

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

F. MARTIN

J.-L. PETIT

M. LITTAYE

Indépendance conditionnelle dans le modèle statistique bayésien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, n° 1 (1973), p. 19-40

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_1_19_0

© Gauthier-Villars, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Indépendance conditionnelle dans le modèle statistique bayésien

par

F. MARTIN

Service de Probabilités, Université de Paris VI^e

J.-L. PETIT

Département de Mathématiques, Université de Rouen

M. LITTAYE

Département de Mathématiques, Université de Paris VIII^e

RÉSUMÉ. — Dans le modèle statistique bayésien, le paramètre et l'observation sont conditionnellement indépendants par rapport à une statistique exhaustive. Dans une première partie, on part de cette notion de réduction qui peut se généraliser au cas d'un sous-paramètre et on étudie ses diverses propriétés. Dans une seconde partie on étudie l'indépendance conditionnelle de l'observation et du paramètre par rapport à un sous-paramètre. En associant les deux, on arrive enfin à une notion de réduction d'une expérience statistique pour une famille de mesures *a priori* dont on étudie les propriétés et les liens avec les notions classiques.

SUMMARY. — In the bayesian statistical model, parameter and observation are conditionnally independant given a sufficient statistic. First, we extend this notion of reduction to a situation involving a sub-parameter. Then we study the conditionnal independance of parameter and observation given a sub-parameter. At last, mixing this two concepts, we are led to the notion of reduction of a statistical experiment for a familly of prior measures, of which we study the properties and relations with the classical concepts.

NOTATIONS

— $(\Theta; \mathcal{H})$: espace mesurable des paramètres; $\mathcal{H}'$ une sous-tribu de $\mathcal{H}$.
 — $(X; \mathcal{A})$: espace mesurable des observations; $\mathcal{A}'$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

— P une transition de probabilité de $(\Theta; \mathcal{H})$ dans $(X; \mathcal{A})$ notée $(\Theta, \mathcal{H}) \xrightarrow{P} (X, \mathcal{A})$ induisant la famille $\mathcal{P}^\Theta = \{P(\theta, \cdot) \mid \theta \in \Theta\}$ de probabilités sur $(X; \mathcal{A})$; on notera aussi P^θ la probabilité $P(\theta; \cdot)$.

— M : une famille de probabilités *a priori* sur $(\Theta; \mathcal{H})$; on supposera M muni d'une tribu $\mathcal{G}$ qui rende mesurable les applications : $\mu \rightarrow \mu(H)$, $H \in \mathcal{H}$.

— Q notera la transition de probabilité de $(M; \mathcal{G})$ dans $(\Theta; \mathcal{H})$ définie par :

$$(\forall H \in \mathcal{H}), \quad Q(\mu; H) = \mu(H) \quad \text{c'est-à-dire } Q^\mu = \mu$$

— P sera dite dominée si la famille de probabilités $\mathcal{P}^\Theta$ est dominée par une mesure σ -finie λ et dans ce cas on appellera dominante privilégiée une probabilité $\bar{P}$ équivalente à la famille $\mathcal{P}^\Theta$ et de la forme :

$$\bar{P} = \sum_{\theta \in \bar{\Theta}} a_\theta P^\theta$$

où $\bar{\Theta}$ est une partie dénombrable de Θ et les a_θ des nombres positifs.

— Soit $(\Theta \times X; \mathcal{H} \vee \mathcal{A})$ l'espace mesurable produit de $(\Theta; \mathcal{H})$ et $(X; \mathcal{A})$; on notera aussi $\mathcal{H}$ (respectivement $\mathcal{A}$) la tribu sur $\Theta \times X$ des cylindres de base $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{A}$).

— Soit $\mathcal{P}(\Theta, \mathcal{H})$ l'ensemble des probabilités sur $(\Theta; \mathcal{H})$ et soit $\mu \in \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{H})$; on notera $P \circ \mu$ la probabilité sur $(\Theta \times X; \mathcal{H} \vee \mathcal{A})$ définie par [cf. [1]] :

$$(\forall H \in \mathcal{H}) \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \quad \left(P \circ \mu(H \times A) = \int_{\Theta} P(\theta; A) \mu(d\theta) \right)$$

on notera $P \circ \mu$ ou $P\mu$ la probabilité marginale de $P \circ \mu$ sur $(X; \mathcal{A})$.

— Si P est dominée par une mesure σ -finie λ et si $\mathcal{A}$ est une tribu à base dénombrable on a le résultat suivant [cf. [6], p. 194].

Il existe une fonction $f : \Theta \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{H} \vee \mathcal{A}$ mesurable vérifiant :

$$(\forall \theta \in \Theta) \quad f(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$$

La mesure $P \circ \mu$ sur $(\Theta \times X; \mathcal{H} \vee \mathcal{A})$ est alors dominée par la mesure produit $\mu \otimes \lambda$ ainsi que par le produit de ses marginales $\mu \otimes P_\mu$ et on a :

$$f \in \frac{dP \circ \mu}{d\mu \otimes \lambda}; \quad \int_{\Theta} f(\theta, \cdot) \mu(d\theta) \in \frac{dP_\mu}{d\lambda}$$

— A tout élément $\mu \in \mathcal{P}(\Theta; \mathcal{H})$ on associe une famille de probabilités $\mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}} = \{P_\mu^H \mid H \in \mathcal{H}\}$ définie par :

$$(\forall H \in \mathcal{H} \text{ tel que } \mu(H) = 0);$$

$$P_\mu^H = P_\mu$$

$$(\forall H \in \mathcal{H} \text{ tel que } \mu(H) > 0); (\forall A \in \mathcal{A}) \quad P_\mu^H(A) = \frac{1}{\mu(H)} \int_{\Theta} P(\theta; A) \mu(d\theta)$$

— La famille $\mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}}$ est dominée et P_μ est une dominante privilégiée.

— On peut remarquer que $(\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}))$, l'application

$$\theta \rightarrow \int_X f(x) P^\theta(dx)$$

est une version de $E_{P_\mu}[f/\mathcal{H}]$ pour tout $\mu \in \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{H})$ et par suite :

$$(\forall H \in \mathcal{H}) \quad \int_H E_{P_\mu}[f/\mathcal{H}] d\mu = \mu(H) E_{P_\mu^H}(f) = \mu(H) \int_X f(x) P_\mu^H(dx)$$

— S'il existe une version régulière de $\{E_{P_\mu}[H/\mathcal{A}]; H \in \mathcal{H}\}$ elle sera notée π_μ et appelée transition *a posteriori* de P pour $\mathcal{H}$ relativement à μ . Cette transition vérifie :

$$(\forall H \in \mathcal{H}) \quad (\pi_\mu(H) \in E_{P_\mu}[H/\mathcal{A}])$$

ou encore

$$(\forall H \in \mathcal{H}) \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \quad \left(\mu(H) P_\mu^H(A) = \int_A \pi_\mu(x; H) P_\mu(dx) \right)$$

— Si on prend une sous-tribu $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ on définit de la même façon la famille $\mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}'} = \{P_\mu^{H'}; H' \in \mathcal{H}'\}$ ainsi que la transition π'_μ .

— Soient $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$; la restriction de P à $(X; \mathcal{A}')$ sera notée P' et une version régulière de $\{E_{P_\mu}[H'/\mathcal{A}'], H' \in \mathcal{H}'\}$ sera appelée transition *a posteriori* de P' pour $\mathcal{H}'$ relativement à μ .

— Soient $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, trois sous-tribus de $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont dites conditionnellement indépendantes relativement (noté C. I. R.) à $\mathcal{F}_3$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée [cf. 6]:

- $(\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}_1)) \quad (\forall g \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}_2)) \quad (E_P[f g / \mathcal{F}_3] = E_P[f / \mathcal{F}_3] E_P[g / \mathcal{F}_3])$
- $(\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}_1)) \quad (E_P[f / \mathcal{F}_2] = E_P[E_P[f / \mathcal{F}_3] / \mathcal{F}_2])$
- $(\forall g \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}_2)) \quad (E_P[g / \mathcal{F}_1] = E_P[E_P[g / \mathcal{F}_3] / \mathcal{F}_1])$

— Si de plus on a $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_2$ alors la propriété suivante est équivalente à chacune des précédentes :

$$- (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}_1)) \quad (E_P[f/\mathcal{F}_3] \subset E_P[f/\mathcal{F}_2])$$

— Soit $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$. On dira que $\mathcal{H}'$ est caractérisée par ses atomes dans $\mathcal{H}$ si elle vérifie la propriété suivante : un élément de $\mathcal{H}$ est un élément de $\mathcal{H}'$ si et seulement si il est réunion d'atomes de $\mathcal{H}'$.

Cette propriété est en particulier vérifiée dans le cas suivant :

$$(\Theta, \mathcal{H}) = (\Theta', \mathcal{H}') \otimes (\Theta'', \mathcal{H}'').$$

— Si $(\Omega, \mathcal{I}, \lambda)$ est un espace de mesure, nous utiliserons la notation $(\forall_\lambda \omega)$ pour : « pour λ -presque tout $\omega \in \Omega$ ».

I. RÉDUCTION DANS L'ESPACE DES OBSERVATIONS

Soient :

$$(\Theta; \mathcal{H}) \xrightarrow{P} (X; \mathcal{A}), \quad M \subset \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{H}), \quad \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}, \quad \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$$

(I-1) DÉFINITION [cf. [5]]. — $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive si et seulement si :

$$(1) \quad (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')) \quad (\exists g \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')) \quad (\forall \theta \in \Theta) \quad (g \in E_{P^\Theta}[f/\mathcal{A}'])$$

(I-2) DÉFINITION [cf. [5]]. — $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive par paire si pour tout sous-ensemble Λ de Θ à deux éléments, $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Lambda)$ exhaustive.

Rappelons que si $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive par paire alors $\mathcal{A}'$ est exhaustive pour toute sous-famille dominée; en particulier si $\mathcal{P}^\Theta$ est dominée, les deux définitions précédentes sont équivalentes.

(I-3) LEMME. — Si $\mathcal{P}^\Theta$ est dominée alors $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive si et seulement si :

$$(2) \quad (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')) \quad (\forall \theta \in \Theta) \quad (E_{P^\Theta}[f] = E_{P^\Theta}[E_{\bar{P}}[f/\mathcal{A}']])$$

Démonstration. — Soit $\bar{P} = \Sigma a_\theta P^\theta$ une dominante privilégiée. Si $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive alors on a :

$$(\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')) \quad (\forall \theta \in \Theta) \quad (E_{\bar{P}}[f/\mathcal{A}'] \subset E_{P^\Theta}[f/\mathcal{A}'])$$

Réciproquement, si (2) est vérifié alors :

$$\begin{aligned} (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}')) \quad (\forall A' \in \mathcal{A}') \quad (\forall \theta \in \Theta) \\ \int_{A'} E_P[f/\mathcal{A}'] dP^\theta = E_{P^\Theta}[I_{A'} \cdot E_{\bar{P}}[f/\mathcal{A}']] = E_{P^\Theta}[E_{\bar{P}}[I_{A'} \cdot f/\mathcal{A}']] \\ = E_{P^\Theta}[I_{A'} \cdot f] = \int_{A'} f dP^\theta \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A})) (\forall \theta \in \Theta) \quad (E_{\bar{P}}[f/\mathcal{A}'] \subset E_{P\theta}[f/\mathcal{A}'])$$

c'est-à-dire (1). C. Q. F. D.

(I-4) DÉFINITION. — $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; M)$ si et seulement si :

$$(3) \quad (\forall \mu \in M) \quad (\mathcal{H}' \text{ et } \mathcal{A} \text{ sont C. I. R. à } \mathcal{A}' \text{ pour } P \circ \mu)$$

Remarque. — Soit $\mathcal{A}'$ une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; M)$.

Si on a $\mathcal{H}'' \subset \mathcal{H}'$, $M' \subset M$, $\mathcal{A}'' \supset \mathcal{A}'$ alors $\mathcal{A}''$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}''; M')$.

(I-5) PROPOSITION. — $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mu)$ si et seulement si $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}'})$ exhaustive.

Démonstration. — $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mu)$ si et seulement si :

$$- (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A})) (\forall H' \in \mathcal{H}') \quad \left(\int_{H'} f d(P \circ \mu) = \int_{H'} E_{P_{\circ \mu}}[f/\mathcal{A}'] d(P \circ \mu) \right)$$

$\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}'})$ exhaustive si et seulement si [cf. (I-3)] :

$$- (\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A})) (\forall H' \in \mathcal{H}') \quad (E_{P_{H'}}[f] = E_{P_{H'}}[E_{P_{\circ \mu}}[f/\mathcal{A}']])$$

Il suffit donc de montrer que les deux équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \int_{H'} f d(P \circ \mu) &= \int_{H'} E_{P_{\circ \mu}}[f/\mathcal{A}'] d(P \circ \mu) \\ E_{P_{H'}}[f] &= E_{P_{H'}}[E_{P_{\circ \mu}}[f/\mathcal{A}']] \end{aligned}$$

Si $\mu(H') = 0$ elles sont vérifiées.

Si $\mu(H') > 0$ les deux premiers membres, ainsi que les deux seconds, diffèrent du facteur multiplicatif $\mu(H')$. C. Q. F. D.

(I-6) REMARQUE. — Existence d'une réduction minimale.

On en déduit, puisque la famille $\mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}'}$ admet P_μ comme dominante privilégiée, qu'il existe une sous-tribu $\mathcal{A}^0$, P_μ complète dans $\mathcal{A}$ telle que : pour qu'une sous-tribu $\mathcal{A}'$ soit une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mu)$ il faut et il suffit que ; $\mathcal{A}^0 \subset \mathcal{A}'[P_\mu]$.

(I-7) PROPOSITION. — Considérons les propositions suivantes :

- 1) $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive.
- 2) $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive par paire.
- 3) $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}; \mathcal{P}(\Theta; \mathcal{H}))$.
- 4) $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}; \mathcal{P}_2(\Theta; \mathcal{H}))$ où $\mathcal{P}_2(\Theta; \mathcal{H})$ désigne l'ensemble des mesures *a priori* qui sont combinaisons linéaires convexes de deux Dirac. On a :

$$1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Leftrightarrow 2)$$

Si de plus la famille $\mathcal{P}^\Theta$ est dominée, toutes ces propositions sont équivalentes.

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 3) Soient

$$f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad g \in \bigcap_{\theta \in \Theta} E_{P^\theta}[f/\mathcal{A}']$$

On a donc :

$$(\forall \theta \in \Theta) (E_{P^\theta}[f] = E_{P^\theta}[g]) \quad \text{d'où} \quad (\forall \mu \in \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{H})) \quad g \in E_{P_2\mu}[f/\mathcal{A}']$$

Ainsi :

$$E_{P_2\mu}[f/\mathcal{H}] = E_{P_2\mu}[g/\mathcal{H}] = E_{P_2\mu}[E_{P_2\mu}[f/\mathcal{A}']/\mathcal{H}]$$

c'est-à-dire : $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}'$ pour $P \circ \mu$.

3) $\Rightarrow$ 4) Évident.

4) $\Rightarrow$ 2) Soit

$$\mu = \lambda \delta_{\theta_1} + (1 - \lambda) \delta_{\theta_2}$$

On a :

$$(\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{A})) \quad E_{P_2\mu}[f/\mathcal{A}'] \subset E_{P_2\mu}[f/\mathcal{H} \vee \mathcal{A}']$$

Ainsi :

$$(\forall \theta \in \{\theta_1, \theta_2\}) (\forall A' \in \mathcal{A}') \quad \left(\int_{A'} f dP^\theta = \int_{A'} E_{P_2\mu}[f/\mathcal{A}'] dP^\theta \right)$$

D'où

$$E_{P_2\mu}[f/\mathcal{A}'] \subset E_{P_{\theta_i}}[f/\mathcal{A}'] \quad i = 1, 2$$

Ainsi $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Lambda)$ exhaustive avec $\Lambda = \{\theta_1, \theta_2\}$.

2) $\Rightarrow$ 4) Même démonstration que 1) $\Rightarrow$ 3) en remplaçant Θ par Λ .
Dans le cas dominé 2) $\Rightarrow$ 1) [cf. [5]]. C. Q. F. D.

On peut se demander si l'introduction d'une sous-tribu $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ permet une plus forte réduction dans l'espace des observations que l'exhaustivité. Hajek [cf. [4]] énonce le résultat suivant : « Si $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mathcal{P}(\Theta; \mathcal{H}))$ et si $\mathcal{H}' \neq \{\emptyset, \Theta\}$ alors $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}; \mathcal{P}(\Theta; \mathcal{H}))$ ».

Montrons sur un exemple que ceci n'est pas vrai. Soient :

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{P}(\Theta), \quad X = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{H}' = \{\emptyset, \{\theta_1, \theta_2\}, \{\theta_3\}, \Theta\}, \quad \mathcal{A}' = \{\emptyset, \{x_1, x_2\}, \{x_3\}, X\}$$

La transition P de $(\Theta; \mathcal{H})$ dans $(X; \mathcal{A})$ est donnée par la matrice markovienne :

	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	1/3	2/3	0
x_2	2/3	1/3	0
x_3	0	0	1

$\mathcal{A}'$ n'est pas $(\mathcal{H}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive et cependant $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mathcal{P}_2(\Theta; \mathcal{H}))$. En effet pour toute mesure *a priori* μ la famille $\mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}'}$ est donnée par :

	$\{\theta_1, \theta_2\}$	$\{\theta_3\}$
x_1	$\frac{\mu_1 + 2\mu_2}{3(\mu_1 + \mu_2)}$	0
x_2	$\frac{2\mu_1 + \mu_2}{3(\mu_1 + \mu_2)}$	0
x_3	0	1

où $\mu_i = \mu(\theta_i)$

et $\mathcal{A}'$ est bien $(\mathcal{A}; \mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}'})$ exhaustive.

On a cependant le résultat suivant :

(I-8) PROPOSITION. — Supposons que les probabilités $\{P^\theta; \theta \in \Theta\}$ soient toutes équivalentes et que $\mathcal{H}' \neq \{\emptyset; \Theta\}$. Si $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mathcal{P}_2(\Theta; \mathcal{H}))$ alors $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive.

Démonstration. — Si $\mathcal{A}'$ n'est pas $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive, il existe un couple $\Lambda = (\theta, \theta') \in \Theta^2$ tel que $\mathcal{A}'$ n'est pas $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Lambda)$ exhaustive et par suite $\frac{dP^\theta}{dP^{\theta'}}$ n'a pas de version $\mathcal{A}'$ mesurable.

Si $\mathcal{H}'$ sépare θ et θ' soient $H' \in \mathcal{H}'$ tel que $\theta \in H'$ et $\theta' \in H'^c$ (complémentaire de H') et $\mu = \frac{1}{2}[\delta_\theta + \delta_{\theta'}]$. On a alors $P_\mu^{H'} = P^\theta$; $P_\mu^{H'^c} = P^{\theta'}$ et $\mathcal{A}'$ ne peut être exhaustive pour $(\mathcal{A}; \mathcal{P}_\mu^{\mathcal{H}'})$.

Si $\mathcal{H}'$ ne sépare pas θ et θ' il existe θ'' tel que $\mathcal{H}'$ sépare θ'' et $\{\theta, \theta'\}$.
 De l'égalité $\frac{dP^\theta}{dP^{\theta'}} = \frac{dP^\theta}{dP^{\theta''}} \times \frac{dP^{\theta''}}{dP^{\theta'}}$ on en déduit que l'une des densités $\frac{dP^\theta}{dP^{\theta''}}$ ou $\frac{dP^{\theta''}}{dP^{\theta'}}$ n'a pas de version $\mathcal{A}'$ mesurable et il suffit alors de reprendre le raisonnement précédent avec le nouveau couple. C. Q. F. D.

Dans le cadre de l'exhaustivité on a le résultat suivant :

si P est dominée par λ alors $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive si et seulement si :
 il existe pour chaque $\theta \in \Theta$, une version $f(\theta, \cdot)$ de la densité $\frac{dP^\theta}{d\lambda}$ de la forme $f(\theta, x) = \phi(\theta, x)\eta(x)$ avec $\phi(\theta, \cdot)$ $\mathcal{A}'$ -mesurable.

Cette propriété a déjà été utilisée dans (I-8).

La réduction étudiée ici possède aussi des propriétés de factorisation des densités.

(I-9) PROPOSITION.

1) Si $P \circ \mu$ est dominée par $P_\mu \otimes \mu$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

a) $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mu)$.

b) Il existe une version de $\frac{dP \circ \mu}{dP_\mu \otimes \mu}$ de la forme $\varphi\psi$ avec :

$$\begin{cases} \varphi \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}' \text{ mesurable} \\ E_{P_\mu \otimes \mu}[\psi / \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}] = 1 \end{cases}$$

2) Si P est dominée par λ et $\mathcal{A}$ est dénombrablement engendrée les propriétés précédentes sont encore équivalentes à la suivante :

c) Il existe deux fonctions φ, η vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}' \text{ mesurable} \\ \eta \mathcal{H} \vee \mathcal{A} \text{ mesurable et } (\forall x), E_\mu[\eta(\cdot, x) / \mathcal{H}'] \ni E_\mu[\eta(\cdot, x)] \\ (\forall_\mu \theta) \varphi(\theta, \cdot) \eta(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda} \end{cases}$$

Démonstration :

1) Supposons $P \circ \mu$ dominé par $P_\mu \otimes \mu$ et soient :

$$g \in \frac{dP \circ \mu}{dP_\mu \otimes \mu}, \quad \varphi \in E_{P_\mu \otimes \mu}[g / \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}']$$

- a) $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ et $\mathcal{H}'$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}'$ pour $P \otimes \mu$
 $\Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{A}), (\forall H' \in \mathcal{H}'), E_{P \otimes \mu}[AH'] = E_{P \otimes \mu}[H'E_{P \otimes \mu}[A/\mathcal{A}']]$
 b) $\Leftrightarrow E_{P \otimes \mu}[g/\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}] \supset E_{P \otimes \mu}[g/\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}']$
 $\Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{A}), (\forall H' \in \mathcal{H}'), E_{P \otimes \mu}[AH'g] = E_{P \otimes \mu}[AH'\varphi]$

Or

$$E_{P \otimes \mu}[AH'g] = E_{P \otimes \mu}[AH']$$

et

$$E_{P \otimes \mu}[AH'\varphi] = E_{P \otimes \mu}[H'E_{P \otimes \mu}[A/\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}']]$$

mais

$$E_{P \otimes \mu}[A/\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}'] \supset E_{P \otimes \mu}[A/\mathcal{A}'] = E_{P \otimes \mu}[A/\mathcal{A}']$$

d'où

$$E_{P \otimes \mu}[AH'\varphi] = E_{P \otimes \mu}[H'E_{P \otimes \mu}[A/\mathcal{A}']]$$

L'équivalence en découle.

2) Supposons P dominée par λ

c) $\Rightarrow$ a) Soit

$$\varepsilon \in E_{\lambda \otimes \mu}[\eta/\mathcal{A}] \subset E_{\lambda \otimes \mu}[\eta/\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}]$$

Posons :

$$\text{si } H' \in \mathcal{H}' \text{ et } \mu(H') \neq 0 \quad \Phi^{H'}(.) = \frac{1}{\mu(H')} \int_{H'} \varphi(\theta, .) \mu(d\theta)$$

$$\text{si } H' \in \mathcal{H}' \text{ et } \mu(H') = 0 \quad \Phi^{H'}(.) = \int_{\Theta} \varphi(\theta, .) \mu(d\theta)$$

ε est $\mathcal{A}$ mesurable, pour tout $H' \in \mathcal{H}'$, $\Phi^{H'}$ est $\mathcal{A}'$ mesurable et $\varepsilon \Phi^{H'}$ est une version de $\frac{dP_{\mu}^{H'}}{d\lambda}$; $\mathcal{A}'$ est donc exhaustive pour $(\mathcal{A}; \mathcal{P}_{\mu}^{\mathcal{H}'})$ d'où a) (cf. [I-5]).

Supposons de plus que $\mathcal{A}$ est dénombrablement engendrée. Alors $P \otimes \mu$ est dominée par $P_{\mu} \otimes \mu$.

b) $\Rightarrow$ c) Soient :

$$l \in \frac{dP_{\mu}}{d\lambda},$$

et $\mathcal{A}_0$ une algèbre dénombrable engendrant $\mathcal{A}$.

Posons :

$$\eta = \psi l; \quad \varphi \text{ est } \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}' \text{ mesurable}$$

On a

$$(\forall H \in \mathcal{H}), (\forall A \in \mathcal{A}), \int_H \int_A \varphi(\theta, x) \eta(\theta, x) d\lambda d\mu = \int_H P^{\theta}(A) d\mu$$

Par suite si

$$\Theta_1 = \left\{ \theta \in \Theta, (\forall A \in \mathcal{A}_0) P^{\theta}(A) = \int_A \varphi(\theta, x) \eta(\theta, x) d\lambda \right\}$$

alors $\mu(\Theta_1) = 1$ et $(\forall \theta \in \Theta_1), \varphi(\theta, \cdot) \eta(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$

De plus

$$\begin{aligned} & (\forall_{P_\mu} x), E_\mu[\psi(\cdot, x)/\mathcal{H}'] = 1 \\ \text{d'où} & (\forall_\lambda x), E_\mu[\eta(\cdot, x)/\mathcal{H}'] = l(x) = E_\mu[\eta(\cdot, x)] \end{aligned}$$

(I-10) COROLLAIRE. — Soient :

$$(\Theta, \mathcal{H}) = (\Theta', \mathcal{H}') \otimes (\Theta'', \mathcal{H}''), \quad \mu = \nu \circ \mu'$$

où μ' est une probabilité sur $(\Theta', \mathcal{H}')$

ν est une transition de probabilité de $(\Theta'; \mathcal{H}')$ dans $(\Theta''; \mathcal{H}'')$.

Si P est dominée par λ et si $\mathcal{A}'$ est dénombrablement engendrée, une sous-tribu $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mu)$ si et seulement si :

c') il existe deux fonctions φ, η vérifiant :

- φ est $\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}'$ mesurable,
- η est $\mathcal{H} \vee \mathcal{A}$ mesurable et :

$$(\forall_\lambda x) (\forall_{\mu'} \theta') \int_{\Theta''} \eta(\theta', \theta'', x) \nu(\theta'', d\theta'') \text{ indépendant de } \theta'$$

$$\text{—} \quad (\forall_\mu \theta), \quad \varphi(\theta, \cdot) \eta(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cadre de la théorie de la décision. Soit $(\Delta; \mathcal{D})$ l'espace mesurable des actions ; une stratégie est une transition de probabilité de $(X; \mathcal{A})$ dans $(\Delta; \mathcal{D})$. Soit l une fonction de perte, fonction positive définie sur $(\Theta \times \Delta)$, $\mathcal{H} \vee \mathcal{D}$ mesurable ; la fonction de risque d'une stratégie S est définie par :

$$(\forall \theta \in \Theta), \quad \lambda(\theta, S) = \int_{X \times \Delta} l(\theta, \cdot) d[S \circ P^\theta] = E_{S \circ P_\theta \delta_\theta}[l]$$

le risque bayésien d'une stratégie S pour la mesure *a priori* μ est défini par :

$$\lambda(\mu, S) = \int_{\Theta} \lambda(\theta, S) \mu(d\theta) = E_{S \circ P_\mu}[l]$$

On a le résultat suivant :

(I-11) THÉORÈME. — $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; \mu)$ si et seulement si :

quel que soit l'espace d'action $(\Delta; \mathcal{D})$ localement compact à base dénombrable,

quelle que soit la stratégie S , $\mathcal{A}$ mesurable,
il existe une stratégie S' , $\mathcal{A}'$ mesurable, telle que :

les mesures $S \circ P \circ \mu$ et $S' \circ P \circ \mu$ aient même restriction à la tribu $\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}' \vee \mathcal{D}$ (et par suite les deux stratégies ont même risque bayésien pour μ si la fonction de perte est $\mathcal{H}' \vee \mathcal{D}$ mesurable).

Démonstration.

C. N. Soit $A \in \mathcal{A}$, prenons $\Delta = \{0, 1\}$, $S(x, \{1\}) = 1_A(x)$. Il existe S' , $\mathcal{A}'$ mesurable, telle que $E_{P_{S\mu}}[S' \{1\} / \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}'] = E_{P_{S\mu}}[S \{1\} / \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}']$ par suite $E_{P_{S\mu}}[A / \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}'] \supset E_{P_{S\mu}}[A / \mathcal{A}']$.

C. S. Soit $S : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\Delta, \mathcal{D})$. Par suite des hypothèses sur $(\Delta; \mathcal{D})$ il existe une transition de probabilité de $(X; \mathcal{A}')$ dans $(\Delta; \mathcal{D})$ vérifiant :

$$(\forall D \in \mathcal{D}), \quad S'(D) \in E_{P_{S\mu}}[S(D) / \mathcal{A}']$$

On a : $(\forall D \in \mathcal{D}), (\forall A' \in \mathcal{A}'), (\forall H' \in \mathcal{H}')$

$$\begin{aligned} S \circ P \circ \mu(H' \times A' \times D) &= E_{P_{S\mu}}[1_{A'} \cdot 1_{H'} \cdot E_{P_{S\mu}}[S(D) / \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}']] \\ &= E_{P_{S\mu}}[1_{A'} \cdot 1_{H'} \cdot E_{P_{S\mu}}[S(D) / \mathcal{A}']] \\ &= E_{P_{S\mu}}[1_{A'} \cdot 1_{H'} \cdot S'(D)] \\ &= S' \circ P \circ \mu[H' \times A' \times D] \quad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que l'invariance du modèle fournit des réductions.

(I-12) DÉFINITION. — Une transformation g est dite laisser le modèle invariant si g est une bijection bimesurable de X dans X et de Θ dans Θ vérifiant :

$$(\forall \theta \in \Theta) (\forall A \in \mathcal{A}) \quad (P^{g, \theta}(g \cdot A) = P^\theta(A))$$

A une telle transformation g on associe les sous-tribus des invariants :

$$\mathcal{A}_g = \{A \in \mathcal{A} \mid g^{-1} \cdot A = A\}; \quad \mathcal{H}_g = \{H \in \mathcal{H} \mid g^{-1}H = H\}$$

(I-13) PROPOSITION. — Soit g une transformation laissant le modèle invariant.

Si $\mathcal{H}_g = \mathcal{H}$ alors $\mathcal{A}_g$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive.

Démonstration. — A toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable, bornée, nous pouvons associer la suite de fonctions mesurables bornées :

$$f_n : X \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(g^i x)$$

En utilisant le théorème ergodique ponctuel (cf. [7]) on sait que la suite f_n

converge sauf sur un ensemble N_f tel que $(\forall \theta \in \Theta) \ P^{\theta}(N_f) = 0$. Posons donc :

$$f^*(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{si } x \notin N_f \\ 0 & \text{si } x \in N_f \end{cases}$$

On a alors :

$$(\forall \theta \in \Theta) \quad f^* \in E_{P^{\theta}}[f/\mathcal{A}_g]$$

(I-14) PROPOSITION. — Si μ est une mesure invariante par g alors $\mathcal{A}_g$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(\mathcal{P}^{\Theta}; \mathcal{H}_g; \mu)$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $(\forall H \in \mathcal{H}_g) \ P_{\mu}^H$ est invariante par g .

$(\forall A \in \mathcal{A}) \ (\forall H \in \mathcal{H}_g; \mu(H) > 0)$ on a :

$$(g \cdot P_{\mu}^H)(A) = P_{\mu}^H(g^{-1} \cdot A) = \frac{\int_H P^{\theta}(g^{-1} \cdot A) \mu(d\theta)}{\mu(H)} = \frac{\int_H P^{g\theta}(A) \mu(d\theta)}{\mu(H)} = P_{\mu}^H(A)$$

De même, si $\mu(H) = 0$ on a $(\forall A \in \mathcal{A}) \ (g \cdot P_{\mu}^H)(A) = P_{\mu}^H(A)$.

Considérons maintenant le cas d'un groupe G de transformations laissant le modèle invariant et posons :

$$\mathcal{A}_G = \bigcap_{g \in G} \mathcal{A}_g; \quad \mathcal{H}_G = \bigcap_{g \in G} \mathcal{H}_g$$

Nous allons supposer le modèle dominé et si $\mathcal{A}'$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$ nous noterons $\tilde{\mathcal{A}}'$ la complétée de $\mathcal{A}'$ pour une probabilité équivalente à la famille $\mathcal{P}^{\Theta}$. Nous allons montrer sur un exemple que nous sommes obligés, pour généraliser la proposition précédente, de remplacer le couple $(\mathcal{A}_G; \mathcal{H}_G)$ par le couple $(\tilde{\mathcal{A}}_G; \mathcal{H}_G)$ où $\tilde{\mathcal{A}}_G = \bigcap_{g \in G} \tilde{\mathcal{A}}_g$. Considérons en effet le modèle suivant :

$$(X; \mathcal{A}) = (\mathbb{R}; \mathcal{B})$$

$\mathcal{P}^{\Theta}$ = ensemble des probabilités absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce modèle est laissé invariant par le groupe G des transformations g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne déplaçant qu'un nombre fini de points. Nous avons alors :

$$\mathcal{A}_G = \{ \emptyset; \mathbb{R} \}; \quad \mathcal{H}_G = \mathcal{H}$$

(I-15) PROPOSITION. — Soit G un groupe de transformations laissant le modèle invariant. Si μ est une mesure sur $(\Theta; \mathcal{H})$ invariante par G , $\tilde{\mathcal{A}}_G$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(\mathcal{P}^{\Theta}; \mathcal{H}_G; \mu)$.

Remarque. — Nous avons le résultat suivant (cf. [8]).

Si G est un groupe de transformations localement compact, dénombrable à l'infini et si l'application $(g, x) \mapsto g.x$ est $\mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ mesurable, $\mathcal{B}$ étant la tribu borélienne de G , alors on a :

$$\tilde{\mathcal{A}}_G = \overline{\mathcal{A}}_G$$

II. RÉDUCTION DANS L'ESPACE DES PARAMÈTRES

Soient :

$$(\Theta; \mathcal{H}) \stackrel{P}{\prec} (X; \mathcal{A}), \quad M \subset \mathcal{P}(\Theta; \mathcal{H}), \quad \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}, \quad \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$$

(II-1) DÉFINITION. — $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}')$ si la restriction P' de P à $\mathcal{A}'$ est $\mathcal{H}'$ mesurable, c'est-à-dire si $(\forall A' \in \mathcal{A}')$ l'application $\theta \rightarrow P^{\theta}(A')$ est $\mathcal{H}'$ mesurable.

(II-2) DÉFINITION. — $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}'; M)$ si $(\forall \mu \in M)$ $\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}'$ sont C. I. R. à $\mathcal{H}'$ pour $P \circ \mu$.

(II-3) PROPOSITION. — Considérons les propositions suivantes :

- 1) $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}')$
- 2) $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}'; \mathcal{P}(\Theta; \mathcal{H}))$
- 3) $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}'; \mathcal{P}_2(\Theta; \mathcal{H}))$

On a $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$

Si $\mathcal{H}'$ est caractérisé par ses atomes dans $\mathcal{H}$ alors $3) \Rightarrow 1)$.

Démonstration. — $1) \Rightarrow 2)$ car $(\forall \mu \in \mathcal{P}(\Theta; \mathcal{H}))$, $(\forall A' \in \mathcal{A}')$ l'application $\theta \rightarrow P^{\theta}(A')$ est une version $\mathcal{H}'$ mesurable de $E_{P \circ \mu}[A'/\mathcal{H}]$.

Supposons $\mathcal{H}'$ caractérisé par ses atomes dans $\mathcal{H}$. Pour vérifier 1) il suffit donc de montrer que la restriction de P à $\mathcal{A}'$ est constante sur les atomes de $\mathcal{H}'$.

$3) \Rightarrow 1)$ Soient θ_1 et θ_2 deux éléments d'un même atome H' de $\mathcal{H}'$ et

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_{\theta_1} + \delta_{\theta_2})$$

$$(\forall A' \in \mathcal{A}') \quad E_{P \circ \mu}[A'/\mathcal{H}'] \subset E_{P \circ \mu}[A'/\mathcal{H}]$$

d'où

$$P^{\theta_1}(A') = P^{\theta_2}(A').$$

(II-4) REMARQUE. — Supposons qu'il existe une transition *a posteriori* π_{μ}

de P pour $\mathcal{H}$ relativement à μ . Les deux propositions sont alors équivalentes :

- $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}'; \mu)$
- $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(\pi_\mu; \mathcal{A}'; P_\mu)$.

En effet on a :

$$P \circ \mu = \pi_\mu \circ P_\mu$$

(II-5) PROPOSITION. — Si

- $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}; \mu)$
- et si $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}'; \mu)$
- alors $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}; \mu)$

Démonstration. — En effet

$$\begin{aligned} (\forall A \in \mathcal{A}) \quad E_{P_\mu}[A/\mathcal{H}] &= E_{P_\mu}[E_{P_\mu}[A/\mathcal{A}']/\mathcal{H}] \\ &= E_{P_\mu}[E_{P_\mu}[A/\mathcal{A}']/\mathcal{H}'] \end{aligned}$$

(II-6) REMARQUE. — Existence d'une réduction minimale.

Soit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Il existe une tribu $\mathcal{H}^0$ complète dans $\mathcal{H}$ telle que : pour que $\mathcal{H}'$ soit une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}'; \mu)$, il faut et il suffit que : $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}^0[\mu]$.

En effet il suffit de prendre $\mathcal{H}^0$ tribu μ -complète dans $\mathcal{H}$ engendrée par la restriction de P à $\mathcal{A}'$.

La réduction dans l'espace des paramètres possède elle aussi des propriétés de factorisation des densités.

(II-7) PROPOSITION. — Si P est dominé par λ et si $\mathcal{A}$ est dénombrablement engendrée alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A})$,
- b) il existe une fonction $f, \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}$ mesurable telle que :

$$\forall \theta \in \Theta, \quad f(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$$

Démonstration :

b) $\Rightarrow$ a) car $(\forall A \in \mathcal{A})$ l'application $\left(\theta \rightarrow \int_A f(\theta, \cdot) d\lambda \right)$ est $\mathcal{H}'$ mesurable

a) $\Rightarrow$ b) résulte de [6], p. 194.

(II-8) PROPOSITION.

1) Si $P \circ \mu$ est dominée par $\lambda \otimes \mu$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}'; \mu)$

b) il existe une version de $\frac{dP \circ \mu}{d\lambda \otimes \mu}$ de la forme $\varphi\psi$ avec :

$$\begin{cases} \varphi \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}' \text{ mesurable} \\ E_{\lambda \otimes \mu}[\psi/\mathcal{H} \vee \mathcal{A}'] = 1 \end{cases}$$

2) Si P est dominé par λ et $\mathcal{A}$ est dénombrablement engendrée les propriétés précédentes sont encore équivalentes à chacune des deux suivantes :

c) il existe deux fonctions φ, η vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}' \text{ mesurable} \\ \eta \mathcal{H} \vee \mathcal{A} \text{ mesurable et } (\forall_\mu \theta) \quad E_\lambda[\eta(\theta, \cdot)/\mathcal{A}'] \text{ ne dépend pas de } \theta \\ (\forall_\mu \theta) \quad \varphi(\theta, \cdot) \eta(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda} \end{cases}$$

d) il existe une fonction $f, \mathcal{H} \vee \mathcal{A}$ mesurable vérifiant :

$$\begin{cases} E_{\lambda \otimes \mu}[f/\mathcal{H} \vee \mathcal{A}'] \supset E_{\lambda \otimes \mu}[f/\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}'] \\ (\forall_\mu \theta) \quad f(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda} \end{cases}$$

Démonstration.

1) Supposons $P \circ \mu$ dominée par $\lambda \otimes \mu$ et soit $f \in \frac{dP \circ \mu}{d\lambda \otimes \mu}$

$$b) \Leftrightarrow E_{\lambda \otimes \mu}[f/\mathcal{H} \vee \mathcal{A}'] \supset E_{\lambda \otimes \mu}[f/\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}']$$

La démonstration de $a) \Leftrightarrow b)$ est analogue à celle de (I-9).

2) Supposons P dominée par λ .

c) $\Rightarrow$ d) En prenant $f = \varphi\eta$.

d) $\Rightarrow$ c) Évident.

Supposons de plus $\mathcal{A}$ dénombrablement engendrée, alors $P \circ \mu$ est dominée par $\lambda \otimes \mu$.

b) $\Rightarrow$ c) On démontre encore de façon analogue à (I-9) que :

$$(\forall_\mu \theta) \quad \varphi(\theta, \cdot) \psi(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$$

et ici :

$$E_{\lambda \otimes \mu}[\psi/\mathcal{H} \vee \mathcal{A}'] = 1$$

c'est-à-dire :

$$(\forall_\mu \theta) \quad E_\lambda[\psi(\theta, \cdot)/\mathcal{A}'] = 1.$$

COROLLAIRE. — Supposons que $(X; \mathcal{A}) = (X'; \mathcal{A}') \otimes (X''; \mathcal{A}'')$ et que $\lambda = \gamma \circ \lambda'$ (où γ est une transition de probabilité de $(X'; \mathcal{A}')$ dans $(X''; \mathcal{A}'')$)

et λ' une probabilité sur $(X'; \mathcal{A}')$) est une mesure dominant P . Supposons de plus la tribu $\mathcal{A}$ dénombrablement engendrée. Alors, pour qu'une sous-tribu $\mathcal{H}'$ soit une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}'; \mu)$, il faut et il suffit que : il existe deux fonctions φ et η telles que :

- $(\forall \mu \in \mathcal{M}), \quad \varphi(\theta, \cdot) \eta(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$
- φ est $\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}'$ mesurable
- $(\forall \mu \in \mathcal{M}) \quad \int \eta(\theta, x', x'') \gamma(x', dx'') \text{ ne dépend pas de } \theta.$

III. RÉDUCTION

Soient :

$$(\Theta, \mathcal{H}) \stackrel{P}{\sim} (X, \mathcal{A}), \quad M \subset \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{H}), \quad \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}, \quad \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$$

(III-1) DÉFINITION. — $(\mathcal{H}'; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ pour $(P; M)$ si et seulement si :

- a) $(\forall \mu \in M) \mathcal{H}$ et $\mathcal{A}'$ sont C. I. R. à $\mathcal{H}'$ pour $P \circ \mu$
- b) $(\forall \mu \in M) \mathcal{A}$ et $\mathcal{H}'$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}'$ pour $P \circ \mu$

(III-2) REMARQUE. — On utilise aussi une définition plus forte que (III-1) en y remplaçant a) par a') $\mathcal{H}$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}')$ (cf. (II-1)).

(III-3) REMARQUE. — La définition (III-1) ne présente d'intérêt que si M est une famille restreinte de mesures *a priori*.

En effet si les probabilités $(P^\theta; \theta \in \Theta)$ sont équivalentes, si la sous-tribu $\mathcal{H}'$ est engendrée par ses atomes dans $\mathcal{H}$ et non triviale, alors la propriété de réduction partielle : $(\mathcal{H}'; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ pour $(P; \mathcal{P}_2(\Theta; \mathcal{H}))$ entraîne (en utilisant (I-8), (II-5) et (II-3)) la propriété de réduction « totale » :

- P est $\mathcal{H}'$ mesurable,
- $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A}; \mathcal{P}^\Theta)$ exhaustive.

(III-4) DÉFINITION. — Soient $(\mathcal{H}'; \mathcal{A}')$ et $(\mathcal{H}''; \mathcal{A}'')$ deux réductions de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ pour $(P; M)$. $(\mathcal{H}'; \mathcal{A}')$ est dite plus forte que $(\mathcal{H}''; \mathcal{A}'')$ si :

$$\begin{cases} \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}'' & [\mu; \mu \in M] \\ \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}'' & [P \circ \mu; \mu \in M] \end{cases}$$

(III-5) PROPOSITION. — Soient $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ et μ une probabilité *a priori* sur $(\Theta; \mathcal{H})$.

Parmi toutes les réductions $(\mathcal{H}'; \mathcal{A}')$ de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ pour $(P; \mu)$ vérifiant $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}'$ il en existe une plus forte.

Démonstration.

— On définit deux suites de tribus; $(\mathcal{H}_{2n+1}; n \in \mathbb{N})$, $(\mathcal{A}_{2n+2}; n \in \mathbb{N})$ par [I-6] et [II-6] :

- $\mathcal{H}_1$ = complétée pour μ de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}$,
- $\mathcal{A}_{2n+2}$ = sous-tribu $P \circ \mu$ complète de $\mathcal{A}$, réduction minimale de $\mathcal{A}$ pour $(\mathcal{H}_{2n+1}; P; \mu)$,
- $\mathcal{H}_{2n+1}$ = [sous-tribu μ complète de $\mathcal{H}$, réduction minimale de $\mathcal{H}$ pour $(\mathcal{A}_{2n}; P; \mu)] \vee \mathcal{H}_0$.

— On montre par récurrence que les deux suites sont croissantes.

— Soient :

$$\mathcal{H}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mathcal{H}_{2n+1}, \quad \mathcal{A}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mathcal{A}_{2n+2}$$

— $(\mathcal{H}_\infty; \mathcal{A}_\infty)$ est une réduction de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ pour $(P; \mu)$; en effet :

- $(\forall n \geq 1)$ $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}_{2n+1}$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}_{2n+2}$ pour $P \circ \mu$
- d'où $(\forall n \geq 1)$ $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}_{2n+1}$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}_\infty$ pour $P \circ \mu$

d'où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}_\infty$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}_\infty$ pour $P \circ \mu$ [9].

De même

- $(\forall n \geq 1)$ $\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}_{2n}$ sont C. I. R. à $\mathcal{H}_{2n+1}$ pour $P \circ \mu$
- d'où $(\forall n \geq 1)$ $\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}_{2n}$ sont C. I. R. à $\mathcal{H}_\infty$ pour $P \circ \mu$

d'où $\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}_\infty$ sont C. I. R. à $\mathcal{H}_\infty$ pour $P \circ \mu$.

— De plus on a $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_\infty$.

— Soit $(\mathcal{H}'; \mathcal{A}')$ une réduction de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ pour $(P; \mu)$ vérifiant $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}'$.

On montre par récurrence que l'on a :

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mathcal{H}_{2n+1} &\subset \mathcal{H}' [\mu] \\ \mathcal{A}_{2n+2} &\subset \mathcal{A}' [P \circ \mu] \end{aligned}$$

et par suite $\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{H}' [\mu]$ et $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}' [P \circ \mu]$.

(III-6) THÉORÈME. — Soient :

$$(M, \mathcal{G}) \stackrel{Q}{\sim} (\Theta; \mathcal{H}) \stackrel{P}{\sim} (X, \mathcal{A}), \quad \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}, \quad \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}, \quad \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$$

Hypothèses :

- 1) $\mathcal{G}'$ est une réduction de $\mathcal{G}$ pour $(Q; \mathcal{H}')$
- 2) $\mathcal{H}'$ est une réduction de $\mathcal{H}$ pour $(P; \mathcal{A}')$
- 3) $\mathcal{A}'$ est une réduction de $\mathcal{A}$ pour $(P; \mathcal{H}'; M)$
- 4) La tribu $\mathcal{A}'$ est dénombrablement engendrée

5) La tribu $\mathcal{H}'$ est dénombrablement engendrée et admet une classe compacte dénombrable $\mathcal{K}$ d'approximation pour les mesures μ , $\mu \in \mathbf{M}$.

Conclusion. — Il existe une transition de probabilité π :

$$(\mathbf{M}, \mathcal{G}') \times (\mathbf{X}, \mathcal{A}') \prec (\Theta, \mathcal{H})$$

telle que pour tout $\mu \in \mathbf{M}$, $\pi(\mu, \cdot)$ est une transition *a posteriori* de $\mathbf{P}$ pour $\mathcal{H}$ relativement à μ c'est-à-dire :

$$(\forall \mu \in \mathbf{M}) (\forall H' \in \mathcal{H}') \quad \pi(\mu, \cdot, H') \in E_{P_\mu}(H'/\mathcal{A})$$

Démonstration. — L'hypothèse 3) entraîne que toute transition *a posteriori* de $\mathbf{P}'$ pour $\mathcal{H}'$ relativement à μ est aussi une transition *a posteriori* de $\mathbf{P}$ pour $\mathcal{H}'$ relativement à μ . Les hypothèses 1) et 2) entraînent que $\mathcal{G}'$ est une réduction de $\mathcal{G}$ pour $(\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}; \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}')$. Soit $(A_n; n \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments engendrant $\mathcal{A}'$. La sous-tribu $\mathcal{A}_n$ engendrée par $(A_p; p \leq n)$ est engendrée par une partition finie $(A_n^i; i \in I_n)$. Posons :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \mu \in \mathbf{M}) (\forall H' \in \mathcal{H}') (\forall x \in \mathbf{X}) \quad \varphi_n(\mu, x, H') = \sum_{i \in I_n} \frac{P \circ \mu(H'_x A_n^i)}{P \circ \mu(A_n^i)} 1_{A_n^i}$$

φ possède les propriétés suivantes :

— $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall H' \in \mathcal{H}')$ l'application $(\mu, x) \rightarrow \varphi_n(\mu, x, H')$ est $\mathcal{G}' \vee \mathcal{A}'$ mesurable.

— $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \mu \in \mathbf{M}) (\forall x \in \mathbf{X})$ $\varphi_n(\mu, x, \cdot)$ est σ -additif sur $\mathcal{H}'$.

— $(\forall H' \in \mathcal{H}') (\forall \mu \in \mathbf{M})$ la suite $(\varphi_n(\mu, \cdot, H'); n \in \mathbb{N})$ converge P_μ presque sûrement vers un représentant de $E_{P_\mu}(H'/\mathcal{A}')$.

Soit $\mathcal{C}$ une famille dénombrable engendrant $\mathcal{H}'$ et soit $\mathcal{H}_0$ l'algèbre dénombrable engendrée par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$. Posons :

— $\mathbf{U} = \{ (\mu, x) \in \mathbf{M} \times \mathbf{X}; (\forall H' \in \mathcal{H}_0) \text{ la suite } \varphi_n(\mu, x, H') \text{ converge} \}$

— $\forall (\mu, x) \in \mathbf{U}, \forall H' \in \mathcal{H}_0, \quad \varphi(\mu, x, H') = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\mu, x, H')$

— $\mathbf{V} = \{ (\mu, x) \in \mathbf{U}; (\forall H' \in \mathcal{H}_0) \varphi(\mu, x, H') = \sup \{ \varphi(\mu, x, K); K \in \mathcal{K}, K \in H' \}$

On a :

— $\mathbf{V} \in \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}'$

— $(\forall \mu \in \mathbf{M}) \quad P_\mu[x \in \mathbf{X}, (\mu, x) \in \mathbf{V}] = 1$

— $(\forall (\mu, x) \in \mathbf{V}), \quad \varphi(\mu, x; \cdot)$ est σ -additive sur $\mathcal{H}_0$.

Posons :

— $(\forall (\mu, x) \in \mathbf{V}) \forall H' \in \mathcal{H}' \quad \pi(\mu, x; H') = \sup \{ \varphi(\mu, x, K); K \in \mathcal{K}, K \in H' \}$

— $(\forall (\mu, x) \notin \mathbf{V}) \quad \pi(\mu, x, \cdot) = \mu(\cdot)$

π est une transition de probabilité de $(\mathbf{M}, \mathcal{G}') \times (\mathbf{X}, \mathcal{A}')$ dans $(\Theta, \mathcal{H}')$ et

$$\forall \mu \in \mathbf{M}, \quad \forall H' \in \mathcal{H}', \quad \pi(\mu, \cdot, H') \in E_{P_\mu}(H'/\mathcal{A}).$$

(III-7) THÉORÈME.

1) Si $P \circ \mu$ est dominé par $P_\mu \otimes \mu$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $(\mathcal{H}' ; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H} ; \mathcal{A})$ pour $(P ; \mu)$,
 b) il existe une version de $\frac{dP \circ \mu}{dP_\mu \otimes \mu}$ de la forme $\varphi\psi$ avec :

$$\begin{cases} \varphi \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}' \text{ mesurable} \\ E_{P_\mu \otimes \mu}[\psi/\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}] = E_{P_\mu \otimes \mu}[\psi/\mathcal{H} \vee \mathcal{A}'] = 1 \end{cases}$$

2) Si P est dominé par λ et $\mathcal{A}$ est dénombrablement engendrée les propriétés précédentes sont encore équivalentes à la suivante :

- c) il existe deux fonctions φ, η vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi \mathcal{H}' \vee \mathcal{A}' \text{ mesurable} \\ \eta \mathcal{H} \vee \mathcal{A} \text{ mesurable et} \\ (\forall_\mu \theta), \quad \varphi(\theta, \cdot) \eta(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda} \end{cases} \quad \begin{cases} (\forall_\lambda x) \quad E_\mu[\eta(\cdot, x)/\mathcal{H}'] = E_\mu[\eta(\cdot, x)] \\ (\forall_\mu \theta) \quad E_\lambda[\eta(\theta, \cdot)/\mathcal{A}'] \text{ indépendant de } \theta \end{cases}$$

Démonstration. — Voir (I-9) et (II-7).

(III-8) COROLLAIRE. — Sous les hypothèses de (I-10) et (II-8), pour que $(\mathcal{H}', \mathcal{A}')$ soit une réduction de $(\mathcal{H} ; \mathcal{A})$ pour (P, μ) il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions φ et η vérifiant :

- $(\forall_\mu \theta) \quad \varphi(\theta, \cdot) \eta(\theta, \cdot) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda}$
- φ est $\mathcal{H}' \vee \mathcal{A}'$ mesurable
- $(\forall_\lambda x) \quad \int_{\Theta''} \eta(\theta', \theta'', x) \lambda(\theta', d\theta'') \text{ indépendant de } \theta'$
- $(\forall_\mu \theta) \quad \int_{X'} \eta(\theta, x', x'') \gamma(x', dx'') \text{ indépendant de } \theta$

Voici trois exemples de réduction :

Réduction de Fraser [3]

(III-9) DÉFINITION. — Dans le cas d'un espace produit

$$(\Theta ; \mathcal{H}) = (\Theta' ; \mathcal{H}') \otimes (\Theta'' ; \mathcal{H}''),$$

on dit que $(\mathcal{H}' ; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H} ; \mathcal{A})$ au sens de Fraser si :

- $a_f)$ la restriction P' de P à $\mathcal{A}'$ est indépendante de θ'' ,
- $b_f)$ $(\forall \theta'' \in \Theta'')$, $\mathcal{A}'$ est une sous-tribu $(\mathcal{A} ; \mathcal{P}^{\Theta' \times \{\theta''\}})$ exhaustive.

(III-10) PROPOSITION. — Si le modèle est dominé et si la sous-tribu $\mathcal{A}'$ est dénombrablement engendrée, alors $(\mathcal{H}' ; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H} ; \mathcal{A})$ au sens de Fraser si et seulement si $(\mathcal{H}' ; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H} ; \mathcal{A})$ pour $(P ; M)$, où $M = \{\mu' \otimes \mu'' : \mu' \in \mathcal{P}(\Theta'), \mu'' \in \mathcal{P}(\Theta'', \mathcal{H}'')\}$.

Démonstration. — Nous devons montrer que $a_f)$ et $b_f)$ sont équivalentes respectivement à :

- $a)$ $(\forall \mu \in M)$ $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{H}$ sont C. I. R. à $\mathcal{H}'$ pour $P \otimes \mu$
- $b)$ $(\forall \mu \in M)$ $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{A}$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}'$ pour $P \otimes \mu$

Comme $(\Theta ; \mathcal{H})$ est un espace produit, et que M sépare les atomes de $\mathcal{H}'$, on peut appliquer la proposition (II-3), ce qui entraîne l'équivalence de $a_f)$ et $a)$. D'autre part, comme $\mathcal{A}'$ est dénombrablement engendrée, la condition $b_f)$ est équivalente à l'existence, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $\theta \in \Theta$, d'une version $\varphi(\theta ; \cdot)$ de $E_{\mathcal{P}\theta}(A/\mathcal{A}')$ telle que φ soit $\mathcal{H}'' \vee \mathcal{A}'$ mesurable. Par suite :

$(\forall \mu \in \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{H}))$ $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}' \vee \mathcal{H}$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}' \vee \mathcal{H}''$ pour $P \otimes \mu$

Or $(\forall \mu \in M)$ $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ sont indépendantes pour μ , donc $\mathcal{A}' \vee \mathcal{H}'$ et $\mathcal{A}' \vee \mathcal{H}''$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}'$ pour $P \otimes \mu$ et par suite $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}' \vee \mathcal{H}'$ sont C. I. R. à $\mathcal{A}'$ pour $P \otimes \mu$.

Il reste $b) \Rightarrow b_f)$, qui résulte, à cause de la domination, de la proposition (I-7) appliquée à chaque $\Theta' \times \{\theta''\}$.

Application (voir [3]).

Si $(\mathcal{H}' ; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H} ; \mathcal{A})$ au sens de Fraser alors, pour tout $(\theta'_0 ; \theta'_1) \in (\Theta')^2$, il existe un test U. M. P. de l'hypothèse $\{\theta'_0\} \times \Theta''$ contre $\{\theta'_1\} \times \Theta''$ qui est $\mathcal{A}'$ mesurable.

Réduction de Hajek [4]

(III-12) DÉFINITION. — Étant donné une application mesurable τ de $(\Theta ; \mathcal{H})$ dans $(\Theta' ; \mathcal{H}')$, on dit que $(\tau ; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H} ; \mathcal{A})$ au sens de Hajek si :

- $a_h)$ la restriction de P à $\mathcal{A}'$ est $\tau^{-1}(\mathcal{H}')$ mesurable,
- $b_h)$ $(\forall \theta' \in \Theta')$, il existe un élément $Q^{\theta'}$ de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}^{\tau^{-1}(\theta')}$ telle que $\mathcal{A}'$ est $(\mathcal{A} ; \mathcal{Q}^{\theta'})$ exhaustive (où $\mathcal{Q}^{\theta'} = \{Q^{\theta'} ; \theta' \in \Theta'\}$).

(III-13) PROPOSITION. — Soit v une transition de $(\Theta'; \mathcal{H}')$ dans $(\Theta; \mathcal{H})$ vérifiant :

$$(\forall \theta' \in \Theta') \quad v[\tau^{-1}(\theta')] = 1 \quad \text{et} \quad M = \{v \circ \mu', \mu' \in \mathcal{P}(\Theta', \mathcal{H}')\}$$

Si $(\tau; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ au sens de Hajek avec dans $b_h)$ $(\forall \theta' \in \Theta') \quad Q^{\theta'} = P \circ v^{\theta'}$ alors $(\tau^{-1}(\mathcal{H}'); \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ pour $(P; M)$.

La réciproque est vraie si P est dominée et $\tau^{-1}(\mathcal{H}')$ caractérisée par ses atomes dans $\mathcal{H}$. La démonstration découle de (I-7) et (II-3).

(III-14) APPLICATION (voir [4]). — Soit $(D; \mathcal{D})$ un espace de décision convexe localement compact à base dénombrable et L une fonction de coût défini sur $\Theta' \times D$, convexe en d , $\mathcal{H}' \vee \mathcal{D}$ mesurable. Pour toute stratégie S posons :

$$(\forall \theta' \in \Theta') \quad R(\theta', S) = \sup_{\tau^{-1}(\theta')} \int_X L(\tau(\theta), S(x)) P^\theta(dx)$$

Alors si $(\tau; \mathcal{A}')$ est une réduction de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ au sens de Hajek, à toute stratégie S , on peut associer une stratégie S' , mesurable, telle que :

$$(\forall \theta' \in \Theta') \quad R(\theta', S') \leq R(\theta', S).$$

Réduction par invariance

Considérons comme dans (I-12) un groupe G de transformations laissant le modèle invariant. Nous avons alors :

(III-15) PROPOSITION. — Si μ est une mesure invariante par G , $(\mathcal{H}_G; \tilde{\mathcal{A}}_G)$ est une réduction de $(\mathcal{H}; \mathcal{A})$ pour (P, μ) .

Démonstration. — Cela résulte de (I-13) et du fait que, pour $A' \in \mathcal{A}_G$ l'application $\theta \mapsto P^\theta(A')$ est $\mathcal{H}_G$ -mesurable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ph. CAILLOT, Thèse de 3^e cycle, I. S. S. U. P., Paris, 1966.
- [2] Ph. CAILLOT et F. MARTIN, Modèle statistique bayésien. *Ann. Inst. H. Poincaré* (Série B), vol. 8, 1972, p. 183-210.
- [3] D. FRASER, Sufficient statistic with nuisance parameters. *Ann. Math. Stat.*, vol. 27, 1956, p. 838-842.
- [4] J. HAJEK, *On basic concepts of statistics*. 5^e Berkeley, vol. 1, p. 139-162.

- [5] P. HALMOS et L. SAVAGE, Applications of the R. N. theorem to the theory of sufficient statistics. *Ann. Math. Stat.*, vol. **20**, 1949, p. 225-241.
- [6] P. MEYER, *Probabilités et potentiel*. Hermann, 1966.
- [7] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, 1964.
- [8] J. L. PETIT, Exhaustivité, ancillarité et invariance. *Ann. Inst. H. Poincaré* (Série B), vol. **6**, 1970, p. 327-334.
- [9] G. A. HUNT, *Martingales et processus de Markov*. Dunod.

(Manuscrit reçu le 26 juin 1972).