$$L_x(f) = \bar{P}f(x); \qquad L_x 1 = 1$$

est une fonctionnelle linéaire positive bornée sur l'espace des fonctions continues sur S. Le théorème de représentation de Riesz [9], page 243, assure l'existence d'une mesure de probabilité μ_x régulière telle que

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int v^{(k)}(ds) v^{(k)}(dt) f(sxt) \equiv \bar{P}f(x) = \int f d\mu_x \tag{5.2}$$

cf. [2].

De même

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int f dv^{(2j)} &\equiv \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int v^{(j)}(ds) v^{(j)}(dt) f(st) \\ &= \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int v^{(j-1)}(ds) v(ds') v(dt') v^{(j-1)}(dt) f(ss't't) \\ &= \int \bar{P}f(s't') v(ds') v(dt') = L_1(f) \end{aligned} \tag{5.3}$$

est une fonctionnelle linéaire positive bornée sur l'espace des fonctions continues, d'où il existe une probabilité régulière μ_1 telle que

$$L_1(f) = \int f d\mu_1.$$

Par définition, μ_1 n'est autre que $\lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v^{(2j)}$.

Soit η_e la mesure de (2.10) de support $X \times G' \times Y$ (cf. le lemme 2.14). Le support de μ_1 est un sous-ensemble de K (lemme 2.11). μ_1 est idempotente car $\mu_1 * v^{(2j)} = \mu_1 = \mu_1 * \mu_1$, d'où $C(\mu_1) = X' \times H' \times Y'$ où H' est un groupe compact et X' et Y' sont des compacts (cf. le numéro 2.12). η_e et μ_1 commutent (car $v^{(2)}$ et η_e le font). $C(\eta_e)C(\mu_1) = C(\mu_1)C(\eta_e)$ ce qui implique que $X' = X$ et $Y' = Y$.

Nous reviendrons plus tard à l'identification de μ_1. Cela se fera à l'aide des résultats sur les mesures μ_x.

5.2. — D'abord il est clair que $C(\mu_x) \subseteq K$, car si $x \in K$ alors $sxt \in K$. Si $x \notin K$ et U est un voisinage de K il existe des voisinages V_1, V_2 de K tels que $V_1 x V_2 \subseteq U$. Par le lemme 2.11 $v^{(n)}V_1^c$, $v^{(n)}V_2^c < \varepsilon$ dès que n est suffisamment grand, c'est-à-dire

$$P^n 1_{U^c}(x) < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqslant N \text{ assez grand}$$

et

$$\bar{P} 1_{U^c}(x) = 0.$$

LEMME 5.3. — Soit $H = \overline{\bigcup_n g^{2n} G'}$ où g et G' sont définis au lemme 2.14. Alors

$$C(\mu_x) = \begin{cases} X \times H \times Y & \text{si} \quad x \in X \times H \times Y \\ X \times gH \times Y & \text{si} \quad x \in X \times gH \times Y \end{cases}$$

Remarque. $G = \overline{\bigcup_n g^n G'} \Rightarrow G = H \cup gH.$

Démonstration du lemme 5.3. — Nous restreindrons l'étude au cas où le support de la fonction de transition est K et non S tout entier. Pour justifier une telle restriction considérons la différence

$$\left| \int f(sxt) v^{(m+N)}(ds) v^{(m+N)}(dt) - \int f(sxt) \eta^{(m)}(ds) \eta^{(m)}(dt) \right| \tag{5.4}$$

où $f \in \mathscr{C}$ et $\eta = v * \eta_e$. Si nous pouvons montrer qu'il existe un $N = N(\varepsilon)$ tel que l'expression (5.4) est $< \varepsilon$ pour tout entier m, il en suit que nous avons montré

$$\begin{aligned} \int f d\mu_x &\equiv \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int v^{(j)}(ds) v^{(j)}(dt) f(sxt) \\ &= \lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int \eta^{(j)}(ds) \eta^{(j)}(dt) f(sxt), \end{aligned} \tag{5.5}$$

c'est-à-dire que, pour démontrer le lemme, l'on peut considérer une marche à fonction de transition $(\eta \times \eta)\{(s, t) \mid sxt \in A\}$ aussi bien que la marche bilatère de 1.2 (cf. la démonstration du théorème 4.1).

$\eta_e \in K(v)$, $f \in \mathscr{C}$ et S compact implique qu'il existe un N tel que

$$\int f(sxt) \mid v^{(N)}(ds) - \eta_e(ds) \mid < \varepsilon/2 \qquad \text{pour tout } x, t \in S$$

et

$$\int f(sxt) \mid v^{(N)}(dt) - \eta_e(dt) \mid < \varepsilon/2 \qquad \text{pour tout } x, s \in S.$$

Alors

$$\int f(ss'xt't) \mid \nu^{(N)}(ds)\nu^{(m)}(ds')\nu^{(m)}(dt')\nu^{(N)}(dt)$$
$$- \eta_e(ds)\nu^{(m)}(ds')\nu^{(m)}(dt')\eta_e(dt) \mid$$
$$\leqq \int f(ss'xt't) \{ \mid \nu^{(N)}(ds) - \eta_e(ds) \mid \nu^{(m)}(ds')\nu^{(m)}(dt')\nu^{(N)}(dt)$$
$$+ \mid \eta_e(dt) - \nu^{(N)}(dt) \mid \eta_e(dt)\nu^{(m)}(ds')\nu^{(m)}(dt') \} < \varepsilon,$$

le résultat cherché.

Nous écrirons $C(\eta^{(n)}) = C^n = X \times g^n G' \times Y$; $H = \overline{\bigcup_n g^{2n} G'}$.

Nous constatons d'abord que $F' = \overline{\{ g^n \}}$ est un groupe ($g \in G$). F' est un demi-groupe compact commutatif $\subseteq G$ dont l'idéal minimal D est un groupe d'élément neutre e (il n'y a qu'un idempotent dans G). $F'D = D$ et $F'e = F'$ d'où $D = F'$.

De même $F = \overline{\{ g^{2n} \}}$ est un groupe. En fait, F est isomorphe au groupe facteur H/G'. Considérer l'application (homomorphisme) canonique ψ : $H \to H/G'$. On a $x \in hG' \Leftrightarrow \psi(x) = h$ ($h \in F$) et $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ car $x \in hG'$, $y \in kG' \Rightarrow xy \in hkG'$ ($h, k \in F$), parce que G' est un sous-groupe distingué de G.

Soient $s, t \in C^n$, $x \in H$. Exprimés à l'aide de la représentation de Rees-Suschkewitsch s, x et t s'écrivent

$$s = (a_1, g^n g_1, b_1), \quad x = (a_2, hg_2, b_2), \quad y = (a_3, g^n g_3, b_3)$$

où $a_i \in X$, $b_i \in Y$, $g_i \in G'$ ($i = 1, 2, 3$) et $h \in F$.

$$sxt = (a_1, g^n g_1 \phi(b_1, a_2) h g_2 \phi(b_2, a_3) g^n g_3, b_3),$$

d'où l'on déduit immédiatement que

$$C^n x C^n = X \times g^{2n} h G' \times Y \tag{5.6}$$

car C^n est tout $X \times g^n G' \times Y$ et $\phi(Y, X) \subseteq G'$.

Donc, quel que soit $x \in X \times H \times Y$ l'on a

$$\overline{\bigcup_n C^n x C^n} = X \times H \times Y \tag{5.7}$$

car $\overline{\bigcup_n g^{2n} h G'} = \overline{\bigcup_n g^{2n} h G'} = F h G' = H$.

(5.7) implique $C(\mu_x) \subseteq X \times H \times Y$.

Nous nous fixons maintenant un $y \in X \times H \times Y$ et un voisinage O_y de y. $\forall x \in X \times H \times Y$ il existe un entier n, qui dépend de x et O_y, tel que

$$C^n x C^n \cap O_y \neq \emptyset.$$

Par conséquent il est possible de trouver un voisinage O_x de x et des ouverts O_1 et $O_3 \subseteq C^n$ avec

$$O_1 O_x O_3 \subseteq O_y.$$

Les ouverts $\{ O_x \}$ recouvrent l'espace compact $X \times H \times Y$. De ce fait on peut en extraire un recouvrement $\{ O_{2i} \}$ $(i = 1, \ldots, m)$ fini tel que

$$O_{1i} O_{2i} O_{3i} \subseteq O_y \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

où les $O_{1i} \times O_{3i}$ sont des ouverts de $\bigcup_{n=1}^{n(m)} C^n \times C^n$.

Soit $O_{1i}, O_{3i} \subseteq C^{n_i}$ et $\eta^{(n_i)} O_{1i} \eta^{(n_i)} O_{3i} = p_i (> 0)$.

Quel que soit l'élément x de $X \times H \times Y$ il existe donc un $n_x \leqq n(m)$ avec

$$P^n (x, O_y) \geqq p = \min_{1 \leqq i \leqq m} \eta^{(n_i)} O_{1i} \eta^{(n_i)} O_{3i} = \min_{1 \leqq i \leqq m} p_i > 0.$$

$$\frac{1}{n(m)} \sum_{k=1}^{n(m)} P^k(x, O_y) \geqq p/n(m)$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, O_y) \geqq \frac{p}{n} \left(\frac{n}{n(m)} - 1 \right) = \frac{p}{n(m)} \left(1 - \frac{n(m)}{n} \right) \geqq \frac{p}{2n(m)} > 0$$

dès que n est assez grand $(\geqq 2n(m))$.

$$(5.8) \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, O_y) \geqq a > 0, \qquad n \text{ suffisamment grand,}$$

d'où $\mu_x O_y > 0$. (Approcher O_y par $f \in \mathscr{C}$ telle que $1_{O'_y} \leqq f \leqq 1_{O_y}$ où O'_y est un autre voisinage de y. (5.8) donne alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k f(x) \to \int f d\mu_x \leqq \mu_x O_y$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k f(x) \geqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k 1_{O'_y}(x) \geqq a' > 0 \qquad (n \text{ grand}))$$

Nous avons démontré que $C(\mu_x) = X \times H \times Y$ si $x \in X \times H \times Y$. Le cas

$$x \in X \times gH \times Y = X \times \overline{\bigcup_n g^{2n+1}G'} \times Y \Rightarrow C(\mu_x) = X \times gH \times Y$$

se démontre de façon analogue. ■

LEMME 5.4. $C(\mu_1) = X \times H \times Y$.

Démonstration. — (5.5) et la définition (5.3) de $L_1(f) = \int f d\mu_1$ impliquent que, pour $f \in \mathscr{C}$,

$$\int f d\mu_1 = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int \nu^{(k)}(ds)\nu^{(k)}(dt) f(st) = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int \eta^{(k)}(ds)\eta^{(k)}(dt) f(st).$$

$C(\eta^{(2j)}) = C^{2j}$ étant $X \times g^{2j}G' \times Y$ l'on obtient

$$C(\mu_1) \subseteq X \times H \times Y.$$

Soient $x, y \in X \times H \times Y$ et O_y un voisinage de y. On démontre facilement (cf. (5.3)) que $\nu * \mu_1 * \nu = \mu_1$. Donc

$$\mu_1 O_y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int \mu_1(dx)\eta^{(k)}(ds)\eta^{(k)}(dt) 1_{O_y}(sxt) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int \mu_1(dx) P^k(x, O_y) \geqslant \rho > 0$$

dès que n est suffisamment grand (d'après la démonstration précédente). ■

LEMME 5.5. $\mu_1 = \alpha \times \chi_H \times \beta$ où χ_H est la mesure de Haar normée sur H.

Démonstration. μ_1 est idempotente et $\mu_1(A \times H \times Y) = \eta(A \times H \times Y) = \alpha A$, $\mu_1(X \times H \times B) = \eta(X \times H \times B) = \beta B$, d'où le résultat (cf. lemme 2.13). ■

LEMME 5.6. $\bar{P}f(x) = \int f d\mu_x$ est constant sur $X \times H \times Y$ et $X \times gH \times Y$, respectivement.

Démonstration (cf. [9], p. 138). — Soient $f \in \mathscr{C}$, $a = \max_x \bar{P}f(x)$, $b = \min_x \bar{P}f(x)$, $x \in X \times H \times Y$, $a > b$. Le maximum (minimum) est atteint car $\bar{P}f$ est une fonction continue (lemme 2.9) sur le compact $X \times H \times Y$. Soit $\bar{P}f(k) = a$ et $O = \{ t \mid \bar{P}f(t) < (a+b)/2 \}$.

Alors $\mu_k O > 0$ et

$$\bar{P}f(k) = \bar{P}^2 f(k)$$
$$= \int_O \mu_k(ds)\bar{P}f(s) + \int_{O^c} \mu_k(ds)\bar{P}f(s) < (a+b)\mu O/2 + a(1-\mu O) < a.$$

Le cas $x \in X \times gH \times Y$ se démontre de manière analogue. ■

LEMME 5.7.

$$\mu_x = \begin{cases} \mu_1 & \text{si} \quad x \in X \times H \times Y \\ \nu * \mu_1 = \eta * \mu_1 & \text{si} \quad x \in X \times gH \times Y \end{cases}$$

Démonstration. $\int Pfd\mu_1 = \int fd(\mu_1 * \nu^{(2)}) = \int fd\mu_1$ d'où, si $t \in X \times H \times Y$,

$$\int \bar{P}fd\mu_1 = \int fd\mu_1$$

et

$$\int fd\mu_t = \bar{P}f(t) = \int \bar{P}fd\mu_1.$$

Si $t \in X \times gH \times Y$ l'on obtient

$$\int Pfd(\eta * \mu_1) = \int \eta(dt')\mu_1(dt)\eta(ds)\eta(du)f(st'tu) = \int fd(\eta * \mu_1).$$

Donc,

$$\int \bar{P}fd(\eta * \mu_1) = \int fd(\eta * \mu_1) = \bar{P}f(t) = \int fd\mu_t$$

et encore $\mu_t = \eta * \mu_1$. L'on a aussi $\eta * \mu_1 = \nu * \eta_e * \mu_1 = \nu * \mu_1$. ■

5.8. — Examinons les différents rapports possibles entre G, H, G′ et g :

(1) G = H (cas « impair » : g^2G' engendre G)

(*i*) $H = G' : \nu^{(n)} \to \mu,\ \nu^{(2n)} \to \mu$
(*ii*) $H \neq G' : \nu^{(n)} \not\to\ ,\ \nu^{(2n)} \not\to$

(2) G ≠ H (cas « pair » : g^2G' n'engendre pas G)

(*i*) $H = G' : \nu^{(n)} \not\to,\ \nu^{(2n)} \to \mu_1 = \eta_e$
(*ii*) $H \neq G' : \nu^{(n)} \not\to,\ \nu^{(2n)} \not\to$

Cette classification nous sera utile dans l'étude des marches bilatères ergodiques et mélangeantes. Pour les définitions voir les chapitres 2 et 3. Les notions d'ergodique, de mélangeant, d'ensembles invariants se définissent de la même manière que dans le cas unilatère. Comme démontré

ci-dessus (démonstration du lemme 5.3) il suffit de considérer, dans le cas stationnaire, les marches sur K.

LEMME 5.9. — Les ensembles invariants par P sont, à des ensembles μ-négligeables près,

$$\emptyset, \quad X \times H \times Y, \quad X \times gH \times Y, \quad K.$$

Démonstration. $Pf(x) \overset{\text{p.p.}}{=} f(x) \Rightarrow P^n f(x) \overset{\text{p.p.}}{=} f(x)$ d'où

$$\bar{P}f(x) \overset{\text{p.p.}}{=} f(x) \overset{\text{p.p.}}{=} \int f d\mu_x,$$

si f est une fonction continue invariante. f est donc μ-presque partout constante sur $X \times H \times Y$ et $X \times gH \times Y$. A l'aide de l'approximation habituelle l'on en tire que $X \times H \times Y$ et $X \times gH \times Y$ sont les seuls invariants autres que $\emptyset$ et K.

THÉORÈME 5.1. — La marche bilatère stationnaire sur un demi-groupe compact S (engendré par ν) est ergodique si et seulement si $H = G$ (cas (1) (*i*) (*ii*)). Elle est mélangeante si et seulement si $G' = G$ (cas (1) (*i*)).

N. B. — La marche bilatère stationnaire de mesure invariante μ_1 — $\int P(x, A)\mu_1(dx) = \mu_1 A$ — est toujours ergodique. Elle est mélangeante si et seulement si $H = G'$ (cas (1) (*i*) et (2) (*i*)).

Démonstration du théorème 5.1. — La marche bilatère stationnaire est ergodique si et seulement si la tribu des ensembles invariants $\mathscr{I}$ est triviale (3.4) donc si et seulement si $H = G$.

Il est clair que la marche n'est pas mélangeante si $G' \neq G$. En effet, soient $a \in G'$, O_a un voisinage de a et O un ouvert dont la fermeture ne coupe pas $X \times O(g)O_a G' \times Y \neq K$ ($O(g)$ est un voisinage de g). Quel que soit N il existe un $n \geqq N$ avec $g^{2n} \in O(g)$ et $m \geqq N$ avec

$$X \times g^{2m}G' \times Y \cap O \neq \emptyset \qquad (H = G \text{ supposé.})$$

Donc

$$\int_{X \times O_a \times Y} \mu(dx)P^n(x, O) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{X \times O_a \times Y} \mu(dx)P^m(x, O) \geqq a > 0.$$

Par une approximation de 1_O (cf. la démonstration du lemme 5.3) l'on obtient que

$$\int_{X \times O_a \times Y} \mu(dx)P^n(x, O) \not\to.$$

Inversement, supposons que $G' = G$. Alors

$$\int \mu(dx) f(x) P^n g(x) \to \int \mu(dx) f(x) \bar{P} g(x) = \int \mu(dx) f(x) \int \mu(dx) g(x)$$

car $P^n g \to \bar{P} g$, voir [3].

5.10. — Dans cette section on supposera S *séparable* (cf. numéro 4.2). Nous nous donnons l'espace probabilisé $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ et des variables aléatoires à valeurs dans S. Soit $\{ U_i \mid i = 1, \ldots, N \}$ un recouvrement de K avec $\mu U_i > 0$. Les variables aléatoires que nous avons définies sont : Y_0^i de loi $\mu \mid_{U_i} / \mu U_i$, W_0 de loi ν_0, Y_0 de loi μ, S_j, T_j de loi ν $(j = 1, 2, \ldots)$. La marche stationnaire Y s'écrit

$$Y_j = S_j Y_{j-1} T_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

La marche asymptotiquement stationnaire s'écrit

$$W_j = S_j W_{j-1} T_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Soit $f \in \mathscr{C}$. $\{ U_i \}$ sera alors choisi tel que

$$\mu U_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

(5.9) et

$$\sup_{x, x' \in U_i} | f(sxt) - f(sx't) | < r \qquad \text{quels que soients } s, t \in S$$

(cf. lemme 2.3).

Comme dans le cas unilatère on démontre que le temps d'arrêt

$$T_0(\omega') = \begin{cases} \inf \left\{ n \geqq 0 \mid W_n(\omega') \in O_r \equiv \bigcup_{i=1}^{N} U_i \right\} \\ \infty \qquad \text{si} \quad W_n(\omega') \notin O_r \qquad \text{pour tout } n \end{cases}$$

est *d'espérance finie* (lemme 4.3). La démonstration en est exactement la même que dans le cas unilatère si l'on choisit U et V, $U \supseteq V$, ouverts contenant K tels que $VSV \subseteq U$, $VS \subseteq U$, $SV \subseteq U$ ce qui est possible car $SK = KS = KSK = K$ (lemme 2.2).

Soit $j_0(\omega') = \min \{ i \mid W_{T_0(\omega')} \in U_i \}$.

Si $\hat{f}(Y) = Ef$ p. s. alors $\hat{f}(Y^i) = Ef$ p. s. où $Y_j^i = S_j Y_{j-1}^i T_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ (cf. lemme 4.5).

La marche Z r-parallèle à W est donnée par

$$Z_0(\omega') = Y_0^{j_0}(\omega')$$
$$Z_j(\omega') = S_{j+T_0}(\omega') Z_{j-1}(\omega') T_{j+T_0}(\omega').$$

Elle est bien définie dès que $T_0(\omega')$ est fini.

Soit $f \in \mathscr{C}$. Si $\hat{f}(Y) = Ef$ p. s. alors aussi $\hat{f}(Z) = Ef$ p. s., d'où $\hat{f}(W) = Ef$ p. s.

THÉORÈME 5.2. — La marche bilatère satisfait à

$$\hat{f}(W) \equiv \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(W_k) = \int f(s)\mu(ds) \qquad \text{p. s.} \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{C},$$

si et seulement si $H = G$.

Démonstration. — D'après les remarques qui précèdent l'énoncé il nous reste à étudier le cas $H \neq G$. $K = (X \times H \times Y) \cup (X \times gH \times Y)$ (réunion disjointe). Ces deux sous-ensembles de K sont les seuls invariants par P (autres que les triviaux).

Choisir les U_i ($i = 1, \ldots, N$) tels que, (5.9) restant valable, ils séparent les deux ensembles fermés disjoints $X \times H \times Y$ et $X \times gH \times Y$, c.-à-d.

$$U_i \cap X \times hH \times Y \neq \emptyset \Rightarrow U_i \cap X \times h'H \times Y \neq \emptyset \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

où $(h, h') = (e, g)$ ou (g, e).

Alors on aura pour la marche parallèle Z

$$\hat{f}(Z)(\omega') = E\{ f \mid \mathscr{I} \}(\omega') = \int_{I(\omega')} f d\mu \qquad \text{p. s.}$$

où
$$I(\omega') = \begin{cases} X \times H \times Y & \text{si } Y_0^{j_0}(\omega') \in X \times H \times Y \\ X \times gH \times Y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction la différence entre $\hat{f}(W)$ et l'intégrale de f sur I est $< \varepsilon$. ■

En prouvant le théorème 5.2 nous avons donc démontré le

THÉORÈME 5.3. — Quelle que soit la fonction continue f

$$\hat{f}(W)(\omega') = \int_{I(\omega')} f d\mu' \qquad \text{p. s.}$$

où
$$\mu' = \mu_1 \quad \text{si} \quad Y_0^{j_0}(\omega') \in X \times H \times Y$$
et
$$\mu' = V \times \mu_1 \quad \text{sinon}$$

et où
$$I(\omega') = \begin{cases} X \times H \times Y & \text{si } Y_0^{j_0}(\omega') \in X \times H \times Y \\ X \times gH \times Y & \text{sinon.} \end{cases}$$

La valeur de l'intégrale et l'ensemble invariant où la marche bilatère va entrer « à l'infini » se laissent donc déterminer dès l'instant $T_0(\omega')$ (d'espérance finie et donc p. s. fini). Cela n'est le cas pour la marche à droite que s'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux minimaux à droite.

5.11. — Les définitions des états récurrents et transitoires sont analogues à celles de la marche unilatère (définition 4.8).

Nous venons de démontrer que $x \notin K$ est transitoire ($ET_0 < \infty$, voir 5.10, lemmes 4.3 et 4.4).

On démontre comme dans la démonstration du théorème 4.4 que $x \in K$ est récurrent. Soit f une fonction continue approximant 1_V où V est un voisinage de x.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int P_b^k(x, dt)f(t) \to \int \mu_x(dt)f(t) = a > 0$$

car f est strictement positive sur un ouvert de $X \times H \times Y$ (si $x \in X \times H \times Y$) où $X \times gH \times Y$ (si $x \in X \times gH \times Y$). Mais alors $U1_V(x) = \infty$.

THÉORÈME 5.4. — Pour la marche bilatère, $x \in K$ est récurrent et $x \notin K$ transitoire.

Définir le temps de retour (temps d'entrée si $y \notin U$) dans U partant de y par

$$T_U = \begin{cases} \inf\{ n \geqq 1 \mid W_n y W'_n \in U \} \\ \infty \qquad \text{si} \quad W_n y W'_n \notin U \qquad \text{pour tout } n \end{cases}$$

où U est un ouvert de $X \times H \times Y$, $y \in X \times H \times Y$ et $W_n = S_n S_{n-1} \ldots S_1$, $W'_n = T_1 T_2 \ldots T_n$ (voir 5.10).

Soient O_{1i}, O_{2i}, O_{3i} des ouverts tels que

$$O_{1i} \times O_{3i} \subseteq \bigcup_{n=1}^{n(m)} C^n \times C^n, \qquad \bigcup_{i=1}^{m} O_{2i} \supseteq X \times H \times Y$$

et

$$O_{1i} O_{2i} O_{3i} \subseteq U \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

(voir la démonstration du lemme 5.3).

$$P(T_U > n) \leqq \sum_i P\{ y \in O_{2i}, (W_k, W'_k) \notin O_{1i} \times O_{3i}, k = 1, \ldots, n \}$$

Soit n_i, $1 \leqq i \leqq m$, tel que $\eta^{(n_i)} O_{1i} \eta^{(n_i)} O_{3i} = v_i > 0$.

Poser $M = \max_{1 \leqq i \leqq m} n_i$ et procéder exactement comme dans la démonstration du théorème 4.5. Faire un raisonnement analogue pour

$$y \in X \times gH \times Y \supseteq U.$$

Ainsi se démontre le

THÉORÈME 5.5. — Soit $y \in X \times H \times Y$ ($X \times gH \times Y$) et U un ouvert

de $X \times H \times Y$ ($X \times gH \times Y$). Le temps T_U de retour (d'entrée si $y \notin U$) dans U partant de y est d'espérance bornée.

5.12. — En ce qui concerne les fonctions à potentiel fini il est clair que les mêmes remarques qui s'appliquent au cas unilatère sont encore valables. Soit $x \notin K$. Ainsi $U 1_0(x) < \infty$ si (et, souvent, seulement si) $\bar{O} \cap K = \emptyset$. De même, si $f \in \mathscr{C}$ et $f = 0$ sur K, $Uf(x) < \infty$ si f tend assez vite vers 0. Un critère en est analogue à celui du lemme 4.9 :

LEMME 5.13. — Soit Σr_n une série convergente. Soient $x \in S$,

$$O_n = \{ s \in S | \quad |f(s)| < r_n \}$$

et U_n, U'_n tels que

$$U_n S U'_n \subseteq O_n \qquad [U_n x U'_n \subseteq O_n] \qquad (n = 1, \ldots).$$

Si la série

$$\sum_n (\nu^{(n)} \times \nu^{(n)})(U_n \times U'_n)^c$$

converge, alors

$$\| Uf \| < \infty \qquad [\, | Uf(x) | < \infty \,].$$

Démonstration. — Voir le lemme 4.9. ■

5.14. — L'étude des états essentiels de la marche bilatère est maintenant assez facile vu tous les résultats qui précèdent. Les notions sont définies au numéro 4.10 (Ici, $P = P_b$).

LEMME 5.15

$$s \to s' \Leftrightarrow s' \in \overline{\bigcup_n C^n s C^n} \tag{5.4}$$

Démonstration $\Rightarrow$ évident.

$\Leftarrow$ Soit V un voisinage de s'.

$$V \cap \bigcup_n C^n s C^n \neq \emptyset$$

implique qu'il existe un n avec $V \cap C^n s C^n \neq \emptyset \Rightarrow P^n(s, V) > 0$. ■

On montre sans difficulté, cf. 4.10, que $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence. Les éléments d'une classe d'équivalence sont soit tous essentiels soit tous inessentiels.

Prendre un $x \in X \times H \times Y$. Alors

$$x \to y \Leftrightarrow y \in X \times H \times Y = \overline{\bigcup_n C^n x C^n}$$

(la démonstration du lemme 5.3) implique $y \to x$, c'est-à-dire x est essentiel.

THÉORÈME 5.6. — s essentiel $\Leftrightarrow$ $s \in K$. Les classes essentielles sont $X \times H \times Y$ et $X \times gH \times Y$.

Démonstration $\Rightarrow$. Voir les remarques qui précèdent l'énoncé. $\Leftarrow$. Soit $s \notin K$. Soient les ouverts $U, V, O \supseteq K$ tels que $USU \subseteq V$, $SVS \subseteq O$, $s \notin \bar{O}$. Alors $s \to v \in V$ mais $v \not\to s$. ■

6. LA MARCHE MIXTE

6.1. — L'opérateur de transition $P = P_m$ de la marche mixte se définit par

$$Pf(x) = a \int v(ds) f(sx) + (1 - a) \int v(ds) f(xs), \qquad \text{cf. [2].}$$

P est un opérateur linéaire continu sur l'espace des fonctions continues sur S. P est équicontinu (lemme 2.7).

Il s'ensuit que

$$\lim P_n f(x) = \bar{P} f(x) = \int \mu_x(ds) f(s)$$

où μ_x est une probabilité régulière à support K. En fait $\mu_x = \mu$, [2].

Si $v^{(n)} \to \mu$ alors $P^n \to \bar{P}$, car

$$\begin{aligned} | P^n f(x) - \bar{P} f(x) | &\leqq \left| \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} \left\{ \int v^{(k)}(ds) v^{(n-k)}(dt) f(sxt) - \bar{P} f(x) \right\} \right| \\ &+ \left| \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} \left[\int v^{(k)}(ds) v^{(n-k)}(dt) f(sxt) - \bar{P} f(x) \right] \right| \\ &\leqq 2 \| f \| \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} \varepsilon \leqq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

dès que n, N, $n - N$ sont assez grands, car

$$\binom{n}{k} (1-a)^n \leqq \text{const. } n^k (1-a)^n \to 0$$

et

$$\int \mu(ds) \mu(dt) f(sxt) = \int \mu(ds) f(s), \qquad [3].$$

Les remarques faites ci-dessus permettent d'employer les techniques des démonstrations des théorèmes 4.1 et 5.1, voir aussi [2], pour prouver le

THÉORÈME 6.1. — Soit S un demi-groupe compact engendré par v. La marche mixte, définie par la mesure initiale μ et la fonction de transition $P_m(x, A)$ $(a > 0)$ est ergodique. Elle est mélangeante si et seulement si $G' = G$.

6.2. — Supposer que S soit *séparable* et W la marche mixte asymptotiquement stationnaire (cf. 1.6, (4.16), (5.10)) :

$$W_n = \begin{cases} W_{n-1}S_n & \text{avec probabilité } 1 - a \\ S_nW_{n-1} & \text{avec probabilité } a. \end{cases}$$

Soit T_0 le temps d'entrée dans $O_r = \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ où les U_i sont donnés par (5.9). $ET_0 < \infty$. A l'aide de la marche r-parallèle à W on démontre le

THÉORÈME 6.2. — Soit S séparable et $f \in \mathscr{C}$. La marche mixte W satisfait à

$$\hat{f}(W) \equiv \lim \frac{1}{n} \Sigma f(W_k) = Ef \qquad \text{p. s.}$$

COROLLAIRE 6.2. — Soit $\lim \frac{1}{n} \Sigma P^k f(x) = \int f(x)\mu_x(ds)$. Alors $\mu = \mu_x$ pour tout $x \in S$.

Démonstration. $\mu_x = \mu$ si $x \in K$, [2]. Soit $x \notin K$. On sait que

$$\int f(s)\mu_x(ds) = \bar{P}f(x) = \lim \frac{1}{n} \Sigma P'^k f(x)$$

où

$$P'f(x) = \int \eta(ds)(af(sx) + (1 - a)f(xs)) \qquad (\eta = v * \eta_e),$$

cf. la démonstration du lemme 5.3 et les remarques au numéro 6.1

$$\bar{P}f(x) = P'\bar{P}f(x) = \int \eta(ds)(a\bar{P}f(sx) + (1 - a)\bar{P}f(xs)) = \bar{P}f(K)$$

car xs, $sx \in K$. Donc la fonction $\bar{P}f$ est constante sur S. D'où $\mu_x = \mu$ [2].

THÉORÈME 6.3. — Pour la marche mixte, $x \in K$ est récurrent et $x \notin K$ transitoire.

Démonstration. — Les définitions sont bien entendu celles données par (4.8). La démonstration suit celles des théorèmes 4.4 et 5.4. ■

THÉORÈME 6.4. — Soit $x \in K$ et $U \subseteq K$ ouvert. Pour la marche mixte, le temps d'entrée (de retour) dans U partant de x est d'espérance bornée.

Démonstration. — Voir celles des théorèmes 4.5 et 5.5. ■

Un critère pour que f ait un potentiel fini par rapport à U_b est donné par le lemme 5.13. Pour la marche mixte il faut cependant changer la condition quelque peu.

LEMME 6.3. — Soient Σr_n, U_n et O_n les mêmes que dans le lemme 5.13. Si la série

$$\sum_n \max_{i \leqq n} (\nu^{(i)} \times \nu^{(n-i)})(U_n \times U'_n)^c$$

converge, alors

$$\| U_m f \| \leqq M < \infty \qquad [\, | U_m f(x) | < \infty].$$

6.4. LEMME 6.5. $s \to s' \Leftrightarrow s' \in sS \cup Ss$.

Démonstration. — (Les notions sont définies au numéro 4.10). La démonstration est analogue à celle du lemme 4.12. ■

THÉORÈME 6.5. — s essentiel $\Leftrightarrow s \in K$. La seule classe essentielle est K.

Démonstration. — Cf. celles des théorèmes 4.6 et 5.6. ■

RÉFÉRENCES

[1] U. GRENANDER, *Probabilities on Algebraic Structures*, Stockholm, Almqvist et Wiksell, 1963.

[2] G. HÖGNÄS, An ergodic random walk on a compact semi-group. *Acta Acad. Aboensis*, Ser. B, vol. **33**, 9, 1973.

[3] G. HÖGNÄS, A note on random walks on a compact semi-group. *Acta Acad. Aboensis*, Ser. B, vol. **33**, 10, 1973.

[4] J. LARISSE, Marches au hasard sur les demi-groupes discrets I, II et III. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sér., Sect. B, t. **8**, 1972, p. 107-125, 127-173, 229-240.

[5] P. MARTIN-LÖF, Probability theory on discrete semi-groups. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **4**, 1965, p. 78-101.

[6] K. NUMAKURA, On bicompact semi-groups. *Math. J. Okayama University*, t. **1**, 1952, p. 99-108.

[7] M. ROSENBLATT, Limits of convolution sequences of measures on a compact topological semi-group. *J. Math. Mech.*, t. **9**, 1960, p. 293-306.

[8] M. ROSENBLATT, Equicontinuous Markov operators. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, t. **9**, 1964, p. 205-222.

[9] M. ROSENBLATT, *Markov Processes. Structure and Asymptotic Behavior.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1971.

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1973).