

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. ROYNETTE

Points polaires d'une diffusion

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, n° 3 (1973), p. 285-309

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_3_285_0>

© Gauthier-Villars, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Points polaires d'une diffusion

par

B. ROYNETTE

SUMMARY. — The main object of this paper is to obtain a condition for a state to be polar in the case of a diffusion process on $\mathbb{R}^2$.

INTRODUCTION

1) Considérons sur $\mathbb{R}^n$, n champs de vecteurs de classe C_∞ , à coefficients bornés, $X_1, X_2, \dots, X_n$, et soit L l'opérateur différentiel d'ordre 2

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^2 \right\}$$

Supposons que :

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n; x \in \mathbb{R}^n)$$

Alors L s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$$

où la matrice $n \times n$, $d(x)$ de composantes $(d_{ij}(x))$ égale $\sigma \sigma^*(x)$ (σ^* désignant la transposée de σ) et où

$$b_i(x) = \sum_{k,j=1}^n \sigma_{kj}^k(x) \frac{\partial \sigma_i^k}{\partial x_j}(x).$$

L'opérateur L est un opérateur elliptique qui peut être dégénéré, c'est-à-dire que nous avons seulement, pour tout x de $\mathbb{R}^n$ et pour tout θ de $\mathbb{R}^n$:

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x) \theta_i \theta_j \leq A \left(\sum_{i=1}^n \theta_i^2 \right)^{1/2} = A |\theta|^2.$$

Nous appellerons les termes de la forme $b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ les termes de translation.

2 a) Soit $\Omega = \mathcal{C} \{ [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n \}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par les coordonnées $X_s (0 \leq s \leq t)$ et $\mathcal{F} = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$. Il est prouvé dans (1, § 1) qu'il existe pour

tout x de $\mathbb{R}^n$ une probabilité P_x et une seule sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :

— $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, X_t, P_x)$ est un processus de Markov

— $P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_v L f(x) dv$

pour tout f de classe C_∞ nulle à l'infini, et où (P_t) est le semi-groupe associé à ce processus. Nous noterons G_t (resp. G) la complétée pour toutes les probabilités P_x de la tribu $\mathcal{F}_t$ (resp. $\mathcal{F}$). C'est le processus $(\Omega, G_t, G, X_t, P_x)$, fortement markovien, que nous appellerons la diffusion associée à L .

2 b) En fait, l'unique probabilité P_x de l'alinéa précédent s'obtient de la manière suivante :

Soit $(\Omega', \mathcal{A}, Q)$ un espace probabilisé sur lequel est défini un mouvement brownien β de dimension n . Soit Y_t^x l'unique solution de l'équation différentielle stochastique :

$$Y_t^x = x + \int_0^t \sigma(Y_s^x) d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t b(Y_s^x) ds$$

(où σ est la matrice définie en 1 et où $b(x)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $b_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)). Soit maintenant Π_x l'application de Ω' dans Ω définie par :

$$X_t(\Pi_x(\omega')) = Y_t^x(\omega) \quad (\omega' \in \Omega', \omega \in \Omega)$$

Il est prouvé dans (1, § 1) que P_x est l'image de P par Π_x .

3) Nous dirons que le point x de $\mathbb{R}^n$ est polaire pour la diffusion $(\Omega, G_t, G, X_t, P_x)$ associée à L si, pour tout y de $\mathbb{R}^n$:

$$P_y \{ \tau_x < +\infty \} = 0$$

où $\tau_x(\omega) = \inf \{ t > 0 ; X_t(\omega) = x \}$ est le temps d'entrée dans $\{x\}$.

Il va de soi, à cause de la continuité des trajectoires et de la propriété de Markov forte, que la notion de polarité d'un point est locale, et que l'existence d'un voisinage V de x tel que

$$\text{pour tout } y \in V, \quad P_y \{ \tau_x < +\infty \} = 0$$

implique la polarité de x .

REMARQUE 0. — Lorsqu'en un point x de $\mathbb{R}^n$ le rang des vecteurs $X_1(x)$, $X_2(x)$... $X_n(x)$ est égale à n , il est bien connu (1, p. 65) que le point x est polaire si $n \geq 2$. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de trouver une condition suffisante, beaucoup plus faible que la précédente, pour que le point x soit polaire. De plus, nous verrons que cette condition est presque nécessaire.

Il est bien clair que la notion de polarité d'un point est fortement liée à la dimension de l'espace $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 1$, la question est sans intérêt. C'est par contre pour $n = 2$ que le problème est le plus intéressant, puisque, au fur et à mesure que n augmente, « la chance pour qu'un point soit polaire augmente ». C'est pour cette raison que nous limiterons notre étude au cas où $n = 2$, et dirons seulement un mot de ce qui se passe dans les dimensions supérieures.

Remarquons enfin que lorsque $X_1, X_2, \dots, X_n$ forment un système de vecteurs de dimension 0 au point x , ce point n'est bien sûr pas polaire puisque :

$$P_x \{ \tau_x = 0 \} = 1,$$

le point x étant absorbant. Cependant, on peut voir que, sous des hypothèses faibles (1, p. 63), il existe un voisinage W de x tel que, pour tout y différent de x appartenant à W :

$$P_y \{ \tau_x < +\infty \} = 0.$$

4) Le paragraphe I est consacré à la démonstration de notre théorème principal. Dans le paragraphe II, nous étudions une réciproque. Dans le paragraphe III, nous donnons deux applications : l'une relative au problème de Dirichlet dans un ouvert ayant des angles rentrants, l'autre établissant une généralisation de la formule de Cameron-Martin.

Je remercie vivement M.E. HALBERSTADT pour les discussions fructueuses échangées avec lui lors de l'élaboration de ce papier.

I. ÉTUDE DES POINTS POLAIRES POUR $n = 2$

E₀) Ici, l'espace des états de la diffusion associée à L est $\mathbb{R}^2$. X_1 et X_2 sont deux champs bornés à coefficients analytiques. Nous noterons

$\mathcal{L}(X_1, X_2)$ l'algèbre de Lie engendrée par les champs X_1 et X_2 . C'est un module sur l'anneau des fonctions de classe C_∞ . Nous noterons $\mathcal{L}(X_1, X_2)(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$) le germe au point x de ce C_∞ -module.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous ferons l'hypothèse que les champs X_1 et X_2 sont localement transverses en tout point, c'est-à-dire :

HYPOTHÈSE E_0 . — Pour tout x de $\mathbb{R}^2$, il existe deux voisinages V_1 et V_2 de x et un difféomorphisme analytique θ de V_1 sur V_2 tel que :

$$\begin{aligned}\theta(x) &= x \\ d\theta X_1 &= \rho(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ d\theta X &= \mu(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (\rho, \mu \text{ analytiques})\end{aligned}$$

Nous allons prouver :

THÉOREME 1. — Sous l'hypothèse E_0 et si $\mathcal{L}(X_1, X_2)(x)$ est de dimension 2, alors le point x est polaire.

Nous ferons la démonstration en plusieurs étapes :

E_1) Nous supposons toujours dans ce qui suit que le point x est l'origine, que nous désignerons par 0. Nous écarterons, à l'aide de la remarque 0, le cas où le rang des vecteurs $X_1(0)$ et $X_2(0)$ est 2. D'autre part, puisque $\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)$ est de dimension 2, l'un au moins des vecteurs $X_1(0)$ ou $X_2(0)$ est non nul. Supposons par exemple que $X_1(0) \neq 0$. Dans ces conditions, il existe deux voisinages de l'origine, W_1 et W_2 , et un difféomorphisme analytique φ de V_1 sur V_2 tel que :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 \\ d\varphi \cdot X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (\text{sur } W_2)\end{aligned}$$

Notons que, à cause de l'hypothèse E_0 , le champ $d\varphi \cdot X_2$ s'annule à l'origine.

Soit (Ω, G, G, X, P_x) la diffusion associée à L . Le processus $(\Omega, \varphi(X_t), P_x)$ muni de ses tribus naturelles est un processus équivalent à la diffusion sur $\mathbb{R}^2$ associée à l'opérateur :

$$L_1 = \frac{1}{2} \{ Y_1^2 + Y_2^2 \} \quad \text{où } Y_i = d\varphi \cdot X_i \quad (i = 1, 2)$$

Cela résulte en effet facilement de la formule d'Itô et de la forme explicite de P_x (introduction, 2 b).

D'autre part, puisque $d\varphi[Z_1, Z_2] = [d\varphi \cdot Z_1, d\varphi \cdot Z_2]$ pour deux champs Z_1 et Z_2 de classe C_∞ sur $\mathbb{R}^2$ ($[Z_1, Z_2]$ désignant le crochet de Lie de Z_1 et Z_2), on a :

$$\dim (\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)) = \dim (\mathcal{L}(Y_1, Y_2)(0))$$

De plus, l'origine est polaire pour le processus (Ω, X_t, P_x) si et seulement si elle l'est pour $(\Omega, \varphi(X_t), P_x)$. On en déduit alors, la propriété de polarité étant locale, que l'on pourra toujours supposer que :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\ X_2 &\text{ s'annule à l'origine,} \end{aligned}$$

ce que nous ferons toujours jusqu'à la fin de ce paragraphe.

Ecrivons alors :

$$X_2 = a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

où a s'annule à l'origine.

Remarquons tout de suite que l'hypothèse $\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)$ de dimension 2 implique que l'une au moins des dérivées en x_1 de b n'est pas nulle à l'origine. b s'écrira donc :

$$b(x_1, x_2) = Kx_1^p + x_1^{p+1}\psi_1(x_1) + x_2\psi_2(x_1, x_2) \quad (p < \infty)$$

(ψ_1 et ψ_2 analytiques). Dans ces conditions, L s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \left\{ (1 + a^2) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2ab \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (aa'_{x_1} + ba'_{x_2}) \frac{\partial}{\partial x_1} + (ab'_{x_1} + bb'_{x_2}) \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$$

$E_2)$ Le lemme suivant relève de l'idée classique des fonctions barrières. Tel quel, il se trouve dans (1, p. 57).

LEMME E_2 . — Soit D_r le disque ouvert centré à l'origine et de rayon $r > 0$. Supposons qu'il existe une fonction u positive, de classe C_2 sur $D_r/\{0\}$ et telle que :

- 1) $Lu(x) \leq u(x)$ pour tout $x \in D_r/\{0\}$.
- 2) L'ensemble $\Gamma = \{x; \text{grad } u(x)^* \cdot d(x) \cdot \text{grad } u(x)\} = 0$ est de potentiel nul (pour la L -diffusion).
- 3) $u(x) \rightarrow +\infty$ quand x tend vers 0.

Alors 0 est un point polaire.

Démonstration. — Soit $x \in D_r / \{0\}$, τ_0 le temps d'entrée en 0, et σ le dernier temps de passage sur le bord de D_r avant τ_0 (notons que σ n'est pas un temps d'arrêt). Appliquons la formule d'Itô :

$$e^{-t}u(X_t) - e^{-\sigma}u(X_\sigma) = \int_{\sigma}^t e^{-s} \langle \text{grad } u(X_s)^*, \sigma(X_s) d\beta_s \rangle + \int_{\sigma}^t e^{-s} (Lu - u)(X_s) . ds \quad \text{p. s. } (t \geq \sigma)$$

Si $\sigma \leq t < \tau_0$, alors $X_s \in D_r$ et :

$$e^{-t}u(X_t) - e^{-\sigma}u(X_\sigma) \leq \int_{\sigma}^t e^{-s} \langle (\text{grad } u(X_s))^*, \sigma(X_s) d\beta_s \rangle$$

d'autre part,

$$M_t = \int_{\sigma}^t e^{-s} \langle (\text{grad } u(X_s))^*, \sigma(X_s) d\beta_s \rangle$$

est un mouvement brownien γ changé de temps, avec comme nouvelle échelle :

$$A_t = \int_{\sigma}^t e^{-2s} \langle (\text{grad } u(X_s))^*, d(X_s) . (\text{grad } u(X_s)) \rangle ds$$

qui est strictement croissante, d'après la seconde hypothèse de E_2 .

De deux choses l'une :

$$\begin{array}{ll} \text{ou bien} & A_{\tau_0} < +\infty \\ \text{ou bien} & A_t \xrightarrow{t \rightarrow \tau_0} +\infty \end{array}$$

Mais dans ces deux cas, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \tau_0} \gamma_{A_t} - \gamma_{A(\sigma)} < +\infty$$

Donc, sur $\{\tau_0 < +\infty\}$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \tau_0} e^{-t}u(X_t) \leq e^{-\sigma}u(X_\sigma) + \lim_{t \rightarrow \tau_0} \gamma_{A_t} - \gamma_{A_\sigma} < +\infty$$

Ceci prouve que $P_x \{\tau_0 < +\infty\}$, puisque $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

Pour achever la preuve du lemme E_2 , il reste à voir que $P_0 \{\tau_0 < +\infty\} = 0$.

Mais cela est évident, puisque l'hypothèse $X_1(0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0$ implique que la L-diffusion pénètre immédiatement dans l'ensemble des points à partir desquels on ne peut atteindre l'origine.

E_3) Le reste de la démonstration consiste à trouver des fonctions

satisfaisant aux hypothèses du lemme E_2 . La technique des tests de Hasminskii (7, p. 102), adaptée à notre situation, donne un outil commode.

LEMME E_3 . — Soient $B(\lambda)$ et $A(\lambda)$ deux fonctions positives et continues définies sur un intervalle de la forme $]0, \alpha]$ ($\alpha > 0$).

Supposons que :

- A est strictement positive et bornée pour λ assez petit
- B est finie et telle que $B(\lambda) \geq \frac{2}{\lambda^2}$ pour λ assez petit.

Définissons alors une suite de fonctions V_n sur $]0, \frac{\alpha^2}{2}]$ par

$$V = 1, \quad V_n\left(\frac{y^2}{2}\right) = 2 \int_y^\alpha C^{-1}(z) z dz \int_z^\alpha V_{n-1}\left(\frac{u^2}{2}\right) \frac{C(u)}{A(u)} du$$

où

$$C(u) = \exp - \int_u^\alpha B(\lambda) \lambda d\lambda$$

et posons :

$$v(y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(y)$$

Alors

- 1) v est de classe C_2 sur $]0, \frac{\alpha^2}{2}]$ et satisfait à l'équation différentielle :

$$v(y) = \frac{1}{2} A(\sqrt{2y}) (V''(y) + B(\sqrt{2y}) v'(y)) \text{ sur }]0, \frac{\alpha^2}{2}]$$

- 2) $v(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0_+} +\infty$.

Démonstration. — Le point 1 est facile : on remarque que $V_n \leq \frac{V^n}{n!}$ et un calcul explicite prouve que V satisfait à l'équation indiquée. Pour le point 2, remarquons d'abord que $V \geq V_1$. Ensuite :

$$V_1\left(\frac{y^2}{2}\right) = 2 \int_y^\alpha \left(\exp \int_z^\alpha B(\lambda) \lambda d\lambda \right) z H(z) dz$$

où la fonction H est décroissante et strictement positive. D'où, pour y assez petit :

$$V_1\left(\frac{y^2}{2}\right) \geq C \int_y^\alpha \left(\exp \int_z^\alpha \frac{2}{\lambda^2} \lambda d\lambda \right) z dz = C' \{ \log \alpha - \log z \} \rightarrow +\infty \text{ quand } z \rightarrow 0_+$$

E₄) Nous nous souvenons que X s'écrit :

$$X_2 = a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

avec

$$b(x_1, x_2) = Kx_1^p + x_1^{p+1}\psi_1 + x_2\psi_2 \quad (p < +\infty) \text{ et } (a(0) = 0)$$

Le cas où $p = 0$ ne nous intéresse pas, puisque la question de la polarité de 0 est triviale dans ce cas (Remarque 0). Nous supposons donc $1 \leq p < +\infty$.

Le lemme suivant est purement technique.

LEMME E₄. — On peut trouver des constantes γ, α, β positives strictement de façon à ce que la fonction μ :

$$\mu(x_1, x_2) = \gamma x_1^{2p+2} + \alpha x_2^2 + \beta x_1^2 x_2^2$$

satisfasse à l'inéquation :

$$\mu \{ (1 + a^2)\mu''_{x_1^2} + 2ab\mu''_{x_1x_2} + b^2\mu''_{x_2^2} + (aa'_{x_1} + ba'_{x_2})\mu'_{x_1} + (ab'_{x_1} + bb'_{x_2})\mu'_{x_2} \} \\ - \{ (1 + a^2)(\mu'_{x_1})^2 + 2ab\mu'_{x_1}\mu'_{x_2} + b^2(\mu'_{x_2})^2 \} \geq 0$$

Dans un voisinage de l'origine.

Démonstration. — Nous écrirons b^2 sous la forme :

$$b^2(x_1, x_2) = K^2 x_1^{2p} + x_1^{2p+1}\varphi_1 + x_2 x_1 \varphi_2 + x_2^2 \varphi_3$$

et

$$a(x_1, x_2) = a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + \dots$$

Un calcul simple prouve alors que le premier membre de l'inéquation à prouver s'écrit :

$$(C_1 + 0_1(x_1, x_2))x_1^{4p+2} + (C_2 + 0_2(x_1, x_2))x_2^4 + (C_3 + 0_3(x_1, x_2))x_1^2 x_2^2 \\ + (C_4 + 0_4(x_1, x_2))x_1^p x_2^3 + (C_5 + 0_5(x_1, x_2))x_1^{3p+2} x_2$$

où C_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) sont des constantes et où $0_i(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) sont des fonctions qui tendent vers 0 avec (x_1, x_2) . Plus précisément :

$$C_1 = 2\alpha\beta K^2 - \gamma^2(2p + 2) \\ C_2 = 2\alpha\beta + 2\alpha^2(\psi_2^2(0) - \varphi_3(0)) \\ C_3 = \alpha(\gamma(2p + 2)(2p + 1) - 2\alpha K^2).$$

On voit facilement qu'on peut choisir α, β, γ de façon que C_1, C_2 et C_3 soient positives. D'autre part, C_2 peut être prise arbitrairement grand en prenant β arbitrairement grande. De plus, on remarque que ni C_4 , ni C_5 ne dépendent de β .

Nous sommes alors ramenés à l'étude du polynôme :

$$P(x_1, x_2) = C_1 x_1^{4p+2} + C_2 x_2^4 + C_3 x_1^{2p} x_2^2 + C_4 x_1^p x_2^3 + C_5 x_1^{3p+2} x_2$$

que nous écrirons :

$$x_2^2(C_2 x_2^2 + C_4 x_2 x_1^p + C_3 x_1^{2p}) + C_1 x_1^{4p+2} + C_5 x_1^{3p+2} x_2$$

Remarquons que le premier terme ne s'annule que pour : $x_2 = 0$ dès que C_2 est assez grande, c'est-à-dire β assez grande. Donc :

si $|x_2| < \left| \frac{C_1}{C_5} \right| |x_1^p|$

et si $(x_1, x_2) \neq 0$, $P(x_1, x_2) > 0$.

D'autre part :

si $|x_2| \geq \left| \frac{C_1}{C_5} \right| |x_1^p|$

et si $(x_1, x_2) \neq 0$ alors :

$$|C_4 x_1^p x_2^3| \leq \left| \frac{C_4 C_5}{C_1} x_2^4 \right|$$

$$|C_5 x_1^{3p+2} x_2| \leq \left| \frac{C_5^4}{C_1^3} x_2^4 x_1^2 \right|$$

D'où :

$$P(x_1, x_2) > C_2 x_2^4 - \left| \frac{C_4 C_5}{C_1} x_2^4 + \frac{C_5^4}{C_1^3} x_2^4 x_1^2 \right| > 0$$

Dans un voisinage de 0 dès que C_2 , donc β est assez grande.

Ceci prouve notre lemme.

A partir de maintenant, nous supposons que α , β et γ ont été choisis de façon à satisfaire aux conclusions du lemme E₄.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer notre théorème. Soit C_λ la courbe d'équation :

$$\gamma x_1^{2p+2} + \alpha x_2^2 + \beta x_1^2 x_2^2 = \frac{\lambda^2}{2}$$

Remarquons que, dans un voisinage de l'origine :

- la fonction $\lambda(x_1, x_2)$ ainsi définie est de classe C_2 ,
- tout point, sauf l'origine, appartient à une C_λ , et une seule,
- la distance de C_λ à l'origine est strictement positive, et tend vers 0 quand λ tend vers 0.

Soit alors :

$$A(x_1, x_2) = (1 + a^2)(\lambda\lambda'_{x_1})^2 + 2ab(\lambda\lambda'_{x_1})(\lambda\lambda'_{x_2}) + b^2(\lambda\lambda'_{x_2})^2$$

et

$$A(\lambda) = \sup_{(x_1, x_2) \in C_\lambda} A(x_1, x_2)$$

Soit encore :

$$d(x_1, x_2) = (1 + a^2)(\lambda\lambda'_{x_1})'_{x_1} + 2ab(\lambda\lambda'_{x_1})'_{x_2} + b^2(\lambda\lambda'_{x_2})'_{x_2} \\ + (aa'_{x_1} + ba'_{x_2})(\lambda\lambda'_{x_1}) + (ab'_{x_1} + bb'_{x_2})\lambda\lambda'_{x_2}$$

$$B(x_1, x_2) = \frac{d(x_1, x_2)}{A(x_1, x_2)} \quad \text{et} \quad B(\lambda) = \inf_{(x_1, x_2) \in C_\lambda} B(x_1, x_2).$$

A l'aide des deux fonctions $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$, nous définissons comme dans le lemme E_3 une fonction v . Soit enfin :

$$u(x_1, x_2) = v\left(\frac{\lambda^2(x_1, x_2)}{2}\right).$$

Nous allons achever la preuve du théorème 1 en montrant que la fonction u ainsi construite satisfait aux 3 hypothèses du lemme E_2 . Un calcul simple prouve :

$$Lu(x_1, x_2) = \frac{1}{2} A(x_1, x_2) \left\{ v''\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + v'\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \frac{d(x_1, x_2)}{A(x_1, x_2)} \right\}$$

Or :

$$v'\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \leq 0,$$

et $d(x_1, x_2) \geq 0$ (d'après E_4).

Donc :

$$Lu(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2} A(x_1, x_2) \left\{ v''\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + v'\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) B(\lambda) \right\}$$

D'après le lemme E_3

$$Lu(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2} A(x_1, x_2) \left\{ \frac{2}{A(\lambda)} v\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \right\}$$

Comme v est positive, on en déduit :

$$Lu(x_1, x_2) \leq v\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) = u(x_1, x_2)$$

L'hypothèse 1 du lemme E_2 est satisfaite.

Quant à l'hypothèse 3 du lemme E_2 , elle résulte du lemme E_3 , 2, et du lemme E_4 (où on a posé $\mu = \frac{\lambda^2}{2}$).

L'objet du lemme suivant est de prouver que u satisfait à l'hypothèse 2 du lemme E_2 ; ce lemme achèvera la démonstration du théorème 1.

LEMME E_5 . — L'ensemble $\Gamma = \{x; (\text{grad } u(x)) * d(x) \cdot \text{grad } u(x)\} = 0$ est de potentiel nul (pour la L-diffusion).

Démonstration. — L'ensemble $\Delta = \{x; \mathcal{L}(X_1, X_2)(x) \text{ est de dimension } 2\}$ étant ouvert, Δ recouvre un voisinage W de l'origine. Dans W l'opérateur L est hypoelliptique et la mesure de Lebesgue est mesure de référence (1, p. 76), d'autre part, on remarque que :

$$\Gamma \subset \{x; b(x) = 0\}$$

et puisque b possède une dérivée non nulle en x_1 ,

$$\{x; b(x) = 0\} \cap W$$

est de mesure de Lebesgue nulle, et cela achève la preuve de E_5 .

II. ÉTUDE D'UNE RÉCIPROQUE

Nous allons d'abord, pour une classe d'opérateurs particuliers, étendre le théorème 1 dans un cas où l'hypothèse $\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)$ de dimension 2 n'est pas satisfaite. Plus précisément :

THÉORÈME 2. — Soit e une fonction de x_1 seulement, de classe C^∞ , nulle en 0 et strictement positive ailleurs. Soit L l'opérateur :

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + e^2(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\}$$

Alors l'origine est polaire pour la L-diffusion.

Démonstration. — Le cas où e a une dérivée non nulle à l'origine est justiciable des méthodes du paragraphe précédent. Nous nous intéresserons donc seulement au cas où e est très plate, c'est-à-dire que nous aurons.

$$\frac{d^p e}{dx_1^p}(0) = 0 \quad \text{pour tout } p.$$

Nous allons utiliser des résultats récents sur les processus à accroisse-

ments indépendants (p. a. i.) dus à Kesten. Rappelons-les brièvement :

Soit Z_t un p. a. i. standard, stationnaire et à valeurs réelles, défini sur un espace de probabilité $(E, \mathcal{E}, Q)$ tel que :

$$Q \{ Z_0 = 0 \} = 1$$

et soit

$$C = \{ x_1 ; Q(\tau_{x_1} < +\infty) > 0 \}$$

(τ_{x_1} , temps d'atteinte de x_1).

Kesten classe complètement tous ces processus, et en particulier il donne des critères pour que $C = \{ \emptyset \}$ (voir 4, p. 21).

Le cas des processus de Poisson généralisés (i. e. : $Q_0(\sigma_0 > 0) > 0$, où σ_0 est le temps de sortie de 0) étant éliminés, on a :

$$E(e^{iuZ_t}) = \exp t\psi(u)$$

avec

$$\psi(u) = iua - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iuy} - 1 - \frac{iuy}{1+y^2} \right) M(dy)$$

M étant une mesure sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ positive telle que

$$\int (y^2 \wedge 1) M(dy) < +\infty.$$

Kesten distingue alors les 3 cas suivants :

$$\begin{array}{ll} A - \sigma \neq 0 & \text{alors} \quad C = \mathbb{R} \\ B - \sigma = 0 & \text{et} \quad \int (|x| \wedge 1) M(dx) = +\infty ; \end{array}$$

on peut avoir $C = \{ \emptyset \}$ ou $C = \mathbb{R}$, mais dans les cas A et B, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Z_t}{t} = +\infty \quad Q \text{ p. s.}$$

$$C - \sigma = 0 \quad \text{et} \quad \int (|x| \wedge 1) M(dx) < +\infty$$

On peut alors écrire

$$\psi(u) = iua' + \int (e^{iuy} - 1) M'(dy).$$

Il y a 3 sous-cas :

$$\begin{array}{lll} \underline{C}_1 & a' = 0 & \text{alors} \quad C = \{ \emptyset \} \\ \underline{C}_2 & a' > 0, & M' \text{ portée par } \mathbb{R}_+, \text{ alors } C = \mathbb{R}_+ \\ \underline{C}_3 & a' > 0, & M' \text{ charge } \mathbb{R}_-, \text{ alors } C = \mathbb{R} \\ & & (\text{plus des cas symétriques}) \end{array}$$

Dans le cas $\underline{C}$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Z_t}{t} = a' \quad \text{Q p. s.}$$

Soit maintenant (Ω, X, P_0) la diffusion associée à L partant de l'origine. La première composante de ce processus est un mouvement brownien β_t . Soit A_t le temps local en 0 de β_t et $A_t^{-1} = v_t$. Le processus :

$$Z_t = X_{v_t}^2 \quad (X^2, \text{seconde composante de } X)$$

est un p. a. i., et soit C l'ensemble associé à Z_t comme précédemment. v_t est un p. a. i. stable d'indice $1/2$, ie :

$$E(e^{iuv_t}) = \exp - t \int_{0+}^{+\infty} (e^{iuy} - 1)m(dy)$$

où m est une mesure sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ telle que

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{x}{x+1} m(dx) < +\infty$$

On a donc (cas C_1)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_t}{t} = 0 \quad P_0 \text{ p. s.}$$

En particulier :

$$\rho = \inf \{ t ; v_t \geq t \}$$

est un temps d'arrêt strictement positif.

Z n'est pas un processus de Poisson généralisé, i. e. :

$$P_0 \{ \sigma > 0 \} = 0 \quad \text{où} \quad \sigma = \inf \{ t > 0 ; Z_t \neq 0 \}$$

En effet, sinon on aurait :

$$Z_{t \wedge \rho \wedge \sigma} = X_{v(t \wedge \rho \wedge \sigma)}^2 = 0 = \int_0^{v(t \wedge \rho \wedge \sigma)} e(\beta_s) d\beta_s^2$$

où β est un mouvement brownien indépendant de β (introduction, 2 b).

D'autre part :

$$v(t \wedge \rho \wedge \sigma) \leq v(t \wedge \rho) \leq t$$

Donc $v(t \wedge \rho \wedge \sigma)$ est un temps d'arrêt intégrable. D'où :

$$0 = E(Z_{t \wedge \rho \wedge \sigma}^2) = E \int_0^{v(t \wedge \rho \wedge \sigma)} e^2(\beta_s) ds,$$

Ce qui est absurde puisque $v(t \wedge \rho \wedge \sigma) > 0$ et $e > 0$ en dehors de l'origine.

Le problème de la polarité étant local et e plate à l'origine, on peut s'arranger pour que :

$$\text{pour tout } x_1 \in \mathbb{R}, \quad |e(x_1)| \leq Kx_1^3$$

D'où :

$$E(Z_{t \wedge \rho}^2) = E \int_0^{v_t \wedge \rho} e^2(\beta_s) ds \leq KE \int_0^t \beta_s^6 ds \leq K't^4$$

On en déduit :

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{n}} |Z_{t \wedge \rho}| \geq \frac{1}{n} \right\} \leq \frac{K'}{n^2}$$

Et d'après le lemme de Borel-Cantelli :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{Z_{t \wedge \rho}}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{Z_t}{t} \leq 1 \quad P_0 \text{ p. s.}$$

La classification de Kesten permet alors d'affirmer que l'on est dans le cas C ; et des considérations de symétrie évidentes (Z_t a même loi que $-Z_t$) prouvent que $a' = 0$ et donc que $C = \{\emptyset\}$. On en tire facilement :

$$P_0 \{ \tau_0 < +\infty \} = 0 \quad \text{où} \quad P_0 = \inf \{ t > 0 ; X_t = 0 \}$$

. Soit maintenant :

$$\Pi = \{ x \in \mathbb{R}^2 ; P_x \{ \tau_0 < +\infty \} > 0 \}.$$

Il est clair que Π est un ouvert fin, et comme le complémentaire Π^c est absorbant, Π est un fermé fin. Soit enfin :

$$\Theta = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 ; \mathcal{L} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, e(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (x) \text{ est de dim} < 2 \right\}$$

Il est clair que Θ est l'axe des x_2 , et donc que Θ n'a pas de points finement intérieurs. D'après (10, théorème 6), Π est alors soit $\mathbb{R}^2$, soit $\{\emptyset\}$. Mais Π ne contient pas 0, et donc $\Pi = \{\emptyset\}$, ce qui prouve que 0 est polaire.

REMARQUE 1. — Dans l'autre sens, le théorème 1 permet de trouver des résultats sur certains p. a. i.

Soient β_1 et β_2 deux mouvements browniens indépendants, A_t le temps local en 0 de β_1 et $v_t = A_t^{-1}$. Soit e analytique, fonction de x_1 , non identiquement nulle, et soit :

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^t e(\beta_1^s) d\beta_2^s \\ Z_t &= Y_{v_t} \end{aligned}$$

Alors Z_t est un p. a. i. Si l'on remarque que Y_t est la première composante de la diffusion associée à l'opérateur :

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + e^2(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\},$$

le théorème 1 permet de conclure que l'ensemble C (associé au p. a. i. Z_t) est vide.

Le théorème 2 permet de voir que, lorsque les coefficients des champs sont seulement de classe C_∞ , la condition $\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)$ de dimension 2 n'est pas nécessaire à la polarité de l'origine. Mais, lorsque les coefficients sont analytiques, il n'en est pas ainsi.

THÉORÈME 3. — Si X_1 et X_2 sont deux champs à coefficients analytiques, alors la condition $\mathcal{L}(X_1, X_2)(x)$ est nécessaire à la polarité de x .

La démonstration repose essentiellement sur un lemme de géométrie différentielle dû à Nagano. En voici une preuve, prise dans (5).

LEMME 6. — Si X_1 et X_2 sont deux champs analytiques et si $\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)$ est de dimension k , strictement plus petite que 2, alors il existe, au voisinage de 0, une variété V de dimension k , passant par 0, telle que X_1 et X_2 soient tangents à V .

Démonstration. — Si $k = 0$, il n'y a rien à prouver.

Supposons $k = 1$. On commence par se ramener, comme dans I, E_1 par un changement de coordonnées analytiques, à $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. L'hypothèse sur $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ permet alors de voir que X_2 est nul sur l'ensemble $\{x_2 = 0\}$, qui constitue alors la variété cherchée.

La démonstration du théorème 3 est alors simple. Distinguons deux cas :

1) $\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)$ est de dimension 0. Mais alors :

$$X_1(0) = X_2(0) = 0,$$

et 0 est absorbant, donc non polaire.

2) $\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)$ est de dimension 1. Soit V la variété dont le lemme 6 assure l'existence. Le processus diffusion associé à L est alors un mouvement brownien sur V changé de temps par la fonctionnelle additive :

$$A_t = \int_0^t \sum_{i=1}^n \|X_i^2(X_s)\| ds. \quad (\text{voir 1, p. 54})$$

Il est alors clair que 0 n'est pas polaire, puisque, pour tout y de V suffisamment proche de l'origine :

$$P_y \{ \tau_0 < +\infty \} > 0.$$

III. DEUX APPLICATIONS

Dans tout ce paragraphe, les champs X_1 et X_2 qui interviennent satisfont à l'hypothèse E_0 .

I. Une généralisation de la formule de Cameron-Martin

A_0) Soient Z_1 et Z_2 deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ de composantes respectives z_1^i et z_2^i ($i = 1, 2$). Soient L_1 et L_2 deux opérateurs elliptiques respectivement définis sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$L_1 = \sum_{i,j=1}^2 d_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 z_1^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$L_2 = \sum_{i,j=1}^2 d_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 z_2^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Lorsque la matrice d_{ij} est à coefficients continus et uniformément elliptique (i. e. : il existe $A > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $\theta \neq 0$:

$$\frac{1}{A} |\theta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 d_{ij}(x) \theta_i \theta_j \leq A |\theta|^2$$

et lorsque les champs Z_1 et Z_2 sont bornés, il est bien connu (11, p. 389) que les probabilités P_x^1 (associée à L_1) et P_x^2 (associée à L_2) sont équivalentes sur chaque tribu $\mathcal{F}_t$ ($0 \leq t < +\infty$). En plus, nous avons une forme explicite de la densité :

$$\left. \frac{dP_x^2}{dP_x^1} \right|_{\mathcal{F}_t} = \exp M_t - \frac{1}{2} A_t$$

où M_t est une P_x^1 martingale et A_t le processus croissant associé, et :

$$M_t = \int_0^t \langle d^{-1}(Z_2 - Z_1), dX_s \rangle - \int_0^t \langle d^{-1}(Z_2 - Z_1), Z_1 \rangle ds$$

$$A_t = \int_0^t \langle Z_2 - Z_1, d^{-1}(Z_2 - Z_1) \rangle ds$$

REMARQUE 2. — Il n'est pas difficile de voir en fait que l'hypothèse suivante :

« l'équation : $d.Y = Z_2 - Z_1$

possède une solution Y telle que :

$\langle Z_2 - Z_1, Y \rangle$ soit une fonction bornée »

est suffisante pour que P_x^1 et P_x^2 soient équivalentes pour tout x sur chaque $\mathcal{F}_t$ ($0 \leq t < +\infty$).

A₁) Nous nous proposons de donner une condition suffisante, plus faible que celle de l'alinéa précédent, permettant d'assurer l'équivalence des mesures P_x^1 et P_x^2 . L'opérateur L_1 s'écrira ici $\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$ où X_1 et X_2 sont deux champs analytiques, et $L_2 = L_1 + Y$, où Y est un champ analytique borné. Nous ferons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE A₁ :

1) Le seul point de dégénérescence de l'opérateur L_1 est l'origine et L_1 est uniformément elliptique en dehors d'un compact contenant 0.

2) Le germe $\mathcal{L}(X_1, X_2)(0)$ est de dimension 2, et soit P le nombre minimum de crochets nécessaire à l'obtention de deux vecteurs indépendants à l'origine. Nous supposons que, à partir de X_1 et de Y , il faut au moins P crochets pour obtenir deux vecteurs indépendants à l'origine, et de même à partir de X_2 et de Y .

Nous pouvons alors énoncer :

THÉORÈME 4.

1) Sous les hypothèses A₁ et E₀, pour tout $x \neq 0$, les probabilités P_x^1 (associée à L_1) et P_x^2 (associée à L_2) sont équivalentes sur chaque tribu $\mathcal{F}_t$.

2) Soit $\mathcal{F}_t^s$ la tribu engendrée par les X_u ($s \leq u \leq t$). Alors P_0^1 et P_0^2 sont équivalentes sur l'algèbre de Boole

$$\bigcup_{t \geq s > 0} \mathcal{F}_t^s$$

Pour prouver ce théorème, nous procéderons en deux étapes.

LEMME A₂. — L'origine est polaire, pour la L₁-diffusion aussi bien que pour la L₂-diffusion.

Démonstration. — Bien sûr, seul le cas de la L₂-diffusion est à considérer. A cause du caractère local de la polarité, et du fait que l'hypothèse A₁ est invariante par l'action d'un difféomorphisme, on pourra supposer que $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. De ce fait, la deuxième composante y_2 du vecteur Y s'écrit nécessairement :

$$y_2(x_1, x_2) = Kx_1^p + x_1^{p+1}\varphi_1(x_1) + x_2\varphi_2(x_1, x_2),$$

où φ_1 et φ_2 sont bornées au voisinage de l'origine. Il est alors facile, au vu de la forme de y_2 , en reprenant mot à mot la démonstration du théorème 1, de voir que 0 est polaire pour la L₂-diffusion.

A₃) Soit pour l'instant x fixé différent de 0, et n un entier positif. Définissons :

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |\langle Y, d^{-1}Y \rangle| \leq n\}$$

Il est clair, à cause de A₁, que :

$$K_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Supposons n assez grand pour que $x \in K_n$ et désignons par σ_n le temps de sortie de K_n :

$$\sigma_n = \inf \{t > 0 ; X_t \notin K_n\}.$$

Soit $Y_n = 1_{K_n} \cdot Y$, $L^n = L_1 + Y_n$, P_x^n les probabilités associées à L^n et $\mathcal{F}_{n,t}$ la tribu $\mathcal{F}_{t \wedge \sigma_n}$.

D'après l'alinéa A₀, on a :

$$\left. \frac{dP_x^n}{dP_x^1} \right|_{\mathcal{F}_{n,t}} = \exp M_t^n - \frac{1}{2} A_t^n = R_t^n$$

où :

$$A^n = \int_0^{t \wedge \sigma_n} \langle Y, d^{-1}Y \rangle ds.$$

Comme l'origine est polaire pour la L₁-diffusion, il est clair que :

$$A_t^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A_t^\infty < +\infty \quad P_x^1 \text{ p. s.}$$

Comme d'autre part, à t fixé, M_t^n est une martingale en n , un argument

classique permet d'affirmer que M_t^n a une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$, P_x^1 p. s. Donc R_t^n a une limite finie, R_t^∞ , P_x^1 p. s., et même :

$$0 < R_t^\infty < +\infty \quad P_x^1 \text{ p. s.}$$

D'autre part, R_t^n étant, à t fixé, une P_x^1 martingale positive en n , on a :

$$E_x^1(R_t^\infty) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E_x^1(R_t^n) = 1.$$

Et donc R_t^∞ est une variable aléatoire E_x^1 intégrable. D'autre part, comme sur $\mathcal{F}_{n,t}$ on a :

$$P_x^n = P_x^2 = R_t^n \cdot P_x^1$$

Le lemme de Fatou permet d'affirmer : pour tout $A \in \bigcup_n \mathcal{F}_{n,t}$:

$$P_x^2(A) \geq E_x^1(1_A \cdot R_t^\infty)$$

L'intégrabilité de R_t^∞ implique alors : pour tout $A \in \bigvee_n \mathcal{F}_{n,t} = \mathcal{F}_t$:

$$P_x^2(A) \geq E_x^1(1_A \cdot R_t^\infty)$$

Mais puisque $0 < R_t^\infty$ P_x^1 p. s., on a :

$$P_x^1 \ll P_x^2 \quad (\text{sur } \mathcal{F}_t)$$

Le fait que l'origine est polaire pour la L_2 -diffusion permet alors de faire jouer à P_x^1 et P_x^2 des rôles symétriques, et donc ces deux probabilités sont équivalentes sur $\mathcal{F}_t$ et cela achève la preuve du point 1.

Quant au point 2, il résulte du point 1, de la polarité de l'origine et de la propriété de Markov.

II. Une application au problème de Dirichlet

Soient X_1 et X_2 deux champs de vecteurs analytiques sur $\mathbb{R}^2$. Satisfaisant, comme précédemment à E_0 .

Soit maintenant G un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière ∂G compacte tel que tout point de ∂G peut être « atteint de l'extérieur par un cône ouvert », i. e. : par tout $x \in \partial G$, il existe un cône ouvert K de sommet x et un nombre $\varepsilon > 0$ tel que :

$$G \cap K \cap B_\varepsilon = \emptyset,$$

où B_ε est le disque ouvert centré en x et de rayon ε .

THÉORÈME 5. — Soit $L = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$. Nous supposons que X_1 et X_2

satisfont à l'hypothèse E_0 et que $\mathcal{L}(X_1, X_2)(x)$ est de dimension 2 pour tout x . Soit (Ω, X, P_x) la diffusion associée à L . Soit G comme précédemment et σ_G le temps de sortie de G . Alors, pour tout $\lambda > 0$, la fonction :

$$h(x) = E_x(e^{-\lambda \sigma_G} \cdot f(X_{\sigma_G}))$$

est l'unique fonction continue sur $G \cup \partial G$, de classe C_∞ sur G et satisfaisant à :

$$Lh - \lambda h = 0 \quad \text{dans } G$$

Notons que ce résultat est bien connu lorsque L est uniformément elliptique ((6), vol. 2, p. 42).

Démonstration.

B₁) Nous allons déjà prouver que tout point x de ∂G est régulier au sens suivant :

$$P_x \{ \sigma_G = 0 \} = 1 \quad (x \in \partial G)$$

Pour cela, on se ramène par difféomorphisme à la situation suivante :

$$x \text{ est l'origine,} \quad x_1 = \rho(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad x_2 = \theta(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

L s'écrit alors :

$$L = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho \rho'_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \theta'_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

La remarque 2 du paragraphe A_0 permet alors de voir que, pour prouver le résultat annoncé, il suffit de montrer que $x \in \partial G$ est régulier pour l'opérateur :

$$L_0 = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Remarquons, du fait que $\dim \mathcal{L}(X_1, X_2)(0) = 2$, que l'une au moins des deux fonctions ρ et θ , par exemple ρ , ne s'annule pas en 0. Nous sommes conduits (introduction, 2 b) à étudier les équations différentielles stochastiques :

$$\begin{aligned} X_t^1 &= \int_0^t \rho(X_s^1, X_s^2) d\beta_s^1 \\ X_t^2 &= \int_0^t \theta(X_s^1, X_s^2) d\beta_s^2. \end{aligned}$$

Soit maintenant S une demi-droite, distincte des axes de coordonnées, incluse dans un cône K de sommet 0 tel que :

$$K \cap G \cap B_\varepsilon = \emptyset$$

et soit S_- la demi-droite opposée.

Soit Z_t la projection du mouvement sur $S = S_+ \cup S_-$

$$Z_t = K_1 \int_0^t \rho d\beta_s^1 + K_2 \int_0^t \theta d\beta_s^2$$

Notons A_t le temps local sur S , et $\tau_t = A_t^{-1}$ (ce temps local est bien défini puisque $\rho(0) \neq 0$; c'est même un changé de temps local d'un mouvement brownien à l'origine, par un changement de temps B_t satisfaisant à :

$$\frac{1}{C} t \leq B_t \leq Ct).$$

Soit $v = \inf \{ t ; \tau_t \geq t \}$. Notons que $v > 0$ p. s. Raisonnons par l'absurde et supposons que $P_0 \{ \sigma_G > 0 \} > 0$. Puisque 0 est polaire pour l'origine d'après le théorème 1, on aurait alors :

$$0 > Z_{\tau(t \wedge \sigma_G \wedge v)} = \int_0^{\tau(t \wedge \sigma_G \wedge v)} K_1 \rho d\beta^1 + K_2 \theta d\beta^2$$

Comme $\tau(t \wedge \sigma_G \wedge v) \leq t$, $\tau(t \wedge \sigma_G \wedge v)$ est intégrable, et :

$$0 > E \int_0^{\tau(t \wedge \sigma_G \wedge v)} K_1 \rho d\beta^1 + K_2 \theta d\beta^2 = 0$$

ce qui est absurde.

Ainsi, $x \in \partial G$ est régulier.

B) Les arguments qui suivent sont bien connus. Indiquons-les brièvement :

1) Puisque le processus associé à L est fortement fellérien (1, p. 77) tout point $x \in \partial G$ est très régulier (6, vol. 2, p. 29) au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $u > 0$, il existe un voisinage V de x tel que :

$$\text{Si } y \in V, \quad P_y \{ \sigma_G > u \} < \varepsilon$$

Il est alors facile (1, p. 71) de voir que $h(x)$ est continue sur ∂G .

2) Soient x et y appartenant à G et X_t^x et X_t^y les solutions respectives de :

$$\begin{aligned} X_t^x &= x + \int_0^t \sigma(X_s^x) d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t b(X_s^x) ds \\ X_t^y &= y + \int_0^t \sigma(X_s^y) d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t b(X_s^y) ds, \end{aligned}$$

avec les notations de l'introduction (2, b).

De l'inégalité classique :

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq u} |X_t^x - X_t^y| \geq \eta \right\} \leq \frac{K(u)}{\eta^2} \|x - y\|^2$$

et de la compacité de ∂G , on déduit la continuité de h dans G (1, p. 72).

3) Soit $y \in G$, et V un ouvert inclus dans G de frontière de classe C_∞ par morceaux, contenant y , et tel qu'il existe une fonction g (3, p. 14) définie dans $V \cup \partial V$ satisfaisant à :

- g est de classe C_∞ sur V
- $g = h$ sur ∂V
- $Lg - \lambda h = 0$ sur V

Soit d'autre part $\mathcal{A}$ le générateur de Dynkin de la diffusion. Alors h satisfait à :

$$\mathcal{A}h - \lambda h = 0 \quad \text{sur } V.$$

On en déduit alors (6, vol. 1, p. 158) que :

$$h = g \text{ sur } V, \text{ et donc que } h \text{ est de classe } C_\infty \text{ sur } G.$$

4) L'unicité de h est bien connue et résulte du principe du maximum.

Remarquons enfin que le théorème 5 est encore vrai pour $\lambda = 0$ dès que l'on suppose G assez petit pour que :

$$\sup_{x \in G} P_x \{ \sigma_G > t \} \leq e^{-kt}$$

IV. QUELQUES REMARQUES

REMARQUE 3. — Nous nous intéressons ici à un problème très lié à celui des points polaires. L'exemple qui suit précise une question déjà abordée dans (10, II, exemple 1). Soit L l'opérateur défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + e(x_1)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\}$$

où e est définie par :

$$\begin{aligned} e(x_1) &= \frac{1}{x_1^3} e^{-\frac{1}{2x_1^3}} & \text{si } x_1 > 0 \\ e(x_1) &= 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

Soit

$$D = \{x_1, x_2; x_2 = 0, x_1 \leq 0\}$$

Nous allons prouver que :

$$P_x \{ \tau_D < +\infty \} = 0$$

pour tout

$$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{D\} \cup \{0\}$$

(τ_D , temps d'entrée dans D).

Démonstration. — Il suffit bien sûr pour cela de voir qu'il existe un voisinage V de l'origine tel que :

$$\text{pour tout } x \in V \setminus (D \cap V), P_x \{ \tau_{D \cap V} < \sigma < +\infty \} = 0$$

(où $\tau_{D \cap V}$ et σ_V désignent respectivement le temps d'entrée dans $D \cap V$ et le temps de sortie de V). Soit :

C_λ la courbe d'équation :

$$e^{-\frac{1}{x_1^3}} + x_2^2 = \lambda^2$$

et soient :

$$A(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^6} e^{-\frac{2}{x_1^3}} + x_2^2 \frac{1}{x_1^6} e^{-\frac{1}{x_1^3}} = \frac{1}{x_1^6} e^{-\frac{1}{x_1^3}} \lambda^2$$

Définissons $B(x_1, x_2)$ par :

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) B(x_1, x_2) &= e^{-\frac{1}{x_1^3}} \left\{ \frac{2}{x_1^6} - \frac{3}{x_1^4} \right\} + \frac{1}{x_1^6} e^{-\frac{1}{x_1^3}} \\ &= e^{-\frac{1}{x_1^3}} \left\{ \frac{3}{x_1^6} - \frac{3}{x_1^4} \right\} \end{aligned}$$

D'où

$$B(x_1, x_2) = \frac{3 - 3x_2^2}{\lambda^2}$$

Posons :

$$A(\lambda) = \sup_{(x_1, x_2) \in C_\lambda} A(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad B(\lambda) = \inf_{(x_1, x_2) \in C_\lambda} B(x_1, x_2)$$

Définissons la fonction V à partir de $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ comme dans le lemme E_3 et posons :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= V\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) & \text{si } x_1 \geq 0 \\ u(x_1, x_2) &= V\left(\frac{\lambda^2(0, x_2)}{2}\right) & \text{si } x_1 < 0. \end{aligned}$$

Puisque $v(\lambda) \rightarrow +\infty$ quand $\lambda \rightarrow 0$, on en déduit l'existence d'un voisinage V de l'origine tel que u est positive sur V . D'autre part, il est clair que :

$$\begin{aligned} Lu(x_1, x_2) &\leq u(x_1, x_2) & \text{si } x_1 \geq 0 \\ Lu(x_1, x_2) &= 0 \leq u(x_1, x_2) & \text{si } x_1 < 0 \end{aligned}$$

et

$$(x_1, x_2) \in V$$

On peut alors appliquer le lemme E_2 , à condition de surmonter la petite difficulté provenant du fait que u n'est pas de classe C_2 sur $\{x_1 = 0\}$. On y arrive facilement en appliquant la formule d'Itô généralisée, qui fait intervenir le temps local en 0 de la première composante du processus (Voir 2). On a alors :

$$u(x_1, x_2) = +\infty \quad \text{si } (x_1, x_2) \in D$$

et cela prouve le résultat annoncé dans cette remarque.

REMARQUE 4. — Les résultats obtenus pour $n = 2$ s'étendent sans difficulté au cas $n \geq 2$. On obtient :

THÉORÈME 6. — Soit $X_1, X_2, \dots, X_p$, p champs de vecteurs analytiques localement transverses sur $\mathbb{R}^n$. Soit $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p X_i^2$. Pour que l'origine soit polaire pour la diffusion associée à L , il faut et il suffit que :

$$\dim \mathcal{L}(X_1, \dots, X_p)(0) \geq 2.$$

REMARQUE 5. — Soient ici p champs analytiques $X_1, \dots, X_p$ localement transverses sur $\mathbb{R}^n$. ($n \geq 2$). Supposons que $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_p)(x)$ soit de rang n pour tout x de $\mathbb{R}^n$. Bony ((3), p. 14) montre que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

il existe un ouvert W contenant x et une fonction $g(x, y)$ positive, intégrable

sur $W \times W$, de classe C_∞ en dehors de la diagonale, et telle que, pour tout $y \in W$:

$$E_y \int_0^{\sigma_w} (X_s) ds = \int_W g(y, x) f(x) dx$$

(f , borélienne bornée, σ_w , temps de sortie de W).

Montrons que la fonction $g_y : x \rightarrow g(x, y)$ possède un pôle au point y , c'est-à-dire n'est pas prolongeable en une fonction continue finie sur W . Raisonnons par l'absurde. Puisque $Lg_y = -S_y$, on a en particulier :

$$Lg_y = 0 \quad \text{sur } W \setminus \{y\}.$$

Un lemme analogue au lemme E_2 (voir 1, p. 58) prouverait alors que y n'est pas un point polaire, ce qui est en contradiction avec le théorème 6.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BONAMI, N. KAROUI, H. REINHARD et B. ROYNETTE, Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. II, n° 1, 1971, p. 31 à 80.
- [2] A. BONAMI, N. KAROUI, H. REINHARD et B. ROYNETTE, Une généralisation de la formule d'Itô. *C. R. Acad. Sci.*, 1971.
- [3] J. M. BONY, Principe du Maximum et Inégalités de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Séminaire Brelot, Choquet, Deny, 12^e année, 1967-1968, n° 10.
- [4] J. BRETAGNOLLE, Résultats de Kesten sur les p. a. i. Séminaire de Probabilités V. Université de Strasbourg, Springer Verlag, p. 21.
- [5] M. DERRIDI, Sur une classe d'opérateurs différentiels hypo-elliptiques à coefficients analytiques. École Polytechnique. Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1970-1971, Exp. n° 12.
- [6] E. B. DYNKIN, *Markov Process*, Vol. 1 et 2. Springer Verlag.
- [7] H. P. MCKEAN, *Stochastic Integrals*. Academic Press, New York, London, 1969.
- [8] T. NAGANO, Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie Algebras. *Journal of Math. Soc. of Japon*, t. 18, 1966, p. 398-404.
- [9] M. PINSKY, *A note on degenerate diffusion processes. Theory of probabilities and its applications*, 1970.
- [10] B. ROYNETTE, Sur les processus de diffusion de dimension 2. *A paraître (Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie)*.
- [11] D. W. STROOCK and S. R. S. VARADHAN, Diffusion processes with continuous coefficients I. *Communications in Pure and applied mathematics*, Vol. XXII, 1969, p. 349 à 400.

(Manuscrit reçu le 10 avril 1973).