ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. BRANCOVAN

Quelques propriétés des résolvantes récurrentes au sens de Harris

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 1 (1973), p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 1, 1973, p. 1-18. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Quelques propriétés des résolvantes récurrentes au sens de Harris

par

M. BRANCOVAN (*)

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est l'application des opérateurs U_h définis par J. Neveu [*1*] à l'étude de la normalité d'une résolvante récurrente au sens de Harris et la démonstration d'un théorème limite-quotient pour une telle résolvante.

SUMMARY. — The aim of this paper is to apply the operators U_h defined by J. Neveu in [*1*] to the study of the normality of a Harris recurrent resolvent and to prove a limit-quotient theorem for such a resolvent.

La première partie de cet article est consacrée à la définition et au rappel de quelques propriétés des opérateurs U_h qui ont déjà été étudiés par J. Neveu dans [*1*], d'abord dans le cas d'un noyau sous-markovien et ensuite dans celui d'une résolvante sous-markovienne.

Je ne ferai que rappeler brièvement les propriétés qui me seront utiles par la suite, toutes les démonstrations se trouvant dans l'article cité. La récurrence au sens de Harris d'un processus de Markov pouvant être caractérisée uniquement à l'aide des opérateurs U_h qui lui sont associés,

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 1 « Mathématiques, Informatique » associée au C. N. R. S.

il est possible de faire toute la théorie dans le cas d'une résolvante abstraite, en ignorant l'éventuel processus sous-jacent. Le cône des fonctions spéciales, introduit par J. Neveu dans [*1*], est ici aussi d'une importance capitale, notamment dans la définition d'une charge qui est essentiellement la même que dans [*2*] ou dans [*3*], la seule différence étant que la fonction $|f|$ est supposée spéciale, au lieu d'être supposée concentrée sur un ensemble borné. Cette modification permet d'obtenir une démonstration plus simple de l'équivalence des trois propriétés définissant un processus normal, démonstration qui est faite dans [*2*] à l'aide des charges concentrées sur les ensembles bornés. La définition des chaînes normales est évidemment changée de manière analogue.

Le but de la seconde partie de l'article est la démonstration d'un théorème limite-quotient, du type Chacon-Ornstein, pour une résolvante récurrente au sens de Harris. Des théorèmes analogues ont déjà été démontrés par J. Azéma, M. Kaplan-Duflo et D. Revuz dans [*4*] et, plus récemment, par D. Revuz dans [*5*] où il est montré que le rapport $\frac{U_\alpha f}{U_\alpha g}$ converge p. s. vers $\frac{\mu(f)}{\mu(g)}$ lorsque $\alpha \to 0$, μ étant la mesure (définie à une constante multiplicative près) invariante de la résolvante et f, g deux fonctions de $L^1(\mu)$. Dans ce qui suit il sera prouvé que cette convergence est certaine dès que f et g appartiennent au cône **S** des fonctions spéciales (noter que $\mathbf{S} - \mathbf{S}$ est dense dans L^1). L'analogue discret de ce résultat était déjà connu (voir Métivier [*6*]). Contrairement à la démonstration de [*5*] qui avait pour base le lemme de Brunel ([*7*]) (et qui pourrait aussi bien se faire en utilisant le lemme démontré par G. C. Rota dans [*8*]), celle de cet article s'appuie sur plusieurs lemmes techniques qui sont les analogues dans le cas continu de ceux prouvés par J. Neveu ([*9*]) dans le cas discret.

Précisons enfin quelques notations de base : (E, **E**) sera un espace mesurable dont la tribu **E** sera supposée dénombrablement engendrée. L'espace vectoriel des fonctions mesurables (resp. bornées mesurables) sera noté **E** (resp. bE). A toute fonction mesurable positive h est associé un opérateur M_h défini sur **E** par $M_h(f) = h.f$ (M_h est la multiplication par h).

Rappelons qu'une résolvante sous-markovienne sur (E, **E**) est une famille $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ de noyaux vérifiant :

i) $U_\alpha U_\beta = U_\beta U_\alpha$ pour tous α, $\beta > 0$
ii) $U_\alpha = U_\beta + (\beta - \alpha)U_\alpha U_\beta$ si $\alpha < \beta$ (« équation résolvante »)
iii) $\alpha U_\alpha 1 \leqslant 1$ pour tout $\alpha > 0$

1. RÉSOLVANTES DE HARRIS

$(U_\alpha)_{\alpha>0}$ étant une résolvante sous-markovienne sur l'espace $(E, \mathbf{E})$ et h une fonction positive, bornée et mesurable, il est possible de définir sans ambiguïté un opérateur U_h par la formule

$$U_h = \sum_{n\geq 0} (U_\alpha M_{\alpha-h})^n U_\alpha, \tag{1.1}$$

α étant un réel majorant h sur E. Il est montré dans [*1*] que ces opérateurs vérifient pour $h \leqslant k$ les équations résolvantes suivantes :

$$U_h = \sum_{n\geq 0} (U_k M_{k-h})^n U_k = \sum_{n\geq 0} U_k (M_{k-h} U_k)^n$$

et

$$U_h = U_k + U_k M_{k-h} U_h = U_k + U_h M_{k-h} U_k$$

Il est facile de voir que dans le cas où la résolvante (U_α) est associée à un processus de Markov droit $X = \{ \Omega, \mathbf{F}, (\mathbf{F}_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\in E} \}$, $U_h f$ admet l'expression suivante, pour f mesurable et positive

$$U_h f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\int_0^t h(X_s)ds} f(X_t)dt.$$

X est dit récurrent au sens de Harris s'il existe une mesure positive, non nulle m telle que, pour $A \in \mathbf{E}$,

$$m(A) > 0 \Rightarrow \forall x \in E, \qquad P_x\left[\int_0^\infty 1_A(X_t)dt = \infty \right] = 1.$$

Mais, en posant $U_A = U_{1_A}$, on a

$$U_A 1_A(x) = E_x\left[1 - \exp\left(- \int_0^\infty 1_A(X_t)dt \right) \right].$$

La définition précédente équivaut donc à :

$$m(A) > 0 \Rightarrow U_A(1_A) = 1.$$

Par analogie, on posera :

DÉFINITION 1.1. — La résolvante $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ sera dite de Harris s'il existe une mesure m telle que l'on ait pour tout A dans $\mathbf{E}$:

$$m(A) > 0 \Rightarrow U_A(1_A) = 1.$$

Dans [*1*], J. Neveu a associé à tout noyau sous-markovien P une famille d'opérateurs V_h définis pour $h \leqslant 1$ par la formule :

$$V_h = \sum_{n \geqslant 0} (PM_{1-h})^n P. \tag{1.2}$$

Le noyau P sera dit de Harris si l'on a, pour une mesure m

$$m(A) > 0 \Rightarrow V_A(1_A) = 1,$$

condition qui s'exprime de la manière suivante au moyen de la chaîne de Markov associée à P :

$$m(A) > 0 \Rightarrow \forall x \in E, \qquad P_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_A(X_n) = \infty\right] = 1.$$

Si P_α désigne le noyau sous-markovien αU_α, V_k^α les opérateurs qui lui sont associés et si $0 \leqslant h \leqslant \alpha$ sur E, on a :

$$\begin{aligned} V^\alpha_{\alpha^{-1}h} &= \sum_{n \geqslant 0} (P_\alpha M_{1-\alpha^{-1}h})^n P_\alpha \\ &= \alpha \sum_{n \geqslant 0} (U_\alpha M_{\alpha - h})^n U_\alpha \\ &= \alpha U_h. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$0 \leqslant h \leqslant \alpha \Rightarrow U_h = \alpha^{-1} V^\alpha_{\alpha^{-1}h} \tag{1.3}$$

D'autre part, il est facile de voir que si (U_α) est de Harris, on a plus généralement, pour $h \in bE_+$:

$$m(h) > 0 \Rightarrow U_h(h) = 1. \tag{1.4}$$

En effet, si $h = \alpha 1_A$ avec $\alpha \leqslant 1$, l'équation résolvante donne

$$\begin{aligned} U_{\alpha 1_A}(\alpha 1_A) &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n (U_A M_A)^n U_A(1_A) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mais $U_h(h)$ croît avec h et est majoré par 1 puisque, si $h \leqslant k \leqslant \alpha$, on a

$$U_h(h) = V^\alpha_{\alpha^{-1}h}(\alpha^{-1}h) \qquad \text{et} \qquad U_k(k) = V^\alpha_{\alpha^{-1}k}(\alpha^{-1}k)$$

et on se ramène ainsi au cas traité dans [*1*].

Le résultat est maintenant acquis, puisque pour $m(h) > 0$ on peut trouver $\alpha \leqslant 1$ et A tel que $m(A) > 0$ et $h \geqslant \alpha 1_A$. Nous avons vu que $U_{\alpha 1_A}(\alpha 1_A) = 1$, d'où $U_h(h) = 1$. On en déduit immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. — La résolvante $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ est de Harris si et seulement si chaque noyau αU_α l'est.

Démonstration. — En vertu de la formule (1.3), dire que $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ est de Harris équivaut à dire que U_1 l'est ; la condition est donc suffisante.

Réciproquement, soit $\alpha > 0$ et A tel que $m(A) > 0$.

$$\begin{aligned} V_A^\alpha(1_A) &= U_{\alpha 1_A}(\alpha 1_A) \\ &= 1. \end{aligned}$$

en vertu de ce qui précède. ■

Les résultats de [*1*] se transposent donc parfaitement et l'on peut énoncer :

THÉORÈME 1.3. — Etant donnée une résolvante $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ vérifiant la condition de Harris pour une mesure m, il existe une mesure positive μ, σ-finie, $\mu \geqslant m$, qui est invariante :

$$\forall \alpha > 0, \qquad \alpha \mu U_\alpha = \mu.$$

En outre, pour toute fonction $f \in b\mathbf{E}_+$ telle que $\mu(f) > 0$, on a

$$U_f(f) = 1 \qquad \text{et} \qquad (f.\mu)U_f = \mu$$

et μ est, à une constante multiplicative près, l'unique mesure excessive σ-finie.

Tous les résultats démontrés dans [*1*] restent valables dans notre cas et je ne ferai que rappeler ceux qui seront utiles par la suite.

PROPOSITION 1.4. — Il existe une fonction strictement positive $h_1 \in b\mathbf{E}_+$ telle que l'on ait

$$U_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$$

(h étant une fonction de $\mathbf{E}_+$ et m une mesure positive, l'opérateur $h \otimes m$ est défini par $(h \otimes m)(f) = h.m(f)$).

DÉFINITION 1.5. — Une fonction $f \in b\mathbf{E}_+$ est dite spéciale si pour toute fonction h de $b\mathbf{E}_+$ telle que $\mu(h) > 0$, la fonction $U_h(f)$ est bornée.

Il est clair que les fonctions spéciales forment un cône $\mathbf{S}$ qui est convexe et héréditaire. Rappelons aussi que f est spéciale dès qu'elle vérifie $U_h(f)$ bornée pour une fonction h strictement positive telle que $U_h \geqslant 1 \otimes m$

(m mesure positive non nulle). On peut par exemple prendre pour h la fonction h_1 de la proposition précédente. Une conséquence immédiate de cette propriété est que toute fonction h strictement positive vérifiant $U_h \geqslant 1 \otimes m$ est elle-même spéciale (h_1 est donc une fonction spéciale).

PROPOSITION 1.6. — Pour tout $\alpha > 0$, il y a identité entre les fonctions spéciales pour la résolvante et pour le noyau αU_α.

Démonstration. — Soit f spéciale pour la résolvante et $\alpha > 0$. Pour h telle que $0 \leqslant h \leqslant 1$ et $\mu(h) > 0$, on a :

$$V_h^\alpha(f) = \alpha U_{\alpha h}(f)$$

et f est spéciale pour αU_α.

Réciproquement, soit f spéciale pour αU_α. On peut toujours supposer que la fonction h_1 de la proposition 1.4 vérifie $h_1 \leqslant \alpha$, sinon il suffit de la remplacer par $h_1 \wedge \alpha$.

$$U_{h_1}(f) = \alpha^{-1} V^\alpha_{\alpha^{-1}h_1}(f)$$

est alors une fonction bornée. ∎

Rappelons enfin la construction d'un noyau potentiel W à partir de la fonction h_1 donnée par la proposition 1.4.

En posant $V = U_{h_1} - 1 \otimes \mu$, W est défini par la formule

$$W = \sum_{n \geqslant 0} (VM_{h_1})^n V.$$

Pour toute fonction spéciale f, Wf est bornée et l'on a les identités :

$$U_h + U_h M_h W = W + \frac{1}{\mu(h_1)} U_h(h_1) \otimes \mu \tag{1.5}$$

$$U_h + W M_h U_h = W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu) U_h \tag{1.6}$$

pour toute fonction $h \in bE_+$, non μ-négligeable.

2. RÉSOLVANTE NORMALE

DÉFINITION 2.1. — Une fonction $f \in bE$ est appelée charge si $|f| \in S$ et si $\mu(f) = 0$.

Les charges forment un sous-espace vectoriel de bE que l'on désignera par **N**. W est bien défini sur **N**, pour toute charge f, $Wf \in b\mathbf{E}$ et la relation (1.5) donne pour $h = \alpha > 0$:

$$Wf - U_\alpha f - \alpha U_\alpha Wf = 0.$$

On reconnaît bien là la définition d'un potentiel ([*2*]).

LEMME 2.2. — Pour toute charge f, la famille de fonctions $U_h(f)$ est uniformément bornée lorsque h parcourt les éléments de $b\mathbf{E}_+$ tels que $\mu(h) > 0$.

Démonstration. — Si $h \in b\mathbf{E}_+$ et $\mu(h) > 0$, la relation (1.5) s'écrit

$$U_h(f) + U_h[hW(f)] = Wf.$$

On en déduit :

$$\| U_h(f) \| = \| Wf - U_h(h.Wf) \| \leqslant 2 \| Wf \| < +\infty. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 2.3. — h étant une fonction spéciale strictement positive et majoré par 1 sur E, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) pour toute fonction $f \in b\mathbf{E}$ telle que $\mu(f) = 0$ et $|f| \leqslant c.h$ pour une constante $c > 0$, la limite $\lim\limits_{\alpha \searrow 0} U_\alpha f$ existe ;

2) pour toute fonction $g \in b\mathrm{E}$, la limite $\lim\limits_{\alpha \searrow 0} \alpha U_\alpha U_h M_h(g)$ existe.

Démonstration. — Commençons par démontrer l'implication 2) $\Rightarrow$ 1). Une fonction f vérifiant les conditions de 1) est une charge, donc

$$\forall \alpha > 0, \qquad U_\alpha f = Wf - \alpha U_\alpha Wf.$$

Mais la relation (1.5) donne aussi

$$\begin{aligned} Wf &= U_h f + U_h M_h Wf \\ &= U_h M_h\left(\frac{f}{h} + Wf\right). \end{aligned}$$

L'égalité

$$U_\alpha f = Wf - \alpha U_\alpha U_h M_h\left(\frac{f}{h} + Wf\right)$$

et le fait que $\dfrac{f}{h} + Wf$ soit bornée entraîne, grâce à 2), l'existence de la limite $\lim\limits_{\alpha \to 0} U_\alpha f$.

Pour montrer l'implication inverse, soit $g \in b\mathrm{E}$ et posons

$$f = (M_h - M_h U_h M_h)g.$$

Il est clair que $\mu(f) = 0$ et que $|f| \leqslant 2\|g\|.h$, donc, par hypothèse, $\lim_{\alpha\to 0} U_\alpha f$ existe.

$$\begin{aligned} U_1 f &= U_1(M_h + M_{1-h}U_hM_h - U_hM_h)g \\ &= (U_hM_h - U_1U_hM_h)g \\ &= (I - U_1)U_hM_hg. \end{aligned}$$

Pour $\alpha \leqslant 1$, on obtient grâce à l'équation résolvante :

$$\begin{aligned} U_\alpha f &= (I + (1-\alpha)U_\alpha)U_1 f \\ &= [I + (1-\alpha)U_\alpha](I - U_1)U_hM_hg \end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} U_\alpha f &= (I - \alpha U_\alpha)U_hM_hg \\ &= U_hM_hg - \alpha U_\alpha U_hM_hg \end{aligned}$$

d'où l'existence de la limite $\lim_{\alpha\to 0} \alpha U_\alpha U_hM_hg$. ■

Le lemme suivant nous permettra de déduire de la proposition 2.3 un théorème plus général.

LEMME 2.4. — Si h est une fonction spéciale strictement positive sur E telle que la condition 2) de la proposition 2.3 soit vérifiée, cette condition sera encore vérifiée pour toute fonction h' telle que $\mu(h') > 0$ et $h' \leqslant c.h$ pour une constante $c > 0$.

Démonstration. — Il suffit de faire la démonstration dans les deux cas $h' = ch (c \geqslant 1)$ et $h' \leqslant h$; la conclusion s'obtient en appliquant le lemme successivement aux fonctions h et ch (on peut toujours supposer $c \geqslant 1$).

a) Dans le cas $h' = ch \geqslant h$, l'équation résolvante s'écrit

$$U_{h'} = U_h - (c-1)U_hM_hU_{h'}$$

et pour $g \in b\mathrm{E}$ on a :

$$\alpha U_\alpha U_{h'}M_{h'}g = \alpha U_\alpha U_hM_h(cg) - (c-1)\alpha U_\alpha U_hM_h(U_{h'}M_{h'}g)$$

d'où le résultat, la fonction $U_{h'}M_{h'}g$ étant bornée.

b) Pour $h' \leqslant h$ on peut écrire

$$U_{h'} = U_h + U_hM_{h-h'}U_{h'}$$

d'où :

$$\alpha U_\alpha U_{h'}M_{h'}g = \alpha U_\alpha U_hM_h\left(\frac{h'}{h}g\right) + \alpha U_\alpha U_hM_h\left(\frac{h-h'}{h}U_{h'}M_{h'}g\right)$$

et le résultat s'obtient de la même manière puisque

$$0 \leqslant \frac{h'}{h} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \frac{h-h'}{h} \leqslant 1. \ ■$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 2.5. — Pour une résolvante de Harris, les trois conditions suivantes sont équivalentes.

1° Pour toute charge f, la limite $\lim_{\alpha \to 0} U_\alpha f$ existe.

2° Pour toute fonction h spéciale non μ-négligeable, il existe une probabilité λ_h telle que pour toute fonction $g \in b\mathrm{E}$ on ait :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \lim_{\alpha \to 0} \alpha U_\alpha U_h M_h g(x) = \lambda_h(g)$$

3° Pour toute fonction h spéciale non μ-négligeable, pour tout $x \in \mathrm{E}$ et pour tout $\Gamma \in \mathbf{E}$, la limite

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha U_\alpha U_h M_h(x, \Gamma) \qquad \text{existe.}$$

Démonstration. — Il est évident que 2) $\Rightarrow$ 3). Réciproquement, 3) implique, grâce au théorème de Vitali-Hahn-Saks, l'existence pour tout $x \in \mathrm{E}$ d'une probabilité $\lambda_h(x, .)$ telle que pour toute fonction $g \in b\mathbf{E}$, on ait

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha U_\alpha U_h M_h g(x) = \lambda_h(x, g).$$

Or, pour tout $\Gamma \in \mathbf{E}$ fixé, la fonction

$$\lambda_h(., \Gamma) = \lim_{\alpha \to 0} \alpha U_\alpha U_h M_h(1_\Gamma)$$

est invariante bornée pour la résolvante de Harris U_α et il est bien connu qu'une telle fonction est constante ([*1*]). La famille $\{ \lambda_h(x, .) \}_{x \in \mathrm{E}}$ de probabilités se réduit donc à une seule probabilité que l'on appellera λ_h, ce qui achève de démontrer l'implication 3) $\Rightarrow$ 2).

On voit donc que démontrer 2) revient à démontrer l'existence de la limite $\lim_{\alpha \to 0} \alpha U_\alpha U_h M_h g$. Le lemme 2.4 entraîne alors que 2) équivaut à l'existence de cette même limite, pour h spéciale strictement positive et majorée par 1 sur E. En effet, si h est spéciale non μ-négligeable et si h_1 est la fonction de la proposition 1.4, on a $h \leqslant c.h_0$ avec $h_0 = \dfrac{h_2}{\| h_2 \|}$, $h_2 = h + h_1$ et $c = \| h_2 \|$; h_0 est bien spéciale et vérifie $0 < h_0 \leqslant 1$ sur E.

Compte tenu de toutes les remarques précédentes, il nous reste à démontrer l'équivalence de 1) et de :

2′) Pour toute fonction h spéciale strictement positive et majorée par 1 sur E et pour toute fonction $g \in b\mathbf{E}$, la limite $\lim_{\alpha \to 0} \alpha U_\alpha U_h M_h g$ existe.

La démonstration devient alors une conséquence immédiate de la proposition 2.3, compte tenu de la remarque que nous venons de faire et qui peut s'écrire :

$$f \in \mathrm{S} \Leftrightarrow, \exists h \in \mathrm{S}, \quad 0 < h \leqslant 1 \text{ sur E}, \quad \exists c > 0, \quad f \leqslant c.h. \quad \blacksquare$$

DÉFINITION 2.6. — Une résolvante de Harris vérifiant les conditions équivalentes du théorème 2.5 est dite normale.

COROLLAIRE 2.7. — Pour une résolvante normale, l'opérateur U défini sur $\mathbf{N}$ par

$$\forall f \in \mathbf{N}, \qquad \mathrm{U}f = \lim_{\alpha \to 0} \mathrm{U}_\alpha f$$

est un potentiel.

Démonstration. — Il résulte du lemme 2.2 que $\mathrm{U}f$ est une fonction bornée. Soit $\alpha > 0$; pour tout β, $0 < \beta \leqslant \alpha$, l'équation résolvante permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_\beta f &= \mathrm{U}_\alpha f + (\alpha - \beta)\mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta f \\ &= \mathrm{U}_\alpha f + \alpha \mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta f - \beta \mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta f. \end{aligned}$$

Or :

$$| \beta \mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta f | \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \| \mathrm{U}_\beta f \| \leqslant \frac{2\beta}{\alpha} \| \mathrm{W}f \|$$

d'où $\lim_{\beta \to 0} \beta \mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta f = 0$. En faisant tendre β vers 0 dans l'égalité précédente, on obtient

$$\mathrm{U}f = \mathrm{U}_\alpha f + \alpha \mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}f$$

ce qui prouve que U est un potentiel. $\blacksquare$

Dans le cas où l'on part d'une probabilité de transition P qui vérifie la condition de Harris, on peut faire des démonstrations semblables, les opérateurs U_h étant maintenant ceux définis pour $0 \leqslant h \leqslant 1$ par la formule (1.2)

$$\mathrm{U}_h = \sum_{n \geqslant 0} (\mathrm{PM}_{1-h})^n \mathrm{P}.$$

Indiquons brièvement les étapes à suivre. Voici d'abord l'analogue de la proposition 2.3.

PROPOSITION 2.8. — h étant une fonction spéciale vérifiant $0 < h \leqslant 1$ sur E, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) Pour toute fonction $f \in b\mathrm{E}$ telle que $\mu(f) = 0$ et $| f | \leqslant c.h$ pour une constante $c > 0$, la limite $\lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_n f$ existe.

2) Pour toute fonction $g \in b\mathrm{E}$, la limite $\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}_n \mathrm{U}_h \mathrm{M}_h g$ existe.

Démonstration. — Pour démontrer 2) $\Rightarrow$ 1) on remarque que f est une charge et que le noyau $G = I + W$ résoud l'équation de Poisson, autrement dit

$$(I - P)Gf = f.$$

d'où successivement :

$$\sum_{n=0}^{N} P_n f = Gf - P_{N+1}Gf$$

$$\begin{aligned} PGf &= Wf \\ &= (U_h + U_h M_h W)f \\ &= U_h M_h\left(\frac{f}{h} + Wf\right). \end{aligned}$$

$$P_{N+1}Gf = P_N U_h M_h\left(\frac{f}{h} + Wf\right).$$

Pour l'implication 1) $\Rightarrow$ 2), g étant une fonction de bE, on considère comme dans 2.3, la charge

$$f = (M_h - M_h U_h M_h)g$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} P_n f &= \sum_{n=0}^{N-1} P_n(I - P)U_h M_h g \\ &= U_h M_h g - P_N U_h M_h g. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Le lemme 2.4 se transpose de manière évidente en remplaçant αU_α par P_n et on en déduit instantanément le théorème correspondant à 2.5 :

THÉORÈME 2.9. — P étant un noyau markovien vérifiant la condition de Harris, les trois propositions suivantes sont équivalentes.

1) Pour toute charge f, la limite $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} P_n f$ existe.

2) Pour toute fonction h spéciale, comprise entre 0 et 1, non μ-négligeable, il existe une probabilité λ_h telle que pour toute fonction $g \in b$E on ait :

$$\forall x \in E, \qquad \lim_{n\to\infty} P_n U_h M_h g(x) = \lambda_h(g).$$

3) Pour toute fonction h spéciale, comprise entre 0 et 1, non μ-négligeable, pour tout $x \in E$ et pour tout $\Gamma \in$ **E**, la limite

$$\lim_{n\to\infty} P_n U_h M_h(x, \Gamma) \qquad \text{existe.}$$

Un noyau P vérifiant ces trois conditions sera dit normal.

En reprenant la démonstration de la proposition 2.8 on voit que si f est une charge on a pour tout entier N

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} P_n f \right\| = \| Gf - P_{N+1}Gf \| \leqslant 2 \| Gf \| < \infty .$$

Si P est normal on peut donc définir sur **N** un opérateur U à valeurs dans b**E** par :

$$\forall f \in N, \qquad Uf = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} P_n f.$$

Cet opérateur U résoud aussi l'équation de Poisson, puisque

$$\begin{aligned}(I - P)Uf &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} P_n f - \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N+1} P_n f \\ &= \lim_{N \to \infty} (f - P_{N+1} f) \\ &= f.\end{aligned}$$

3. LE THÉORÈME LIMITE-QUOTIENT

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que la résolvante $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ est de Harris. D. Revuz a montré dans [5] que pour une telle résolvante on avait le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — Si $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^1(\mu)$ avec $\mu(g) > 0$, on a

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{U_\alpha f}{U_\alpha g} = \frac{\mu(f)}{\mu(g)} \mu\text{-p. s.}$$

Dans ce qui suit nous allons montrer qu'en supposant f et g spéciales avec $\mu(g) > 0$, quelles que soient les probabilités ν_1 et ν_2 on a :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\nu_1 U_\alpha f}{\nu_2 U_\alpha g} = \frac{\mu(f)}{\mu(g)} .$$

En particulier, la convergence du théorème 3.1 a lieu partout pour de telles fonctions.

Nous suivons de près les démonstrations données par J. Neveu dans [9] pour le cas discret.

THÉORÈME 3.2. — Si f et g sont deux fonctions spéciales et si $\mu(g) > 0$, pour toute probabilité ν sur (E, E) on a

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\nu U_\alpha f}{\nu U_\alpha g} = \frac{\mu(f)}{\mu(g)}.$$

Démonstration. — La fonction $\mu(g).f - \mu(f).g$ est une charge, donc, en vertu du lemme 2.2

$$\begin{aligned} |\, \mu(g)\nu U_\alpha f - \mu(f)\nu U_\alpha g \,| &\leqslant \nu(\,|\, U_\alpha(\mu(g).f - \mu(f).g)\,|\,) \\ &\leqslant M < \infty. \end{aligned}$$

Comme $\mu(g) > 0$ implique $\nu U_\alpha g > 0$ pour tout α, on peut diviser par $\mu(g)\nu U_\alpha g$:

$$\left| \frac{\nu U_\alpha f}{\nu U_\alpha g} - \frac{\mu(f)}{\mu(g)} \right| \leqslant \frac{M}{\mu(g)\nu U_\alpha g}.$$

Le résultat découle du fait que $\lim\limits_{\alpha \to 0} \nu U_\alpha g = \infty$. ■

Commençons par démontrer un lemme qui est une conséquence immédiate de l'équation résolvante.

LEMME 3.3. — f étant une fonction spéciale et h une fonction de bE_+, telle que $0 \leqslant h \leqslant 1$ et $\mu(h) > 0$, on a l'égalité :

$$U_h(f) + U_h M_h U_\alpha(f) = U_\alpha(f) + \alpha U_h U_\alpha(f) \tag{3.1}$$

pour tout $\alpha \leqslant 1$.

Démonstration. — En multipliant les deux membres de l'équation résolvante

$$U_h = U_1 + U_h M_{1-h} U_1$$

par $\sum\limits_{n \geqslant 0} (1 - \alpha)^n U_1^n$ on obtient :

$$U_h + (1 - \alpha) U_h U_\alpha = U_\alpha + U_h M_{1-h} U_\alpha.$$

Le cône **S** des fonctions spéciales étant stable par U_α (voir [*1*]), tous les opérateurs figurant dans l'égalité précédente donnent de f une image bornée et on obtient aussitôt l'identité de l'énoncé. ■

Dans toute la suite, h_1 sera la fonction spéciale, strictement positive donnée par la proposition 1.4 et λ sera la mesure bornée $h_1 . \mu$. Pour tout α on pose

$$a_\alpha = \|\lambda\|^{-1} \lambda U_\alpha h_1.$$

LEMME 3.4. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que $\forall \alpha \leqslant 1$, $U_\alpha h_1 \leqslant C_\varepsilon + (1 + \varepsilon)a_\alpha$.

Démonstration. — Posons $A_\alpha = \{ U_\alpha h_1 < (1 + \varepsilon)a_\alpha \}$. En intégrant par rapport à λ les deux membres de l'inégalité

$$U_\alpha h_1 \geqslant (1 + \varepsilon)a_\alpha . 1_{A_\alpha^c}$$

on obtient

$$\| \lambda \| a_\alpha \geqslant (1 + \varepsilon)a_\alpha \lambda(A_\alpha^c)$$

d'où

$$\lambda(A_\alpha) \geqslant \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \| \lambda \| .$$

En désignant par f_α la fonction $h_1 . 1_{A_\alpha}$ et en faisant dans la formule (3.1) $h = f_\alpha$ et $f = h_1$, on obtient :

$$U_\alpha h_1 \leqslant U_{f_\alpha}(h_1) + U_{f_\alpha}[f_\alpha U_\alpha(h_1)].$$

Or

$$f_\alpha . U_\alpha h_1 \leqslant (1 + \varepsilon)a_\alpha f_\alpha$$

d'où

$$U_\alpha h_1 \leqslant U_{f_\alpha}(h_1) + (1 + \varepsilon)a_\alpha .$$

L'application de l'équation résolvante donne

$$\begin{aligned} U_{f_\alpha}(h_1) &= \sum_{n \geqslant 0} (U_{h_1} M_{h_1 - f_\alpha})^n U_{h_1}(h_1) \\ &= \sum_{n \geqslant 0} (U_{h_1} M_{h_1 - f_\alpha})^n . 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_{h_1} M_{h_1 - f_\alpha}) . 1 &= 1 - U_{h_1}(f_\alpha) \\ &\leqslant 1 - \mu(f_\alpha) \end{aligned}$$

puisque $U_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$. On en déduit

$$U_{f_\alpha}(h_1) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} [1 - \mu(f_\alpha)]^n = \frac{1}{\mu(f_\alpha)} = \frac{1}{\lambda(A_\alpha)} \leqslant \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon \| \lambda \|} .$$

Il ne reste plus qu'à poser $C_\varepsilon = \dfrac{1 + \varepsilon}{\varepsilon \| \lambda \|}$. ∎

LEMME 3.5. — Pour tout $\delta \in]0, 1[$ et toute probabilité ν, il existe deux nombres α, $\beta > 0$ tels que

1) $$U_{\alpha h_1} M_{\alpha h_1} \geqslant (1 - \delta) \| \lambda \|^{-1} \otimes \lambda ;$$
2) $$\nu U_{\alpha h_1 + \beta}(\alpha h_1) \geqslant 1 - \delta .$$

Démonstration. — Pour $\alpha < 1$, l'équation résolvante donne :

$$U_{\alpha h_1} = \sum_{n \geqslant 0} (1 - \alpha)^n (U_{h_1} M_{h_1})^n U_{h_1}.$$

$$U_{\alpha h_1} M_{\alpha h_1} = \sum_{n \geqslant 0} \alpha(1 - \alpha)^n (U_{h_1} M_{h_1})^{n+1}.$$

Posons

$$V = U_{h_1} - 1 \otimes \mu.$$

$$\lambda V M_{h_1} = h_1 . \lambda V = h_1 . [\mu - \| \lambda \| \mu] = (1 - \| \lambda \|) . \lambda.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
(VM_{h_1})(1 \otimes \lambda) = (1 \otimes \lambda)(VM_{h_1}) &= (1 - \| \lambda \|) 1 \otimes \lambda \\
(U_{h_1} M_{h_1})^n &= (1 \otimes \lambda + VM_{h_1})^n \\
&= a_n . (1 \otimes \lambda) + (VM_{h_1})^n.
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $(1 \otimes \lambda)(1 \otimes \lambda) = \| \lambda \| (1 \otimes \lambda)$, on obtient la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n + (1 - \| \lambda \|)^n.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geqslant 0} \alpha(1 - \alpha)^n a_{n+1} &= \sum_{n \geqslant 0} [1 - (1 - \alpha)](1 - \alpha)^n a_{n+1} \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (1 - \alpha)^n a_{n+1} - \sum_{n \geqslant 1} (1 - \alpha)^n a_n \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (1 - \alpha)^n (a_{n+1} - a_n) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (1 - \alpha)^n (1 - \| \lambda \|)^n \\
&= \frac{1}{1 - (1 - \alpha)(1 - \| \lambda \|)}
\end{aligned}$$

(dans ce calcul on a posé $a_0 = 0$, ce qui est compatible avec la relation de récurrence). Ainsi :

$$\begin{aligned}
U_{\alpha h_1} M_{\alpha h_1} &= \frac{1}{1 - (1 - \alpha)(1 - \| \lambda \|)} 1 \otimes \lambda + \sum_{n \geqslant 0} \alpha(1 - \alpha)^n (VM_{h_1})^{n+1} \\
&\geqslant \frac{1}{1 - (1 - \alpha)(1 - \| \lambda \|)} 1 \otimes \lambda.
\end{aligned}$$

Le coefficient de $1 \otimes \lambda$ tendant vers $\|\lambda\|^{-1}$ quand $\alpha \to 0$, il sera $> (1-\delta)\|\lambda\|^{-1}$ pour α assez petit, ce qui démontre 1).

α étant ainsi fixé, remarquons que

$$\lim_{\beta\to 0} \nu U_{\alpha h_1+\beta}(\alpha h_1) = \nu U_{\alpha h_1}(\alpha h_1) = 1.$$

La condition 2) sera donc réalisée pour β assez petit. ∎

LEMME 3.6. — Pour toute probabilité ν sur (E, **E**), on a

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\nu U_\alpha h_1}{\lambda U_\alpha h_1} = \frac{1}{\|\lambda\|}.$$

Démonstration. — Posons $R_\alpha = \dfrac{\nu U_\alpha h_1}{\lambda U_\alpha h_1}$. Le lemme 3.4 entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$R_\alpha \leqslant \frac{C_\varepsilon}{\lambda U_\alpha h_1} + \frac{1+\varepsilon}{\|\lambda\|}$$

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}}\, R_\alpha h_1 \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\|\lambda\|}$$

et, en faisant tendre ε vers 0,

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}}\, R_\alpha \leqslant \frac{1}{\|\lambda\|}.$$

Nous allons montrer que l'on a aussi

$$\underline{\lim}_{\alpha\to 0}\, R_\alpha \geqslant \frac{1}{\|\lambda\|}.$$

Soit $\delta \in]0, 1[$ et posons

$$B_\alpha = \{ U_\alpha h_1 > (1-\delta)a_\alpha \}$$

On a donc $U_\alpha h_1 \geqslant (1-\delta)a_\alpha 1_{B_\alpha}$ et la formule (3.1) donne

$$\begin{aligned} U_\alpha h_1 &\geqslant U_h M_h U_\alpha h_1 - \alpha U_h U_\alpha h_1 \\ &\geqslant (1-\delta)a_\alpha U_h(h.1_{B_\alpha}) - \alpha U_h U_\alpha h_1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si nous prenons pour h la fonction $\alpha h_1 + \beta$ donnée par le lemme (3.5), on a de plus

$$\begin{aligned} \nu U_h(h 1_{B_\alpha}) &\geqslant \nu U_{\alpha h_1+\beta}(\alpha h_1 . 1_{B_\alpha}) \\ &\geqslant \nu U_{\alpha h_1}(\alpha h_1 . 1_{B_\alpha}) - \delta \end{aligned}$$

puisque la condition 2) du lemme 3.5 entraîne que la mesure positive

$\nu(U_{\alpha h_1}M_{\alpha h_1} - U_{\alpha h_1+\beta}M_{\alpha h_1})$ a une masse totale inférieure ou égale à δ. D'après la condition 1), on a alors :

$$\nu U_h(h1_{B_\alpha}) \geqslant (1-\delta)\,||\,\lambda\,||^{-1}\lambda(B_\alpha) - \delta.$$

En reprenant les notations du lemme 3.4, on a :

$$\begin{array}{lll} U_\alpha h_1 \leqslant (1-\delta)a_\alpha & \text{sur} & B_\alpha^c \\ U_\alpha h_1 \leqslant C_\varepsilon + (1+\varepsilon)a_\alpha & \text{sur} & B_\alpha. \end{array}$$

En intégrant par rapport à λ on obtient :

$$||\,\lambda\,||a_\alpha \leqslant (1-\delta)a_\alpha[\,||\,\lambda\,|| - \lambda(B_\alpha)] + [C_\varepsilon + (1+\varepsilon)a_\alpha]\lambda(B_\alpha)$$
$$\delta\,||\,\lambda\,||\,a_\alpha \leqslant [C_\varepsilon + (\delta+\varepsilon)a_\alpha]\lambda(B_\alpha)$$
$$\frac{\lambda(B_\alpha)}{||\,\lambda\,||} \geqslant \frac{\delta a_\alpha}{C_\varepsilon + (\delta+\varepsilon)a_\alpha}$$

d'où

$$\varliminf_{\alpha\to 0} \frac{\lambda(B_\alpha)}{||\,\lambda\,||} \geqslant \frac{\delta}{\delta+\varepsilon}$$

puisque $\lim\limits_{\alpha\to 0} a_\alpha = \infty$.

Cette inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\varliminf_{\alpha\to 0} \frac{\lambda(B_\alpha)}{||\,\lambda\,||} = 1$$

d'où

$$\varliminf_{\alpha\to 0} \nu U_h(h1_{B_\alpha}) \geqslant 1 - 2\delta.$$

Mais $h \geqslant \beta$ donc $\alpha U_h U_\alpha h_1 \leqslant U_\beta 1 \leqslant \dfrac{1}{\beta}$.

La formule (3.2) peut s'écrire

$$R_\alpha \geqslant (1-\delta)\,||\,\lambda\,||^{-1}\nu U_h(h\,.\,1_{B_\alpha}) - \frac{1}{\beta\,.\,\lambda U_\alpha h_1}$$
$$\varliminf_{\alpha\to 0} R_\alpha \geqslant \frac{(1-\delta)(1-2\delta)}{||\,\lambda\,||}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $\delta \in]0, 1[$, on a bien

$$\varliminf_{\alpha\to 0} R_\alpha \geqslant \frac{1}{||\,\lambda\,||}. \quad \blacksquare$$

THÉORÈME 3.7. — Quelles que soient les fonctions f, g spéciales avec $\mu(g) > 0$ et les probabilités ν_1 et ν_2 sur (E, **E**), on a

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\nu_1 U_\alpha f}{\nu_2 U_\alpha g} = \frac{\mu(f)}{\mu(g)}.$$