

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

X. GUYON

E. LESQUOY

F. SCHAEFFER

Recherche de plans d'expérience adaptés à des hypothèses a priori dans certains cas particuliers

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, n° 4 (1973), p. 369-377

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_4_369_0

© Gauthier-Villars, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Recherche de plans d'expérience adaptés à des hypothèses *a priori* dans certains cas particuliers

par

X. GUYON, E. LESQUOY, F. SCHAEFFER

SUMMARY. — If \mathbb{R}^T is the space of all possible values of the parameter φ of an analysis of variance problem, we shall consider a « model » as a linear subspace V of \mathbb{R}^T . This paper gives, in certain particular cases, the answer to the following problem:

What experiences have to be fulfilled so that the functions $A\varphi$ of the mean $\varphi(t)$ of Y_t is estimable, when A belongs to a certain class.

INTRODUCTION

Dans son article [1], D. Vaguely propose une formulation globale des plans d'expérience en présentant le problème en ces termes : étant donnée une hypothèse *a priori*, quelles sont les expériences à réaliser pour répondre à certains problèmes statistiques : existence d'estimateurs sans biais de certains paramètres, précision de ces estimateurs.

Nous donnons ici quelques exemples de recherche de plans d'expérience adaptés à l'estimation de certains paramètres, dans un modèle fixé.

Si le choix du modèle est fixé par la donnée d'un sous-espace V de \mathbb{R}^T (T est l'ensemble des traitements), espace des valeurs possibles de la fonction moyenne φ :

$$\varphi(t) = EY_t, \quad t \in T$$

on va considérer les deux problèmes suivants :

- 1) Etant donné le modèle V , quels sont les plans adaptés et minimaux

adaptés qui permettent d'estimer φ (c'est-à-dire d'estimer $\varphi(t)$ pour chaque t).

2) Etant donné le modèle V , quels sont les plans adaptés et adaptés minimaux qui permettent d'estimer φ_1 où φ_1 est la composante de φ sur V_1 relativement à la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$.

NOTATIONS. OPÉRATEURS ESTIMABLES

Un plan d'expérience est la donnée du couple (U, s) où

$\left\{ \begin{array}{l} U = \{ 1, 2, \dots, n \} \text{ est l'ensemble des unités expérimentales,} \\ s : U \rightarrow T \text{ associe à la } i^{\text{ème}} \text{ unité le traitement } s(i) \text{ qui lui est appliqué.} \end{array} \right.$

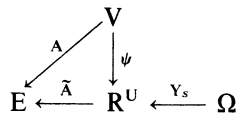
Un plan est également caractérisé par l'application linéaire ψ :

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^U \quad \text{définie par} \quad \psi(\varphi) = \varphi \circ s$$

OPÉRATEUR ESTIMABLE

Soit A un opérateur de V dans E , espace vectoriel réel et Y_s le vecteur des observations

$$Y_s = (Y_{s(1)}, \dots, Y_{s(m)}).$$



On dit que (U, s) rend estimable l'opérateur A si il existe un estimateur linéaire sans biais de $A\varphi$ c'est-à-dire s'il existe \tilde{A} :

$$\tilde{A} : \mathbb{R}^U \rightarrow E \quad E(\tilde{A}Y_s) = A\varphi$$

pour tout φ de V , condition équivalente à

$$(1) \quad \tilde{A} \circ \psi = A \quad \text{soit} \quad \ker \psi \subset \ker A.$$

Exemples. — On va réexaminer les deux problèmes d'estimations formulés dans l'introduction, et les reformuler en termes d'opérateurs estimables.

1. Etant donné un modèle V , trouver un plan adapté à l'estimation de la moyenne φ revient à trouver un plan adapté à l'identité I de V . Il sera adapté à l'estimation de tout opérateur de V dans V . Une condition nécessaire et suffisante est l'injectivité de ψ .

2. Considérons la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ du modèle. Le plan est adapté à l'estimation de la composante de la moyenne sur V_1 pour

cette décomposition si l'opérateur P^{V_1} de projection sur V_1 parallèlement à V_2 est estimable.

De plus, tout opérateur A tel que :

$$\ker A \supseteq V_2$$

est estimable pour ce plan.

En effet, si : $\ker A \supseteq V_2, V_2 = \ker P^{V_1}$, on a

$$A = G \circ P^{V_1}$$

et $G \circ \overline{P^{V_1}}(Y_S)$ estime sans biais $A\varphi$ si $\overline{P^{V_1}}Y^S$ est un estimateur sans biais de $P^{V_1}\varphi$.

Remarque. — Il apparaît plus clairement, en utilisant la notion d'opérateur estimable, qu'un plan adapté à l'estimation de $P^{V_1}\varphi$ est adapté à l'estimation de $P^{V_1}\varphi$ pour tout supplémentaire V'_1 de V_2 dans V . Un tel plan est donc caractérisé par V_2 , et non par V_1 .

On supposera que l'ensemble des traitements T s'écrit :

$$T = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \quad (n \text{ facteurs})$$

ou A_i est l'ensemble des niveaux du $i^{\text{ème}}$ facteur. Un traitement serait donc

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_k),$$

le facteur i est au niveau t_i . On note $K = \{1, 2, \dots, k\}$. R^T est muni du produit scalaire canonique.

Dans la suite, on considérera toujours que la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ est orthogonale, condition qui, d'après la remarque précédente ne limite en rien l'étendue du problème.

* E^I est l'ensemble des fonctions de R^T qui ne dépendent que des niveaux des facteurs $A_i, i \in I$ ou I est une partie de K c'est-à-dire $\varphi \in E^I$ est réalisé

si $\varphi(t_i, t_{i'}) = \varphi(t_i, t'_{i'})$ pour tout t_i dans $A_i \left(A_i = \prod_{i \in I} A_i \right), t_{i'}$ et $t'_{i'}$ dans $A_{i'}$.

** Ω_\emptyset est l'ensemble des fonctions constantes.

*** Ω_I est le sous-espace de E_I qui est le supplémentaire orthogonal de tous les $\Omega_J, J \subsetneq I$

$$\left(E_I = \Omega_I \overset{\perp}{\bigoplus} \left(\bigoplus_{J \subsetneq I} \Omega_J \right) \right).$$

On sait que [2] :

$$R^T = \overset{\perp}{\bigoplus}_{I \in \mathcal{P}\{1, 2, \dots, k\}} \Omega_I$$

et que φ appartient à Ω_1 est équivalent à :

$$\text{pour tout } j \text{ de } I, \quad \sum_{t_j \in A_j} \varphi(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \dots, t_n) = 0,$$

ceci, pour tout $t_1, t_2, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n$, dans $A_1, A_2, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n$.

I. — LE MODÈLE EST COMPLET

On a donc : $V = \mathbb{R}^T$, et une décomposition : $V = V_1 \bigoplus V_1^\perp$.

On démontre alors :

PROPOSITION. — *Dès que V_1 contient un espace Ω_1 , un plan adapté à V_1 doit être complet, c'est-à-dire*

$$S(U) = T$$

La condition (1) pour l'opérateur P^{V_1} , projection orthogonale sur V_1 est équivalente à (2)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ nulle sur } S(U) \text{ et } \varphi \text{ dans } V \text{ entraîne } \varphi \in V_2 \text{ soit :} \\ (S(U))^* \cap V \subset V_2 \end{array} \right.$$

où $(S(U))^* = \{ \varphi \in \mathbb{R}^T ; \varphi|_{S(U)} = 0 \}$.

Ici, la condition se réduit à :

$$((S(U))^c)^* \supset V_1 \quad (\text{on a } V_1 \supset \Omega_1).$$

a) Cas $I = \emptyset$:

La fonction 1 ne s'annule pas ; $(S(U))^c$ est donc vide.

b) Cas $\text{Card } I = 1$.

Alors $I = \{j\}$ et $A_1 = A_j = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.

Le système des e_i , où i varie de 1 à $p-1$, définis par :

$$e_i(t_j, t_{j^c}) = \delta_{a_i, t_j} - \frac{1}{p}, \quad t_j \in A_j$$

est une base de Ω_j .

Supposons $(S(U))^c$ non vide ; soit (t_{j^0}, t_{j^c}) un élément de $(S(U))^c$. Comme Ω_j est contenu dans $[(S(U))^c]^*$, les éléments de la base sont dans $((S(U))^c)^*$, en particulier si $a_i \neq t_{j^0}$:

$$e_i(t_{j^0}, t_{j^c}) = -\frac{1}{p}$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(S(U))^c = \emptyset$. Le plan est complet.

c) Cas, Card I > 1.

Supposons que : $S(U)^c \neq \emptyset$.

Soit (t_1, t_{1c}) un point de $S(U)^c$. Construisons une fonction f de Ω_1 , non nulle sur (t_1, t_{1c}) , c'est-à-dire

$$f \in \Omega_1 \quad \text{et} \quad f \notin [S(U)^c]^*.$$

Si Card I = r, $t_1 = (t_1, t_2, \dots, t_r)$. Choisissons un point t'_1

$$t'_1 = (t'_1, \dots, t'_r) \quad \text{avec} \quad t'_1 \neq t_1, \dots, t'_r \neq t_r.$$

Sur les sommets de l'hypercube construit à partir de t_1 et t'_1 , f prendra les valeurs + 1 et - 1 et sera nulle partout ailleurs, de façon à ce que f soit dans Ω_1 . Pour cela, si t_1^* est un tel sommet :

$$t_1^* = (t_1^*, \dots, t_r^*) \quad t_i^* = t_i \quad \text{ou} \quad t'_i$$

$$s = \sum_{i=1}^r 1_{\{t_i = t'_i\}}$$

on pose :

$$\begin{cases} f(t_1^*, t_c^*) = (-1)^s \\ f = 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors f est dans Ω_1 et $f(t_1, t_{1c})$ est égale à 1.

Remarque. — Le cas où V est égal à E_J s'en déduit simplement car supposer φ dans E_J revient à dire que les facteurs de J^c n'ont pas d'action. Le plan d'expérience doit être complet pour les facteurs de J, ceux de J^c étant quelconques.

II. — LE MODÈLE EST ADDITIF : $V = E_I + E_J$ ET $I \cap J = \emptyset$

Puisque I et J sont disjoints, il suffit de considérer le cas

$$\text{Card I} = 1, \quad \text{Card J} = 1$$

en regroupant les différents facteurs de I, puis les différents facteurs de J. On pose donc $I = \{i\}$, $J = \{j\}$.

1. Estimation des effets du premier facteur

Dans le cas où Card I = Card J = 1, il s'agit d'estimer la composante de la moyenne sur Ω_1 .

Dans le cas où $\text{Card } I > 1$, si on note E'_1 le supplémentaire orthogonal de Ω_Φ dans E_1 , il s'agit d'estimer la composante de la moyenne sur E'_1 .

On a alors la proposition suivante

PROPOSITION. — $S(U)$ est un plan adapté à l'estimation de Ω_1 ($\text{Card } I = 1$), ou de E'_1 ($\text{Card } I > 1$) dans le modèle $V = E_1 + E_J$ ($I \cap J = \emptyset$) si et seulement si la projection sur $A_1 \times A_J$ de $S(U)$ est un escalier dont la projection sur A_1 est A_1 tout entier.

DÉFINITION. — On appelle escalier une suite de points (u_n, v_n) de $A_1 \times A_J$ telle que pour tout n on ait soit $u_n = u_{n+1}$, soit $v_n = v_{n+1}$.

Il suffit de se limiter au cas $\text{Card } I = \text{Card } J = 1$.

Montrons que la condition est suffisante. Supposons, donc que E est un escalier convenable où $E = P_{A_1 \times A_1} S(U)$.

Il existe un entier n tel que $(u_n, v_n), (u_{n+1}, v_{n+1})$ sont dans E et $v_n = v_{n+1}$; alors si on écrit

$$\begin{aligned} \varphi &= \mu + \varphi_1 + \varphi_J & \mu &\in \Omega_\Phi \\ & & \varphi_1 &\in \Omega_1 \quad \text{et} \quad \varphi_J \in \Omega_J \\ & \begin{cases} \mu + \varphi_1(u_n) + \varphi_J(v_n) = 0 \\ \mu + \varphi_1(u_{n+1}) + \varphi_J(v_n) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et alors le système des équations : $\varphi(t) = 0$ pour $t \in E$ entraîne que φ_1 est constante sur A_1 donc identiquement nulle.

Réciproquement, considérons les deux cas :

a) $P_{A_1} S(U) \neq A_1$, alors la fonction $\varphi = \mu + \varphi_1$ définie par

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = -\frac{1}{n_2} & (\text{si } t \notin P_{A_1} S(U)) \\ \varphi_1(t) = \frac{1}{n_1} & (\text{si } t \in P_{A_1} S(U)) \\ \mu = -\frac{1}{n_1}, \quad n_1 = \text{Card } P_{A_1} S(U), \quad n_2 = \text{Card } (A_1 \setminus P_{A_1} S(U)) \end{cases}$$

est nulle sur $S(U)$ sans être nulle partout.

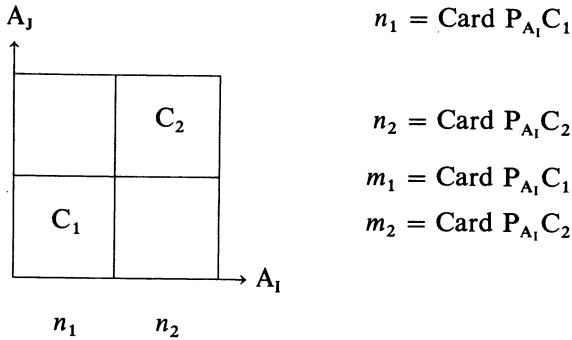
b) Si $P_{A_1} S(U) = A_1$ mais $E = P_{A_1 \times A_1} S(U)$ n'est pas un escalier.

Définissons la relation d'équivalence dans E

$x \mathcal{R} y$: il existe un escalier de E reliant x à y .

Alors E est la réunion de deux parties disjointes C_1 et C_2 telles que C_1 soit une classe d'équivalence pour la relation \mathcal{R} et un point de C_2 ne pouvant être relié à aucun point de C_1 .

Puisque $P_{A_1}S(U) = A_1$, il existe $(u, v) \in C_2$



La fonction φ ainsi construite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_I(u) = \frac{\alpha}{n_1} \quad \text{si } u \in P_{A_1}C_1 \\ \varphi_I(u) = -\frac{\alpha}{n_2} \quad \text{si } u \notin P_{A_1}C_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_J(v) = \frac{\beta}{m_1} \quad \text{si } v \in P_{A_J}C_1 \\ \varphi_J(v) = -\frac{\beta}{m_2} \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

et $\varphi = \mu + \varphi_I + \varphi_J$ avec μ, α, β solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu + \frac{\alpha}{n_1} + \frac{\beta}{m_1} = 0 \\ \mu - \frac{\alpha}{n_2} - \frac{\beta}{m_2} = 0 \end{array} \right.$$

est nulle sur $S(U)$ et $\varphi_I \neq 0$.

2. Estimation de la moyenne dans le modèle additif

Il découle immédiatement des résultats précédents la proposition suivante, si on veut estimer tout V.

PROPOSITION. — $S(U)$ est un plan adapté pour estimer la moyenne dans le modèle $E_I + E_J$ ($I \cap J = \emptyset$) si et seulement si la projection sur $A_I \times A_J$ de $S(U)$ est un escalier dont les projections sur A_I et A_J sont respectivement A_I et A_J .

III. — GÉNÉRALISATION DU MODÈLE PRÉCÉDENT :

$$V = E_I + E_J \text{ ET } I \cap J \neq \phi$$

1) $V_1 = V$, ou estimation de la moyenne.

On décompose $E_I + E_J$ en somme directe orthogonale

$$\begin{aligned} E_I &= E_{I \cap J} \oplus F_I, & E_J &= E_{I \cap J} \oplus F_J \\ E_{I \cap J} &= \Omega_{\Phi} \oplus E'_{I \cap J} \\ E_I + E_J &= \Omega_{\Phi} \oplus E'_{I \cap J} \oplus F_I \oplus F_J. \end{aligned}$$

La condition (2) s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \mu + \varphi_I + \varphi_{I \cap J} + \varphi_J \\ \varphi/s(u) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = 0$$

μ constante, $\varphi_I \in F_I$, $\varphi_J \in F_J$, $\varphi_{I \cap J} \in E'_{I \cap J}$. On écrira

$$t = (t_1, t_2, t_3), \quad t_1 \in A_{I-I \cap J}, \quad t_2 \in A_{I \cap J}, \quad t_3 \in A_{J-I \cap J}.$$

Si la trace de $s(u)$ dans chaque plan $\{t_2 = t_2^0\}$ est un escalier dont les projections sur $A_{I-I \cap J}$ et $A_{J-I \cap J}$ sont respectivement $A_{I-I \cap J}$ et $A_{J-I \cap J}$ la condition (2) est remplie. En effet une fonction φ_I et F_I est caractérisée par

$$\forall t_2, \quad \sum_{t_1} \varphi_I(t_1, t_2) = 0.$$

Réciproquement, supposons que pour un t_2^0 la trace de $s(u)$ ne soit pas un escalier. Il existe donc un nombre μ , des fonctions φ_1 et φ_3 telles que

$$\begin{aligned} \sum_{t_1} \varphi_1(t_1) &= 0 \\ \sum_{t_2} \varphi_3(t_2) &= 0 \end{aligned}$$

$\mu + \varphi_1 + \varphi_3$ et non nulle et s'annule sur la trace dans $\{t_2 = t_2^0\}$ de $s(u)$. On définit alors la fonction φ sur $A_{I \cup J}$ par

$$\varphi = \frac{\mu}{n_2} + \varphi_2(t_2) + \varphi_1(t_1, t_2) + \varphi_3(t_2, t_3)$$

avec

$$\begin{aligned}
 n_2 &= \text{Card } A_{I \cap J} \\
 \varphi_1(t_1, t_2) &= \begin{cases} \varphi_1(t_1) & \text{si } t_2 = t_2^0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \varphi_3(t_2, t_3) &= \begin{cases} \varphi_3(t_3) & \text{si } t_2 = t_2^0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \varphi_2(t_2) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{n_2} \mu & \text{si } t_2 = t_2^0 \\ -\frac{1}{n_2} \mu & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ces trois fonctions vérifient les équations qui caractérisent respectivement F_I, F_J et $E'_{I \cap J}$, à savoir

$$\begin{aligned}
 (F_I) \quad \forall t_2 \quad \sum_{t_1} \varphi_1(t_1, t_2) &= 0 \\
 (F_J) \quad \forall t_2 \quad \sum_{t_3} \varphi_3(t_2, t_3) &= 0 \\
 (E'_{I \cap J}) \quad \sum_{t_2} \varphi_2(t_2) &= 0
 \end{aligned}$$

φ est nulle sur $s(u)$ sans être nulle partout.

PROPOSITION. — *La forme nécessaire et suffisante d'un plan adapté à $E_I + E_J$ est donc une famille d'escaliers dans chaque plan $\{t_2 = t_2^0\}$ dont les projections sur $A_{I-I \cap J}$ et $A_{J-I \cap J}$ sont respectivement $A_{I-I \cap J}$ et $A_{J-I \cap J}$.*

2) $V_1 = F_I$.

Rappelons que F_I est défini par la relation : $E_I = E_{I \cap J} \oplus F_I$. On montre alors par un raisonnement analogue :

PROPOSITION. — *La forme nécessaire et suffisante pour que $s(u)$ soit adapté à l'estimation de F_I dans le modèle $E_I + E_J$ est que dans chaque plan $\{t_2 = t_2^0\}$ $s(u)$ soit un escalier dont la projection sur $A_{I-I \cap J}$ soit $A_{I-I \cap J}$.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. VAGUELSY, *Plans d'expérience* (Publication du petit Séminaire de Statistiques).
- [2] BARRA, *Notions fondamentales de Statistiques Mathématiques*. Dunod.

(Manuscrit reçu le 5 juin 1973)