ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

YVES DERRIENNIC

Sur la frontière de Martin des processus de Markov à temps discret

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 3 (1973), p. 233-258
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_3_233_0>

© Gauthier-Villars, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 3, 1973, p. 233-258. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur la frontière de Martin des processus de Markov à temps discret

par

Yves DERRIENNIC (*)
(Université de Rennes)

SUMMARY. — This paper is an attempt to generalize to general Markov processes with discrete time the notion of Martin boundary of Markov chains given by J. L. Doob and G. A. Hunt (by chain, we mean a Markov process defined on a discrete state space). A first generalisation rests upon a result, proved with ergodic methods, that contains the identification of the Chacon-Ornstein limit and Doob's theorem of convergence of the paths in case of a transient Markov chain. A second generalisation uses Feller's boundary and an extension of an idea of J. Feldman. The definition of the Martin boundary, given by M. A. Akcoglu and R. W. Sharpe for an abstract Markov operator, is also discussed.

1. INTRODUCTION

La frontière de Martin a été construite pour une chaîne de Markov transitoire, d'abord par J.-L. Doob (cf. [*7*]) et ensuite par G. A. Hunt et J. Neveu (cf. [*13*] [*17*]). Cet article est consacré à l'extension de cette notion et des résultats qui s'y rattachent au cas d'un processus de Markov défini sur un espace d'états plus général.

(*) L'auteur remercie le Professeur A. BRUNEL pour ses encouragements et ses conseils durant la préparation de ce travail.

Dans la partie I, on prouve un résultat, de type ergodique, qui contient à la fois le théorème d'identification de la limite des moyennes ergodiques, prouvé par Chacon (cf. [*5*]), et le théorème de convergence des trajectoires vers la frontière de Martin dans le cas d'une chaîne transitoire.

Dans la partie II, on bâtit sur ce résultat une généralisation naturelle de la construction de la frontière donnée par G. A. Hunt. Pour cela, on suppose l'espace des états localement compact à base dénombrable, et on fait certaines hypothèses de régularité sur le processus.

Dans la partie III, qui est divisée en quatre paragraphes, on montre que la définition de la frontière de Martin donnée par M. A. Akcoglu et R. W. Sharpe (cf. [*2*]), pour un opérateur markovien abstrait, n'est pas la définition convenable. Néanmoins, en utilisant une modification de leurs arguments et en généralisant une idée de J. Feldman (cf. [*11*]), on montre que la frontière peut être définie sans utiliser les hypothèses de régularité faites dans la partie II. Dans cette partie, la frontière de Feller (cf. [*12*]) joue un rôle important.

2. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Les données de base sont un espace de probabilité $(E, \mathscr{E}, m)$ et une probabilité de transition de cet espace dans lui-même, $P(x, B)$, non singulière par rapport à m. Un opérateur markovien T est induit par P sur $L^1(E, \mathscr{E}, m)$: si $f \in L^1(E, \mathscr{E}, m)$ alors

$$Tf = \frac{d(fm)P}{dm}$$

(P agissant à droite sur les mesures et $(f.m)$ désignant la mesure de densité f par rapport à m). Son transposé, agissant sur $L^\infty(E, \mathscr{E}, m)$ est noté T^*.

Le processus de Markov canonique, associé à ces données, est constitué par :

— l'espace produit $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu produit $\mathscr{F}$;
— les variables aléatoires coordonnées $X_0 \ldots X_n \ldots$ de Ω dans E ;
— les mesures de probabilité P_x définies sur $(\Omega, \mathscr{F})$ $(x \in E)$;
— la mesure de probabilité P_m définie sur $(\Omega, \mathscr{F})$ par

$$P_m(.) = \int_E P_x(.)dm(x)$$

L'opérateur de translation t est la transformation ponctuelle, $\mathscr{F}$-mesurable, définie sur Ω par :

$$X_{n+1}(\omega) = X_n(t\omega).$$

Une variable aléatoire réelle Y, définie sur $(\Omega, \mathscr{F})$, est dite stationnaire si $Y \circ t = Y$. Un événement $S \in \mathscr{F}$ est dit stationnaire si son indicatrice est une variable aléatoire stationnaire. Les événements stationnaires forment une sous-tribu de $\mathscr{F}$ notée $\mathscr{S}$; la mesurabilité par rapport à $\mathscr{S}$ caractérise les variables aléatoires stationnaires.

Dans la suite, quand cela ne présentera pas d'inconvénient, on identifiera les fonctions $\mathscr{E}$-mesurables et leurs classes d'équivalence par rapport à m. Par exemple, on écrira pour $g \in L^\infty$

$$T^*g(x) = \int_\Omega g \circ X_1 dP_x \qquad m \text{ p. p.}$$

En effet, si $g = g'$ m p. p., alors en vertu de la non-singularité de P, on a :

$$g \circ X_1 = g' \circ X_1 P_x \qquad \text{p. s.}$$

sur Ω pour m presque tout x.

Les opérateurs T et T* se prolongent par continuité séquentielle à l'espace des fonctions $\mathscr{E}$-mesurables positives. Une fonction f, bornée ou positive, est dite harmonique si elle vérifie l'équation $T^*f = f$. Les fonctions harmoniques bornées forment un sous-espace de Banach de L^∞, noté H.

PROPOSITION 0. — La formule

$$g(x) = \int_\Omega Y(\omega) P_x(d\omega) \qquad m \text{ p. p.}$$

définit un isomorphisme positif isométrique entre les espaces de Banach H et $L^\infty(\Omega, \mathscr{S}, P_m)$; de plus, la suite $g \circ X_n$ converge P_m p. s. vers Y et

$$\int_E g dm = \int_\Omega Y dP_m.$$

Pour la démonstration de ces résultats, on renvoie à [*16*].

Dans la suite, on considérera aussi le sous-ensemble A de $L^\infty(E, \mathscr{E}, m)$ formé des fonctions f telles que :

$$\lim_n f \circ X_n \text{ existe } P_m \text{ p. s. sur } \Omega.$$

Il est clair que A est une sous-algèbre de Banach de L^∞ contenant H.

De plus, la proposition 0 permet de définir l'application $\Pi : A \to H$ par :

$$\Pi f(x) = \int_\Omega (\lim f \circ X_n) dP_x \qquad m \text{ p. p.}$$

Celle-ci possède les propriétés :

— Π est une projection positive ; $\Pi 1 = 1$,

— $\Pi f = \lim_n (T^*)^n f \quad (f \in A)$,

— Π est un homomorphisme d'algèbre, à condition de munir H de la structure d'algèbre déduite de celle de $L^\infty(\Omega, \mathscr{S}, P_m)$ par l'isomorphisme de la proposition 0 ; le produit de deux éléments f et g de H s'écrit dans ce cas $\Pi(f.g)$.

Ceci nous permettra de considérer désormais H comme une algèbre de Banach. Cette structure d'algèbre sur H a déjà été introduite dans [*2*], par une autre voie.

Enfin, on notera Ψ_B le potentiel d'équilibre relativement à T^* de tout ensemble $B \in \mathscr{E}$. Autrement dit

$$\Psi_B(x) = P_x\left[\bigcup_{n>0} (X_n \in B)\right] \qquad m \text{ p. p.}$$

On notera aussi $\Delta(B)$ l'événement $\lim_n \sup (X_n \in B)$ et

$$\Theta_B(x) = P_x(\Delta(B)) \qquad m \text{ p. p. ;}$$

Θ_B est la partie harmonique de Ψ_B.

I. — Étude des limites ergodiques

Le théorème ergodique de Chacon et Ornstein (cf. [*6*]) affirme que, étant donnés $f \in L^1$ et $g \in L^1_+$, la limite de

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} T^i f}{\sum_{i=0}^{n} T^i g}$$

existe et est finie m p. p. sur $\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0 \right\}$ quand $n \to +\infty$.

Dans cette partie, on étudie le comportement des trajectoires du processus « le long » de ces limites.

PROPOSITION I.1. — Soit $f \in L^1_+$. L'ensemble $B = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i f > 0 \right\}$ est le plus petit ensemble contenant $\{ f > 0 \}$ et vérifiant $T^* 1_B \geqslant 1_B$ (autrement dit B est le plus petit ensemble « fermé » contenant $\{ f > 0 \}$).

Démonstration. — On peut écrire :

$$0 = \int_{B^c} \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i f \right) dm = \int f . \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^{*i} 1_{B^c} \right) dm \geqslant \int f . \Psi_{B^c} dm$$

L'inégalité $T^* \Psi_{B^c} \leqslant \Psi_{B^c}$ implique

$$0 = \int f . T^{*i} \Psi_{B^c} dm = \int T^i f . \Psi_{B^c} dm \qquad \text{pour tout } i, \text{ d'où } \Psi_{B^c} = 1_{B^c}.$$

Ceci prouve que B est fermé.

D'autre part, soit D un ensemble fermé contenant $\{ f > 0 \}$. On a $\Psi_{D^c} = 1_{D^c}$, d'où :

$$0 = \int f . \Psi_{D^c} dm > \int \Psi_{D^c} . T^i f dm \qquad \text{pour tout } i.$$

Ceci prouve $D^c \subset \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i f = 0 \right\}$ donc $D \supset B$. ■

Appliquée au cas conservatif, ce résultat donne le résultat classique : « $\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i f > 0 \right\}$ est le plus petit ensemble invariant contenant $\{ f > 0 \}$ ».

THÉORÈME I.1. — Reprenons les notations de la proposition précédente. Alors :

sur $\Delta(B)$ on a $\lim_n \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i f \right) \circ X_n = +\infty \qquad P_m$ p. s.

sur $[\Delta(B)]^c$ on a $\lim_n \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i f \right) \circ X_n = 0 \qquad P_m$ p. s.

Démonstration. — Comme B est fermé, on a $\Delta(B)^c = \Delta(B^c)$. Sur cet ensemble, la limite étudiée est évidemment nulle.

Pour tout réel $\alpha > 0$, posons $B_\alpha = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i f \leqslant \alpha \right\} \cap B$.

On a :

$$\int_{B_\alpha} \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i f \right) dm = \int f(x) \left(\sum_{i=0}^{\infty} P_x[X_i \in B_\alpha] \right) m(dx) < \infty$$

Ceci implique $\Theta_{B_\alpha} = 0$ m p. p. sur $\{ f > 0 \}$. En vertu de l'harmonicité de Θ_{B_α}, $\{\Theta_{B_\alpha} = 0\}$ est un ensemble fermé.

La proposition I.1 implique alors $\Theta_{B_\alpha} = 0$ m p. p. sur B, d'où $\Theta_{B_\alpha} = 0$ m p. p. Ceci donne :

$$\liminf_n \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i f \right) \circ X_n \geqslant \alpha \qquad P_m \text{ p. s. sur } \Delta(B)$$

Comme ceci est valable pour tout α, le théorème est démontré. ■

Appliqué au cas conservatif, ce résultat donne le résultat classique :

$$\ll \sum_{i=0}^{\infty} T^i f = 0 \text{ ou } +\infty \qquad m \text{ p. p. } \gg.$$

LEMME I.1. — L'opérateur de translation t est une transformation non singulière de $(\Omega, \mathscr{F}, P_m)$. Si W désigne l'opérateur associé, défini sur $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P_m)$, alors $W^i(f \circ X_0) = (T^i f) \circ X_0$ pour tout entier i et tout $f \in L^1(E, \mathscr{E}, m)$.

Démonstration. — La non singularité de t est une simple conséquence de la non singularité de P. Pour le voir, il suffit d'appliquer la propriété de Markov.

Pour prouver la formule dans le cas $i = 1$, il suffit de prouver pour un cylindre $[X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n]$ élément de $\mathscr{F}$:

$$\int_{[X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n]} W(f \circ X_0) dP_m = \int_{[X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n]} ((Tf) \circ X_0) dP_m$$

Comme W^* vérifie $W^*(Z) = Z \circ t$ pour tout $Z \in L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, P_m)$ on a, en fait :

$$\begin{aligned}\int_{[X_0\in B_0,\ldots,X_n\in B_n]} W(f\circ X_0)dP_m &= \int_{[X_1\in B_0,\ldots,X_{n+1}\in B_n]} f\circ X_0 dP_m \\ &= \int f(x_0)m(dx_0)\int_{B_0} P(x_0, dx_1)\ldots\int_{B_n} P(x_n, dx_{n+1}) \\ &= \int_{B_0} Tf(x_0)m(dx_0)\int_{B_1} P(x_0, dx_1)\ldots\int_{B_n} P(x_{n-1}, dx_n) \\ &= \int_{[X_0\in B_0,\ldots,X_n\in B_n]} (Tf)\circ X_0 dP_m\end{aligned}$$

Par récurrence, la formule s'étend alors à tout entier i. ■

LEMME I.2. — Si $Z\in L^1(\Omega, \mathscr{S}, P_m)$ alors $W^i(Z) = Z.W^i(1)$ pour tout entier i.

Démonstration. — On a $Z\circ t^i = Z$, donc pour tout $F\in\mathscr{F}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_F W^i(Z)dP_m &= \int Z(1_F\circ t^i)dP_m = (Z.1^F)\circ t^i dP_m \\ &= \int_F Z(W^i 1)dP_m. \ ■\end{aligned}$$

LEMME I.3. — Soit $f\in L^1_+(E, \mathscr{E}, m)$. Alors

$$\lim_n t^{-n}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} W^i(f\circ X_0) > 0\right\} = \{E_m[f\circ X_0 \mid \mathscr{S}] > 0\}.$$

(Par $E_m[f\circ X_0 \mid \mathscr{S}]$, on désigne l'espérance conditionnelle de $f\circ X_0$ par rapport à la tribu $\mathscr{S}$ et à la mesure P_m).

Démonstration. — En appliquant la proposition I.1 à l'opérateur W, on voit que la suite $t^{-n}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} W^i(f\circ X_0) > 0\right\}$ est croissante, et que sa limite est le plus petit événement stationnaire contenant $\{f\circ X_0 > 0\}$. Le résultat s'en déduit aussitôt. ■

Dans la suite, pour alléger, on notera :

$$(f/g)_T = \lim_n \frac{\sum_{i=0}^{n} T^i f}{\sum_{i=0}^{n} T^i g}$$

THÉORÈME I.2. — Soient $f \in L^1(E, \mathscr{E}, m)$, $g \in L^1_+(E, \mathscr{E}, m)$ et β le temps d'entrée dans $\left\{ \sum_{i=0} T^i g > 0 \right\}$. La suite $(f/g)_T \circ X_{\beta+n}$ converge, quand $n \to +\infty$, P_m p. s. sur $[\beta < \infty]$, vers $\dfrac{E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}]}{E_m[g \circ X_0 \mid \mathscr{S}]}$.

Démonstration. — Comme l'ensemble $\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0 \right\}$ est fermé et que

$$[\beta < \infty] = \bigcup_{n>0} \left[X_n \in \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0 \right\} \right]$$

la suite considérée est bien définie. Sans perdre de généralité, on peut supposer $f \geqslant 0$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $g = 1$. D'après le lemme I.1, le résultat se ramène à :

$$\lim_n (f \circ X_0/1)_W \circ t^n = E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}] \qquad P_m \text{ p. s.}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $F = \{ (f \circ X_0/1)_W \geqslant (1 + \varepsilon) E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}] \}$.

D'après les lemmes I.3 et I.2, on a :

$$F = \{ E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}] > 0 \} \cap \{ (f \circ X_0/E_m(f \circ X_0 \mid \mathscr{S}))_W > 1 + \varepsilon \}$$

Soit $G = F \cap (\limsup_n t^{-n}(F))$. En appliquant le lemme ergodique maximal de Brunel (cf. [*1*] [*4*]) à l'opérateur W, on obtient :

$$\int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} t^{-n}G} f \circ X_0 dP_m \geqslant (1 + \varepsilon) \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} t^{-n}G} E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}] dP_m$$

Comme $\bigcup_{n=0}^{\infty} t^{-n}G = \limsup_n t^{-n}F$ et que cet événement est stationnaire, on déduit de la définition de l'espérance conditionnelle l'égalité $P_m(\limsup_n t^{-n}F) = 0$. Ce raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$\limsup_n (f/1)_T \circ X_n \leqslant E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}] \qquad P_m \text{ p. s.}$$

Par le même raisonnement, on prouve que $P_m[\limsup_n t^{-n}F'] = 0$ où

$$F' = \{ (f \circ X_0/1)_W \leqslant (1 - \varepsilon) E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}] \}$$

et on trouve

$$\lim_n (f/1)_T \circ X_n = E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}] \qquad P_m \text{ p. s.}$$

On passe au cas général en utilisant :

d'une part $(f/g)_T = (f/1)_T(1/g)_T$ sur $\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} T^i g > 0 \right\}$

d'autre part $\{ E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}] > 0 \} = [\beta < \infty]$, ceci d'après le lemme I.3. ■

Ce théorème admet plusieurs corollaires importants. Le premier de ceux-ci énonce un résultat, presque équivalent au théorème, qui a été démontré dans [2] par une méthode différente.

COROLLAIRE I.1. — Si $g > 0$ m p. p. et si $(f/g)_T \in L^\infty(E, \mathscr{E}, m)$ alors $(f/g)_T \in A$ et, pour tout $h \in H$,

$$\int hfdm = \int g.\Pi[h(f/g)_T]dm.$$

Démonstration. — La première assertion est une conséquence immédiate du théorème I.2. La seconde résulte du calcul suivant, où Z désigne la variable aléatoire stationnaire associée à h par l'isomorphisme de la proposition 0 :

$$\int_E g.\Pi[h(f/g)_T]dm = \int_\Omega Z.(g \circ X_0) \frac{E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}]}{E_m[g \circ X_0 \mid \mathscr{S}]} dP_m$$

$$= \int_\Omega E_m[Z.(f \circ X_0) \mid \mathscr{S}]dP_m = \int_E f(x)m(dx) \int_\Omega Z(\omega)P_x(d\omega) = \int_E h.fdm. \quad ■$$

Appliqué au cas conservatif, le théorème donne la valeur de la limite de Chacon et Ornstein (cf. [5]).

COROLLAIRE I.2. — Si T est conservatif et si Σ désigne la tribu des invariants alors :

$$(f/g)_T = \frac{E[f \mid \Sigma]}{E[g \mid \Sigma]}$$

Démonstration. — Dans le cas conservatif, on a l'égalité A = H, et si $h \in H$ alors la variable aléatoire $h \circ X_0$ est stationnaire. Dans ce cas, le corollaire résulte de la formule évidente :

$$E[f \mid \Sigma] \circ X_0 = E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}]. \quad ■$$

Appliqué au cas où l'espace des états est discret et où T est dissipatif, le théorème I.2 donne le théorème classique de convergence du processus à la frontière (cf. [7] [13] [17]).

COROLLAIRE I.3. — Soient (E, $\mathscr{E}$) un espace discret et ν une mesure de probabilité telle que $0 < \sum_{i=0}^{\infty} \nu P^i < \infty$. Alors si

$$K(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_x P^i(y)}{\sum_{i=0}^{\infty} \nu P^i(y)},$$

la suite $K(x, X_n)$ converge P_ν p. s. pour tout $x \in E$.

(Par ε_x, on désigne la mesure de Dirac en x).

Démonstration. — Soit m une mesure de probabilité sur (E, $\mathscr{E}$) qui charge chaque point. Posons $g = \frac{d\nu}{dm}$. On a alors :

$$\frac{d(\nu P^i)}{dm} = T^i g \qquad \text{et} \qquad \frac{d(\varepsilon_x P^i)}{dm} = \frac{1}{m(x)} T^i 1_{\{x\}}$$

donc

$$K(x, y) = \frac{1}{m(x)} (1_{\{x\}}/g)_T(y) ;$$

il est manifeste alors que cet énoncé résulte du théorème. ■

II. — La frontière de Martin concrète

Le calcul qui vient d'être effectué montre qu'il est naturel de faire jouer le rôle des quotients des fonctions de Green par les limites de Chacon et Ornstein, afin d'obtenir une généralisation de la frontière de Martin.

Dans cette partie, on supposera désormais vérifiées les conditions suivantes :

a) E est un espace topologique localement compact à base dénombrable ; $\mathscr{E}$ est la tribu des boréliens ; m est une mesure de probabilité qui charge chaque ouvert.

b) T est dissipatif.

c) Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$ (espace des fonctions continues à support compact sur E), $\sum_{i=0}^{\infty} T^i f$ a un représentant continu.

Soit $\varphi \in L^1_+$ la densité par rapport à m de la mesure initiale du processus.

d) $\sum_{i=0}^{\infty} T^i \varphi$ a un représentant continu.

e) $\int \varphi dm = 1$ et pour tout compact F de E, il existe un réel $\alpha > 0$ et un entier l tels que

$$\sum_{i=0}^{l} T^i \varphi \geqslant \alpha \qquad \text{sur F.}$$

LEMME II.1. — Pour $f \in \mathscr{C}_k(E)$, $(f/\varphi)_T$ est bornée.

Démonstration. — On peut supposer $f \geqslant 0$. Soit F le support de f. Soient α et l les nombres associés à F par (*e*). On a :

$$f \leqslant \frac{\| f \|}{\alpha} \sum_{i=0}^{l} T^i \varphi$$

Comme

$$\sum_{j=0}^{n} T^j \left(\sum_{i=0}^{l} T^i \varphi \right) \leqslant l \left(\sum_{i=0}^{n+l} T^i \varphi \right)$$

et que

$$\lim_n T^n \left(\sum_{i=0}^{l} T^i \varphi \right) = 0$$

d'après (*b*), on obtient l'inégalité $(f/\varphi)_T < \frac{\| f \|}{\alpha} l$. ■

Désormais, on notera Kf le représentant continu de $(f/\varphi)_T$ donné par les hypothèses (*c*) et (*d*) pour chaque $f \in \mathscr{C}_k(E)$. Ce représentant est unique d'après (*a*).

DÉFINITION II.1. — Soit E* le complété de E par rapport à la structure uniforme la moins fine, compatible avec la topologie, et rendant unifor-

mément continues les fonctions Kf ($f \in \mathscr{C}_k(E)$). La frontière de Martin (concrète) du processus est l'espace $M = E^* - E$.

L'espace E^* est métrisable compact car, d'une part $\mathscr{C}_k(E)$ est séparable, d'autre part Kf est bornée pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$ d'après le lemme II.1. Comme E est ouvert dans E^*, M est aussi compact métrisable. Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, Kf se prolonge par continuité à E^* ; ce prolongement sera encore noté Kf.

La définition de la frontière de Martin donnée ici généralise celle donnée par Hunt dans le cas où E est discret (cf. [*13*]).

Le résultat fondamental est alors le suivant :

THÉORÈME II.1. — Le processus X_n converge (pour la topologie de E^*) vers une variable aléatoire X_∞ à valeurs dans M, P_m p. s. Si μ est la mesure sur M, image de $P_{(\varphi.m)}$ par X_∞, on a :

$$\int_E f dm = \int_M Kf d\mu \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{C}_k(E).$$

Démonstration. — Soit F un compact de E. D'après l'hypothèse (*d*) et le théorème I.1, le processus sort de F en un temps fini, P_m p. s. D'après le théorème I.2, la suite $Kf \circ X_n$ converge P_m p. s. pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$. Etant donnée la définition de E^*, il est clair, alors, que la suite X_n converge P_m p. s. vers une variable aléatoire X_∞ à valeurs dans M. La formule intégrale s'obtient à l'aide du théorème I.2 :

$$\int_M Kf d\mu = \int_\Omega Kf \circ X_\infty dP_{(\varphi.m)} = \int_\Omega \frac{E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}]}{E_m[\varphi \circ X_0 \mid \mathscr{S}]} (\varphi \circ X_0) dP_m$$
$$= \int_\Omega f \circ X_0 dP_m = \int_E f dm. \quad \blacksquare$$

La fonction harmonique 1 est donc représentée sur la frontière par la mesure μ.

Pour obtenir la représentation des autres fonctions harmoniques ($\varphi.m$)-intégrales, on utilise le procédé de relativisation (dû à Feller [*12*]). Rappelons rapidement en quoi consiste ce procédé.

Soit h une fonction harmonique positive telle que $\int h.\varphi dm = 1$. Le processus relativisé par h, a pour espace des états $E^h = \{ h > 0 \}$ (muni de la tribu induite par $\mathscr{E}$), et a une probabilité de transition P^h qui vérifie :

$$P^h(x, B) = \frac{1}{h(x)} \int_B h(y) P(x, dy) \qquad m \text{ p. p. sur } E^h$$

Comme $\int h\varphi dm = \int hT^i\varphi dm$ pour tout i, il résulte de (e) que h est localement m-intégrable. Donc $mP^h \ll m$. Soit alors T^h l'opérateur sur $L^1(E^h, m)$ associé à P^h. Il vérifie la formule :

$$hT^i(f) = (T^h)^i(fh)$$

pour tout entier i et tout f tel que $(fh) \in L^1(m)$, en vertu de l'harmonicité de h. En particulier, si $f \in \mathscr{C}_k(E)$, on a

$$1_{E^h}(f/\varphi)_T = (fh/\varphi h)_{T^h}$$

Comme la suite $(X_n \in E^h)$ est décroissante P_m p. s., on peut considérer que l'espace des trajectoires du processus relativisé est l'événement stationnaire $\bigcap_n (X_n \in E^h)$, que la mesure P_m^h est définie sur $(\Omega, \mathscr{F})$ et vérifie

$$P_m^h\left[\bigcap_n (X_n \in E^h)\right] = 1,$$

et que la tribu des événements stationnaires pour le processus relativisé est

$$\mathscr{S} \cap \left[\bigcap_n (X_n \in E^h)\right].$$

On peut alors énoncer le :

THÉORÈME II.2. — Le processus X_n converge vers une variable aléatoire X_∞ à valeurs dans M, P_m^h p. s. Si μ^h est la mesure sur M, image de $P^h_{(\varphi.h.m)}$ par X_∞, on a :

$$\int_E fhdm = \int_M Kfd\mu^h \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{C}_k(E).$$

Démonstration. — On a l'égalité

$$\sum_{i=0}^{\infty} (T^h)^i(\varphi h) = h\left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i\varphi\right).$$

Alors, comme h est localement intégrable, le processus sort de chaque compact en un temps fini $P^h_{(\varphi hm)}$ p. s. Ceci est encore vrai P_m^h p. s. car, d'après l'hypothèse (e), les mesures $P^h_{(\varphi hm)}$ et P_m^h sont équivalentes en restriction à $\mathscr{S}$. En appliquant le théorème I.2 à l'opérateur T^h et l'égalité

$$1_{E^h}(f/\varphi)_T = (fh/\varphi h)_{T^h},$$

on voit que la suite $Kf \circ X_n$ converge P_m^h p. s. pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$. Ceci prouve la convergence de X_n vers X_∞. La formule intégrale est encore une simple application du théorème I.2 :

$$\int_M Kf d\mu^h = \int_\Omega Kf \circ X_\infty dP^h_{(\varphi hm)}$$
$$= \int_\Omega \frac{E_m^h[(fh) \circ X_0 \mid \mathscr{S}]}{E_m^h[(\varphi h) \circ X_0 \mid \mathscr{S}]} (\varphi h) \circ X_0 dP_m^h = \int_E fhdm. \quad \blacksquare$$

La correspondance $h \to \mu^h$ ainsi définie se prolonge manifestement en un homomorphisme positif de l'espace vectoriel des harmoniques (φm)-intégrables dans celui des mesures finies sur M ; de plus on a $\int h\varphi dm = \mu^h(M)$. Mais, malheureusement, ceci ne donne pas l'unicité de la représentation. (Dans [*3*], on peut trouver un système d'hypothèses, plus fort que le nôtre, qui implique cette unicité).

Pour terminer cette partie, énonçons quelques résultats supplémentaires, qui généralisent des résultats classiques dans le cas discret (cf. [*13*] [*17*] [*14*]).

THÉORÈME II.3. — Soit h une fonction harmonique (φm)-intégrable. Soit $\mu^h = u.\mu + \mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ^h par rapport à μ. Alors la suite $h \circ X_n$ converge vers $u \circ X_\infty$ P_m p. s.

Démonstration. — On peut supposer $h \geqslant 0$.

Étudions d'abord le cas où $\mu_s = 0$. Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, on a :

$$\int_E fhdm = \int_\Omega (f \circ X_0)(h \circ X_0) dP_m = \int_M Kf d\mu^h$$
$$= \int_\Omega \frac{E_m[f \circ X_0 \mid \mathscr{S}]}{E_m[\varphi \circ X_0 \mid \mathscr{S}]} (u \circ X_\infty) dP_{(\varphi m)} = \int_\Omega (f \circ X_0)(u \circ X_\infty) dP_m.$$

L'égalité

$$\int_\Omega (f \circ X_0)(h \circ X_0) dP_m = \int_\Omega (f \circ X_0)(u \circ X_\infty) dP_m$$

est encore valable si on remplace f par $f(T^i\varphi)$ pour tout entier i (car, d'après (d), $T^i\varphi$ est bornée sur les compacts).

Alors, d'après le lemme I.1, on a :

$$\int (f \circ X_n)(h \circ X_n) dP_{(\varphi m)} = \int (f.T^n\varphi) \circ X_0 (u \circ X_\infty) dP_m = \int (f \circ X_n)(u \circ X_\infty) dP_{(\varphi m)}$$

Ceci prouve $E_{(\varphi m)}[u \circ X_\infty \mid X_n] = h \circ X_n$. Comme

$$E_{(\varphi m)}[u \circ X_\infty \mid X_n \ldots X_0] = E_{(\varphi m)}[u \circ X_\infty \mid X_n],$$

le théorème des martingales donne $\lim_n h \circ X_n = u \circ X_\infty$ $P_{(\varphi m)}$-p. s. Cette égalité est aussi vraie P_m p. s. en vertu de (*e*).

Supposons maintenant $u = 0$. La fonction harmonique $\Pi\left(\frac{h}{h+1}\right)$, qui est inférieure à h et à 1, possède une mesure de représentation qui est inférieure à μ^h et à μ. Comme ces deux mesures sont étrangères, on obtient $\Pi\left(\frac{h}{h+1}\right) = 0$. Cette égalité implique $\lim_n h \circ X_n = 0$ P_m p. s.

Pour achever la démonstration, il reste à prouver que pour tout $u \in L^1(M, \mu)$, il existe h harmonique, (φm)-intégrable, telle que $\mu^h = u.\mu$. Soit $u \in L^1(M, \mu)$. Il est clair que $Z = u \circ X_\infty$ est une variable aléatoire stationnaire telle que

$$\int_\Omega Z dP_{(\varphi m)} = \int_M u d\mu.$$

La fonction h définie par $h(x) = \int_\Omega Z dP_x$ m p. p. est donc harmonique, (φm)- intégrable. L'égalité $\mu^h = u.\mu$ résulte de la formule

$$\int_E f h dm = \int_\Omega (f \circ X_0) Z dP_m$$

valable pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$. ■

COROLLAIRE II.1. — L'application $u \to u \circ X_\infty$ définit un isomorphisme positif isométrique de $L^1(M, \mu)$ sur $L^1(\Omega, \mathscr{S}, P_{(\varphi m)})$.

COROLLAIRE II.2. — L'application $h \to \frac{d\mu^h}{d\mu}$ définit un isomorphisme d'algèbre, positif, isométrique de H sur $L^\infty(M, \mu)$.

Remarquons que les résultats de ce paragraphe sont encore valides si l'hypothèse (*b*) est remplacée par :

(*b**) « La partie conservative de T est un point isolé ». Il faut alors considérer que la partie conservative est un point isolé dans la frontière de Martin. On a recours à cet artifice pour construire la frontière de Martin associée à un noyau sous-markovien (cf. [*17*]).

III. — La frontière de Martin abstraite

Dans cette partie, nous allons abandonner les hypothèses de régularité du processus faites dans la partie II.

Nous allons montrer qu'il est encore possible de construire un espace, que nous appellerons frontière de Martin abstraite, sur lequel toutes les fonctions harmoniques sont représentées par des mesures.

Désormais, on ne suppose vérifiées que les hypothèses (*a*) et (*e*) de la partie II.

Il est d'abord nécessaire de construire la frontière de Feller totale. C'est l'objet du paragraphe qui suit.

III.1. — La frontière de Feller totale

Définition III.1.1. — La frontière de Feller du processus est l'espace Stonien (cf. [*9*]) associé à l'algèbre de Boole complète des classes (relativement à la mesure P_m) d'événements stationnaires. Cet espace sera noté Φ (cf. [*12*]).

Suivant cette définition, et en tenant compte de la proposition 0, il est clair qu'il existe un isomorphisme d'algèbre J, positif, isométrique, entre H et $\mathscr{C}(\Phi)$ (l'espace des fonctions continues sur Φ).

Etant donnée une fonction harmonique h positive (φm)-intégrable, cette construction est encore possible pour le processus relativisé par h (qui a été défini dans la partie II).

Désormais, on notera A^h, H^h, Π^h, Φ^h, J^h les correspondants de A, H, Π, Φ, J pour le processus relativisé.

La frontière de Feller totale (cf. [*12*]) sera construite en recollant tous les espaces Φ^h ; le but du recollement est d'identifier les parties de Φ^{h_0} et Φ^{h_1} qui représentent les fonctions harmoniques comparables à la fois à h_0 et h_1. Il est nécessaire de préciser cela.

Lemme III.1.1. — $A^{h+1} \subset A$; si $f \in A^{h+1}$, on a :

$$\Pi^{h+1}\left(\frac{f}{h+1}\right) = \frac{1}{h+1}\Pi(f) \quad \text{et} \quad \Pi(\Pi^{h+1}(f)) = \Pi(f).$$

Démonstration. — L'inégalité $P_m^{h+1} \geqslant P_m$ résulte de la définition du processus relativisé. Elle implique $A^{h+1} \subset A$. Si $f \in A^{h+1}$ alors $\dfrac{f}{h+1} \in A^{h+1}$ et

$$\Pi^{h+1}\left(\frac{f}{h+1}\right) = \lim_n (T^{h+1})^{*n}\left(\frac{f}{h+1}\right) = \frac{1}{h+1}\lim_n T^{*n}f = \frac{1}{h+1}\Pi(f).$$

Enfin, si $f \in A^{h+1}$, $\Pi^{h+1}(f)$ est la fonction harmonique pour $(T^{h+1})^*$ associée à la classe pour P_m^{h+1} de la variable aléatoire stationnaire

$$Z = \lim_n f \circ X_n \,;\, \Pi(\Pi^{h+1}(f))$$

est la fonction harmonique pour T^* associée à la classe de Z pour P_m. Donc $\Pi(\Pi^{h+1}(f)) = \Pi(f)$. ■

LEMME III.1.2. — $\Pi : H^{h+1} \to H$ *est un homomorphisme d'algèbre de Banach, positif, surjectif.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, Π est bien défini sur H^{h+1}. Etant donnés $f, g \in H^{h+1}$, on a

$$\Pi(\Pi^{h+1}(fg)) = \Pi(fg) = \Pi(\Pi(f)\Pi(g))$$

donc Π est multiplicatif. Etant donné $f \in H$, soit Z la variable aléatoire stationnaire qui lui est associée ; à la classe de Z par rapport à P_m^{h+1} est associé un élément de H^{h+1} dont l'image par Π est f. Donc Π est surjectif. Les autres propriétés sont évidentes. ■

Ce lemme implique qu'il existe une injection continue $q : \Phi \to \Phi^{h+1}$ qui vérifie, si $f \in H^{h+1}$,

$$J(\Pi(f)) = J^{h+1}(f) \circ q$$

(cf. [9], p. 278),

On a de plus :

LEMME III.1.3. — $q(\Phi)$ *est ouvert et fermé dans* Φ^{h+1}.

Démonstration. — Pour $f \in H^{h+1}$, les égalités $\Pi(f) = 0$ et $J^{h+1}(f) \circ q = 0$ sont équivalentes. Comme, d'après le lemme III.1.1, $\Pi(f) = 0$ si et seulement si $\Pi^{h+1}\left(\frac{f}{h+1}\right) = 0$, $q(\Phi)$ est identique à l'adhérence de l'ouvert $\left\{ J^{h+1}\left(\frac{1}{h+1}\right) > 0 \right\}$. Le lemme résulte alors du fait que Φ^{h+1} est Stonien. ■

Tout ceci reste valable si on remplace 1 par une fonction harmonique positive (φm)-intégrable. On note $q_{h_0}^{h_0+h_1}$ l'injection continue de Φ^{h_0} dans $\Phi^{h_0+h_1}$. Sur l'espace $\sum_h \Phi^h$ (réunion disjointe des Φ^h), la relation définie entre x et y si :

$$q_{h_0}^{h_0+h_1}(x) = q_{h_1}^{h_0+h_1}(y) \qquad (x \in \Phi^{h_0},\ y \in \Phi^{h_1})$$

est une relation d'équivalence. La réflexivité résulte de l'injectivité des fonctions q, la symétrie est évidente, et la transitivité résulte à la fois de l'injectivité et de la relation facile à vérifier :

$$q_{h_0}^{h_0+h_1+h_2} = q_{h_0+h_1}^{h_0+h_1+h_2} \circ q_{h_0}^{h_0+h_1}$$

DÉFINITION III.1.2. — La frontière de Feller totale, qui sera notée $\hat{\Phi}$, est l'espace quotient de $\sum_h \Phi^h$ par la relation décrite ci-dessus.

La méthode employée ici pour construire cet espace n'est pas la méthode originale de Feller (cf. [*12*]). Mais la construction faite plus haut sera utile dans la suite.

THÉORÈME III.1.1. — *L'espace $\hat{\Phi}$ est séparé. Si ξ désigne la projection canonique de $\sum_h \Phi^h$ sur $\hat{\Phi}$, alors $\xi(\Phi^h)$ est ouvert et fermé dans $\hat{\Phi}$ (pour tout h harmonique, positive, (φm)-intégrable).*

Démonstration. — D'après le lemme III.1.3, le saturé de Φ^h, pour la relation, est ouvert et fermé dans $\sum_h \Phi^h$. Donc $\xi(\Phi^h)$ est ouvert et fermé dans $\hat{\Phi}$. De plus, deux ouverts disjoints de Φ^h ont encore des saturés ouverts et disjoints, donc $\hat{\Phi}$ est séparé. ■

Notons que, comme ξ est injectif en restriction à Φ^h, $\xi(\Phi^h)$ et Φ^h sont homéomorphes. Notons aussi que pour toute partie U ouverte et compacte de $\hat{\Phi}$ il existe h harmonique positive (φm)-intégrable telle que $\xi(\Phi^h) = \mathrm{U}$.

III.2. — LA FRONTIÈRE DE MARTIN ABSTRAITE

Nous allons d'abord construire la partie de la frontière qui donne la représentation des fonctions harmoniques bornées. Nous l'appellerons la partie de la frontière atteinte par le processus de loi initiale (φm).

Pour chaque $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mathscr{E}, m)$ soit $(\overline{fm})$ la mesure sur Φ définie par :

$$\int_\Phi g d(\overline{fm}) = \int_\mathrm{E} \mathrm{J}^{-1}(g).f dm \qquad (g \in \mathscr{C}(\Phi)).$$

Si $f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$, il existe un réel $\beta > 0$ tel que

$$(\overline{|f|.m}) \leqslant \beta(\overline{\varphi m})$$

en vertu de l'hypothèse (e). Il résulte alors du caractère Stonien de Φ qu'il

existe un représentant continu sur Φ de la densité $\dfrac{d(\overline{fm})}{d(\overline{\varphi m})}$. Désormais, ce représentant sera noté $\mathrm{N}f$.

DÉFINITION III.2.1. — La « partie atteinte » de la frontière de Martin (abstraite), notée Γ, est l'espace quotient de Φ par rapport aux fonctions $\mathrm{N}f$ ($f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$). i. e. par rapport à la relation d'équivalence définie sur Φ par $x \sim y$ si $\mathrm{N}f(x) = \mathrm{N}f(y)$ pour tout $f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$. La projection canonique de Φ sur Γ est notée ρ.

Il est clair que Γ est un espace séparé compact. Mais de plus, en vertu des hypothèses (a) et (e), la sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(\Phi)$ engendrée par les fonctions 1 et $\mathrm{N}f$ ($f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$) est séparable. Donc Γ est métrisable.

Désormais, λ désignera la mesure $\rho(\overline{\varphi m})$ sur Γ (mesure image par ρ de la mesure $(\overline{\varphi m})$). Le théorème donnant la représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées sera la conséquence des lemmes suivants.

LEMME III.2.1. — *L'application* $g \to \tau(g) = \dfrac{d\rho(\overline{gm})}{d\lambda}$ *de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mathscr{E}, m)$ *dans* $\mathrm{L}^1(\Gamma, \lambda)$ *est une contraction positive qui vérifie :*

$\tau(g) = \tau(\mathrm{T}g)$ *pour tout* $g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mathscr{E}, m)$
$\tau(f) \circ \rho = \mathrm{N}f$ $\overline{m}$ p. p. *sur* Φ *pour tout* $f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$.

Démonstration. — Pour tout $g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mathscr{E}, m)$ la mesure $(\overline{gm})$ est absolument continue par rapport à $\overline{m}$, donc aussi par rapport à $(\overline{\varphi m})$, car l'hypothèse (e) implique que $\overline{m}$ et $(\overline{\varphi m})$ sont équivalentes. Ceci prouve que $\tau(g) \in \mathrm{L}^1(\Gamma, \lambda)$; τ est manifestement linéaire positive ; τ est une contraction car :

$$\int_\Gamma \tau(g) d\lambda = \int_\Phi d(\overline{gm}) = \int_\mathrm{E} g dm$$

La première propriété résulte de l'égalité des mesures $(\overline{gm})$ et $(\overline{\mathrm{T}g.m})$. La seconde résulte de la définition de Γ. ■

Remarquons que ceci n'implique pas que τ est borné pour la norme $\| \quad \|_\infty$.

LEMME III.2.2. — *Etant donné* $u \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma, \lambda)$, *l'application*

$$\mathrm{B} \to \int_\Gamma \tau(1_\mathrm{B}).u d\lambda$$

définit sur $\mathscr{E}$ *une mesure dont la densité par rapport à* m *est bornée. Si* $\mathrm{R}(u)$ *désigne cette densité, l'application* R *est une contraction positive de* $\mathrm{L}^\infty(\Gamma, \lambda)$ *dans* H.

Démonstration. — On peut supposer u positive. D'après le lemme III.2.1, $\int_\Gamma \tau(1_B)u d\lambda$ est une fonction d'ensemble positive additive telle que :

$$\int_\Gamma \tau(1_B)u d\lambda \leqslant \| u \|_\infty \int_\Gamma \tau(1_B)d\lambda = \| u \|_\infty m(B)$$

Donc c'est une mesure dont la densité par rapport à m vérifie

$$\| R(u) \|_\infty \leqslant \| u \|_\infty.$$

R est évidemment linéaire et positive. La première propriété du lemme III.2.1 implique que R est à valeurs dans H. ■

LEMME III.2.3. — *Pour tout* $u \in L^\infty(\Gamma, \lambda)$, $J(R(u)) = u \circ \rho$ $\overline{m}$ p. p. *sur* Φ.

Démonstration. — D'après la seconde propriété de τ donnée par le lemme III.2.1, on a, pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$:

$$\int_B R(\tau(f))dm = \int_\Gamma \tau(1_B)\tau(f)d\lambda = \int_\Phi \tau(f) \circ \rho d(\overline{1_B m}) = \int_\Phi Nf d(\overline{1_B m})$$

donc $\tau(f) \circ \rho = Nf = J(R(\tau(f)))$ $\overline{m}$ p. p. sur Φ et le lemme est démontré dans le cas où $u = \tau(f)$. La propriété énoncée par le lemme est préservée par le produit et la convergence dans $L^\infty(\Gamma, \lambda)$. Donc elle est vraie pour toute fonction u continue, car les représentants continus des $\tau(f)$ ($f \in \mathscr{C}_k(E)$) engendrent $\mathscr{C}(\Gamma)$ en tant qu'algèbre de Banach. Si (u_n) est une suite croissante de fonctions de $L^\infty(\Gamma, \lambda)$ convergeant λ p. p. vers $u \in L^\infty(\Gamma, \lambda)$, la suite $R(u_n)$ converge vers $R(u)$, et $\lim_n J(R(u_n)) = J(R(u))$ $\overline{m}$ p. p. Donc la propriété est aussi conservée par la convergence monotone, et le lemme est démontré. ■

THÉORÈME III.2.1. — *L'application* $u \mapsto R(u)$ *est un isomorphisme d'algèbre isométrique, positif, de* $L^\infty(\Gamma, \lambda)$ *sur* H.

Démonstration. — D'après les lemmes III.2.2 et III.2.3, R est une isométrie positive. Il reste à montrer que R est surjectif et multiplicatif.

R est surjectif car, étant donné $h \in H$, on a $R(u) = h$ où u est la densité, par rapport à λ, de la mesure image par ρ de la mesure sur Φ de densité $J(h)$ par rapport à $(\overline{\varphi m})$.

Pour prouver que R est multiplicatif, il faut prouver que, pour tout u et v dans $L^\infty(\Gamma, \lambda)$, $R(uv) = \Pi(R(u)R(v))$ ou encore que

$$J(R(uv)) = J(R(u)).J(R(v)).$$

Or d'après le lemme III.2.3, on a :

$$J(R(uv)) = (uv) \circ \rho = (u \circ \rho)(v \circ \rho) = J(R(u))J(R(v)) \qquad \overline{m} \text{ p. p. sur } \Phi ;$$

comme $\overline{m}$ charge chaque ouvert de Φ, ceci donne

$$J(R(uv)) = J(R(u)).J(R(v)). \quad \blacksquare$$

On a ainsi obtenu l'analogue du corollaire II.2 dans le cas général. L'opérateur τ joue ici le rôle que jouait l'opérateur K dans la partie II.

Ces résultats sont encore valides pour le processus relativisé par une fonction h harmonique positive (φm)-intégrable. On note N^h, Γ^h, λ^h, τ^h, R^h les correspondants de N, Γ, λ, τ, R pour le processus relativisé.

La frontière de Martin (abstraite) sera construite en recollant les différentes parties Γ^h ; ce recollement sera déduit du recollement qui a été utilisé pour définir la frontière de Feller totale $\hat{\Phi}$; les propositions suivantes montrent que la relation d'équivalence définie sur Φ, qui a fourni Γ, peut s'étendre à $\hat{\Phi}$.

PROPOSITION III.2.1. — *Pour tout* $g \in L^\infty(E, \mathscr{E}, m)$ *tel que* $(g/\varphi)_T \in L^\infty(E, \mathscr{E}, m)$, $J(\Pi(g/\varphi)_T)$ *est le représentant continu de la densité* $\dfrac{d(\overline{gm})}{d(\overline{\varphi m})}$.

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement du corollaire I.1. $\blacksquare$

PROPOSITION III.2.2. — *Pour tout* $f \in \mathscr{C}_k(E)$, *il existe une fonction continue bornée* $\hat{N}f$ *sur* $\hat{\Phi}$ *telle que*

$$\hat{N}f \circ \xi = \sum_h N^h f$$

(rappelons que ξ désigne la projection canonique de $\sum_h \Phi^h$ sur $\hat{\Phi}$; ici $\sum_h N^h f$ désigne la fonction définie sur $\sum_h \Phi^h$ égale à $N^h f$ sur Φ^h, pour tout h).

Démonstration. — Il suffit de prouver que, quelles que soient les fonctions h_0 et h_1 harmoniques, positives, (φm)-intégrables, on a :

$$N^{h_0+h_1}(f) \circ q_{h_0}^{h_0+h_1} = N^{h_0}(f).$$

D'après la proposition III.2.1, on a :

$$N^h(f) = J^h(\Pi^h(fh/\varphi h)_{T^h})$$

D'après l'égalité $hT^i(f) = (T^h)^i(fh)$, on a :

$$(fh/\varphi h)_{T^h} = 1_{E^h}(f/\varphi)_T$$

Le lemme III.1.1 permet d'écrire alors :

$$\Pi^{h_0}[\Pi^{h_0+h_1}(f(h_0+h_1)/\varphi(h_0+h_1))_{T^{h_0+h_1}}] = \Pi^{h_0}[(fh_0/\varphi h_0)_{T^{h_0}}]$$

ce qui prouve le résultat cherché ; la fonction $\hat{N}f$ est bornée car les fonctions $N^h(f)$ sont bornées uniformément par $\|(f/\varphi)_T\|_\infty$. ■

DÉFINITION III.2.2. — La frontière de Martin (abstraite) du processus, notée $\hat{\Gamma}$, est l'espace quotient de la frontière de Feller $\hat{\Phi}$ par rapport aux fonctions $\hat{N}f$ $(f \in \mathscr{C}_k(E))$.

Il est facile de montrer que $\hat{\Gamma}$ est localement compact et métrisable. Γ^h est la partie de $\hat{\Gamma}$ provenant de la partie $\xi(\Phi^h)$ de $\hat{\Phi}$. On peut donc considérer que λ^h et $\tau^h(f)$ $(f \in \mathscr{C}_k(E))$ sont définies sur $\hat{\Gamma}$ et portées par Γ^h. Pour tout $f \in \mathscr{C}_k(E)$, $\hat{N}f$ est factorisable et définit sur $\hat{\Gamma}$ une fonction continue $\hat{\tau}(f)$; les fonctions $\tau^h(f)$ vérifient alors :

$$\tau^h(f) = \hat{\tau}(f) \qquad \text{en restriction à } \Gamma^h.$$

Le résultat principal est alors :

THÉORÈME III.2.2. — *L'application $h \to \lambda^h$ est un homomorphisme, strictement positif, de l'espace des fonctions harmoniques (φm)-intégrables dans l'espace des mesures finies sur $\hat{\Gamma}$, qui vérifie*

$$\int_E f\,hdm = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\tau}(f)d\lambda^h \text{ pour tout } f \in \mathscr{C}_k(E), \text{ et } \int_E \varphi hdm = \lambda^h(\hat{\Gamma}).$$

Cet homomorphisme prolonge l'isomorphisme R *entre* H *et* $L^\infty(\Gamma, \lambda)$ *donné par le théorème* III.2.1.

III.3. — COMPARAISON AVEC LA FRONTIÈRE D'AKCOGLU ET SHARPE

Dans [2], sans aucune hypothèse sur E ni sur P, et en s'appuyant sur le corollaire I.1, Akcoglu et Sharpe ont défini la frontière comme le spectre de la sous-algèbre fermée G de H engendrée par

$$\{\Pi(g/1)_T\,;\, g \in L^\infty(E, \mathscr{E}, m)\}.$$

La proposition III.2.1 montre que la frontière définie par ces auteurs est le quotient de la frontière de Feller par rapport à tous les représentants continus des densités $\dfrac{d(\overline{gm})}{d\overline{m}}$, $g \in L^\infty(E, \mathscr{E}, m)$.

En général, cet espace n'est pas la frontière de Martin. Pour le voir, considérons l'exemple suivant : $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et P est définie par :

$$\begin{aligned} P((x, y), (x', y')) &= 1 \quad \text{si} \quad y = y' \quad \text{et} \quad x' = x + 1 \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

La mesure m charge chaque point de E.

L'espace H est formé des fonctions bornées h telles que $h(x, y) = h(x+1, y)$ pour tout x et y ; donc H est isomorphe à l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{N}$ et Φ est le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$.

D'autre part, si $f \in L^1(E, \mathscr{E}, m)$, on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} T^i f(x, y) = \frac{1}{m(x, y)} \sum_{i=0}^{x} m(x - i, y) f(x - i, y).$$

Alors si h est harmonique bornée, on a $h = (h/1)_T$, donc $G = H$, et Φ est la frontière d'Akcoglu et Sharpe.

La frontière de Martin est le complété de E par rapport aux fonctions $K1_{(a,b)}$ ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$) qui vérifient :

$$K1_{(a,b)}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m(a, b) \displaystyle\sum_{z=0}^{x} m(z, b)} & \text{si} \quad y = b \quad \text{et} \quad x > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(les hypothèses (*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*) de la partie II sont manifestement réalisées). Il n'y a que deux sortes de suites de Cauchy non constantes dans E : d'une part, les suites dont les ordonnées sont constantes à partir d'un certain rang, et dont les abscisses tendent vers $+\infty$, d'autre part les suites dont les ordonnées tendent vers $+\infty$. Les suites de ce dernier type convergent toutes vers le même point dans E^*. Donc la frontière de Martin est le compactifié d'Alexandrox de $\mathbb{N}$.

Il nous faut prouver maintenant que ce phénomène est impossible dans le cadre envisagé ici.

III.4. — Comparaison des frontières concrète et abstraite

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que dans le cas où les hypothèses de régularité (*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*) (Partie II) sont vérifiées, les deux constructions de la frontière donnent le même résultat.

D'abord, nous prouverons que l'espace Γ (définition III.2.1) est homéomorphe au support compact C_μ de la mesure μ dans M (définition II.1 et théorème II.1). Dans [*11*], Feldman a démontré ce résultat dans le cas discret. Les lemmes III.4.1 et III.4.2 lui sont empruntés.

Par l'intermédiaire de l'isomorphisme du corollaire II.2 et de J, il correspond à chaque borélien V de M un ensemble ouvert et fermé de Φ ; il sera noté Φ_V. Pour chaque $s \in C_\mu$ soit Φ_s l'intersection des Φ_V quand V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de s dans M.

LEMME III.4.1. — *Les ensembles* $\Phi_s (s \in C_\mu)$ *sont fermés non vides et forment une partition de* Φ.

LEMME III.4.2. — C_μ *est le quotient de* Φ *par la partition* $(\Phi_s)_{s \in C_\mu}$.
(Pour la démonstration, on renvoie à [*11*]).

LEMME III.4.3. — *Soient* $f \in \mathscr{C}_k(E)$ *et deux nombres réels* a, b *tels que* $a < b$. *Si* V *est l'ouvert de* M, $\{ a < Kf < b \}$, *alors* Φ_V *est l'adhérence dans* Φ *de l'ouvert* $0 = \{ a < Nf < b \}$.

Démonstration. — Dans cette démonstration, on note $r(1_s)$ la fonction harmonique associée à chaque borélien S de M par l'isomorphisme du corollaire II.2.

Soit $z \in 0$; il existe un voisinage ouvert et fermé de z, U contenu dans 0 ; donc il existe un borélien S de M tel que $\Phi_S = U$ et qui vérifie :

$$\int_S Kf d\mu = \int_E r(1_S).f dm = \int_U Nf d(\overline{\varphi m})$$

D'après la définition de 0, on a :

$$a . \int_U d(\overline{\varphi m}) = a . \mu(S) < \int_S Kf d\mu < b\mu(S) = b \int_U d(\overline{\varphi m})$$

Le même raisonnement prouve que ces inégalités sont vérifiées par tout borélien $S' \subset S$. Ceci implique $S \subset V$, donc $U \subset \Phi_V$. On a ainsi prouvé $0 \subset \Phi_V$.

Réciproquement, soit $z \in \Phi_V$; pour tout voisinage ouvert et fermé de z, U, contenu dans Φ_V, il existe un borélien S de M tel que $U = \Phi_S$ et $S \subset V$. On a :

$$\int_S Kf d\mu = \int_E r(1_s) f dm = \int_U Nf d(\overline{\varphi m})$$

D'après la définition de V, on obtient

$$a.\mu(\mathrm{S}) = a\int_{\mathrm{U}} d(\overline{\varphi m}) < \int_{\mathrm{U}} \mathrm{N}f d(\overline{\varphi m}) < b\int_{\mathrm{U}} d(\overline{\varphi m}) = b\mu(\mathrm{S})$$

Ceci implique que z est adhérent à 0. ■

THÉORÈME III.4.1. — *Sous les hypothèses (a) (b) (c) (d) (e) (Partie II), la partie atteinte* Γ *de la frontière abstraite est homéomorphe au support* C_μ *de la mesure* μ *dans* M. *De plus, les isomorphismes* $\mathrm{H} \leftrightarrow \mathrm{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$ *et* $\mathrm{H} \leftrightarrow \mathrm{L}^\infty(\Gamma, \lambda)$ *(donnés par le corollaire II.2 et le théorème III.2.1) sont identiques.*

Démonstration. — En vertu du lemme III.4.2, il suffit de prouver que la relation définie sur Φ par les fonctions $\mathrm{N}f$ ($f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$) est identique à celle définie par la partition $\Phi_s (s \in \mathrm{C}_\mu)$.

Soient $s \in \mathrm{C}_\mu$ et $z \in \Phi_s$; d'après le lemme III.4.3, z est adhérent à $\{\mathrm{K}f(s) - \varepsilon < \mathrm{N}f < \mathrm{K}f(s) + \varepsilon\}$, pour tout $f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$ et tout $\varepsilon > 0$. Donc $\mathrm{N}f(z) = \mathrm{K}f(s)$, et ceci prouve que la première relation est moins fine que la seconde.

Réciproquement, soient s et s' deux points distincts de C_μ ; soient $z \in \Phi_s$ et $z' \in \Phi_{s'}$. Il existe $f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$ telle que $\mathrm{K}f(s) \neq \mathrm{K}f(s')$. Alors, en supposant $\mathrm{K}f(s) = a < b = \mathrm{K}f(s')$, on a $z \in \Phi_{\mathrm{V}}$ où

$$\mathrm{V} = \left\{ |\mathrm{K}f - a| < \frac{b-a}{3} \right\}$$

et $z' \in \Phi_{\mathrm{V}'}$, où

$$\mathrm{V}' = \left\{ |\mathrm{K}f - b| < \frac{b-a}{3} \right\}$$

D'après le lemme III.4.3, ceci implique que $\mathrm{K}f(z) \neq \mathrm{K}f(z')$, et prouve que les deux relations sont identiques.

Il est évident alors que, pour tout $f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$, $\tau(f) = \mathrm{K}(f)$ sur $\mathrm{C}_\mu = \Gamma$ et $\mu = \lambda$; les deux isomorphismes sont donc identiques. ■

Ces résultats étant encore valables pour chaque processus relativisé, l'espace $\hat{\Gamma}$ est identique à la réunion des C_{μ^h} quand h parcourt l'ensemble des fonctions harmoniques, positives, (φm)-intégrables. De plus, $\hat{\tau}(f) = \mathrm{K}(f)$ pour tout $f \in \mathscr{C}_k(\mathrm{E})$, et $\lambda^h = \mu^h$. Donc, dans le cas où les deux constructions sont possibles, les frontières concrète et abstraite sont identiques ; la partie de M qui ne figure pas dans $\hat{\Gamma}$ $\left(\text{i. e. } \mathrm{M} - \bigcup_h \mathrm{C}_{\mu^h}\right)$ ne présente évidemment aucun intérêt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. AKCOGLU, An ergodic lemma. *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **16**, 1965, p. 388-392.

[2] M. A. AKCOGLU et R. W. SHARPE, Ergodic Theory and Boundaries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, p. 447-460.

[3] R. AZENCOTT, Marches aléatoires sur les groupes localement compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **268**, 1969, p. 1406-1409.

[4] A. BRUNEL, Sur un lemme ergodique voisin du lemme de E. Hopf et sur une de ses applications. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **256**, 1963, p. 5481-5484.

[5] R. V. CHACON, Identification of the limit of operator averages. *J. Math. Mech.*, t. **11**, 1962, p. 961-968.

[6] R. V. CHACON et D. S. ORNSTEIN, A general ergodic theorem. *Illinois J. Math.*, t. **4**, 1960, p. 153-160.

[7] J. L. DOOB, Discrete potential theory and boundaries. *J. Math. Mech.*, t. **8**, 1959, p. 433-458.

[8] J. L. DOOB, A ratio operator limit theorem. *Z. für Wahrschein I*, 1963, p. 288-294.

[9] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Part I, Interscience Publ., 1958.

[10] E. B. DYNKIN, Boundary theory of Markov processes (the discrete case). *Russian Math. Surveys*, t. **24**, 1969, n° 2.

[11] J. FELDMAN, Feller and Martin boundaries for countable sets. *Illinois J. Math.*, t. **6**, 1962, p. 356-366.

[12] W. FELLER, Boundaries induced by non negative matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **83**, 1956, p. 19-54.

[13] G. A. HUNT, Markoff chains and Martin boundaries. *Illinois J. Math.*, t. **4**, 1960, p. 313-340.

[14] J. G. KEMENY, *Denumerable Markov Chains.*
J. L. SNELL et A. W. KNAPP, Van Nostrand, 1966.

[15] R. S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **49**, 1941, p. 137-172.

[16] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson (Paris), 1964.

[17] J. NEVEU, Chaînes de Markov et théorie du potentiel. *Ann. Fac. des Sciences de Clermont*, t. **24**, 1964 p. 37-89.

(Manuscrit reçu le 6 février 1973).