

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. NEVEU

Sur l'irréductibilité des chaînes de Markov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n° 3 (1972), p. 249-254

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_3_249_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur l'irréductibilité des chaînes de Markov

par

J. NEVEU (*)

Laboratoire de Calcul des Probabilités.
9, quai Saint-Bernard. Tour 56, Paris V^e.

SUMMARY. — Given a transition probability P on a measurable space (E, \mathcal{F}) which is m -essentially irreducible with respect to a σ -finite measure m , it is shown that there exists a measurable subset E_0 of E of full m -measure such that $P1_{E_0} \geq 1_{E_0}$ for which all measures

$$U(x, \cdot) = \sum_{N^*} P^n(x, \cdot) \quad (x \in E_0)$$

either are disjoint from m or dominate this measure m in the sense of absolute continuity.

Dans un travail antérieur [1], nous avons considéré la condition d'irréductibilité suivante pour une probabilité de transition

$$P = \{ P(x, F); x \in E, F \in \mathcal{F} \}$$

définie sur un espace mesurable (E, \mathcal{F}) : si m est une mesure positive σ -finie sur (E, \mathcal{F}) , la probabilité de transition P est dite m -irréductible si la série de ses itérées P^n vérifie la condition d'absolue continuité

$$m \ll \sum_{N^*} P^n(x, \cdot) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 1 « Mathématiques, Informatique » associée au C. N. R. S.

($N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$). Cette condition qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{N^*} P^n(x, F) > 0 \quad \text{pour tout } x \in E \text{ et tout } F \in \mathcal{F}$$

de mesure $m(F) \neq 0$ est manifestement plus restrictive que la condition introduite par la définition suivante.

DÉFINITION 1. — *Si m est une mesure positive σ -finie sur l'espace mesurable (E, \mathcal{F}) , une probabilité de transition P définie sur ce même espace est dite m -essentiellement irréductible lorsque*

$$\sum_{N^*} P^n(\cdot, F) > 0$$

presque-partout sur (E, \mathcal{F}, m) , pour tout $F \in \mathcal{F}$ de mesure $m(F) \neq 0$.

Dans l'étude de l'irréductibilité ou de l'essentielle irréductibilité d'une probabilité de transition P , on peut toujours supposer que la mesure de base m vérifie l'hypothèse supplémentaire : $mP \ll m$. En effet sinon la mesure m peut être remplacée par exemple par la mesure

$$m^* = \sum_N 2^{-n} m' P^n$$

où m' désigne une mesure finie équivalente à m ; cette nouvelle mesure m^* vérifie la relation $m^*P \ll m^*$ et bien que $m \ll m^*$ la probabilité de transition P est irréductible (resp. essentiellement irréductible) pour m^* dès qu'elle l'est pour m .

La définition ci-dessus de l'essentielle irréductibilité est inspirée par la théorie ergodique des opérateurs markoviens définis sur un espace L^1 . Il est en effet bien connu que l'hypothèse supplémentaire $mP \ll m$ permet d'associer à P un opérateur linéaire positif de norme 1, soit T , défini sur l'espace $L^1(E, \mathcal{F}, m)$ de telle manière que $(f.m)P = Tf.m$ pour tout $f \in L^1_+(m)$, à condition de désigner par $f.m$ la mesure de densité f par rapport à m . Il est alors facile de vérifier que P est m -essentiellement irréductible si et seulement si

$$\sum_{N^*} T^n f > 0 \quad \text{p. p. pour tout } f \neq 0 \text{ de } L^1_+(m).$$

Sous cette hypothèse, les résultats classiques de E. Hopf montrent que l'opérateur T est alors soit dissipatif, soit conservatif et ergodique. Dans

le premier cas il existe donc une fonction $h : E \rightarrow R_+$ telle que

$$h > 0 \text{ p. p.}, \sum_{n \geq 1} P^n h < \infty \quad \text{p. p. pour la mesure } m;$$

dans le second cas par contre, on a $U_h(h) = 1$ p. p. pour toute fonction $h : E \rightarrow [0, 1]$ qui n'est pas m -négligeable, à condition de définir l'opérateur U_h par $U_h = \sum_N (PM_{1-h})^n P$ (voir [4]) [la démonstration de ce dernier

résultat se trouve dans [3] au moins dans le cas où h est une fonction indicatrice]. On comparera ces résultats avec ceux du théorème 3.5 démontré dans [4] (voir aussi [1] et [2]) sous l'hypothèse plus restrictive de m -irréductibilité de P .

Observons d'autre part que l'hypothèse d'essentielle irréductibilité d'une probabilité de transition P par rapport à une mesure m est strictement moins restrictive que l'hypothèse d'irréductibilité. Par exemple à toute transformation ponctuelle mesurable θ de l'espace (E, \mathcal{F}, m) qui préserve la mesure m et qui est ergodique, la formule $P(x, \cdot) = \varepsilon_{\theta(x)}(x \in E)$ associe une probabilité de transition qui est m -essentiellement irréductible si l'espace de mesure (E, \mathcal{F}, m) n'a pas d'atomes; dans ce cas en effet, pour tout $x \in E$, la mesure $\sum_{N^*} P^n(x, \cdot)$ est portée par l'orbite dénombrable

$(\theta^n(x), n \in N^*)$ du point x et elle est donc étrangère à la mesure m que nous avons supposé sans atome.

Voici alors le résultat principal de cette note.

PROPOSITION 2. — Soit (E, \mathcal{F}) un espace mesurable séparable muni d'une mesure positive et σ -finie m . Soit P une probabilité de transition sur (E, \mathcal{F}) telle que $mP \ll m$. Si P est m -essentiellement irréductible, deux cas seulement sont possibles :

a) ou bien il existe une partie mesurable E_1 de E , telle que $m(E_1^c) = 0$, que $P1_{E_1} \geq 1_{E_1}$, et que

$$m \ll \sum_{N^*} P^n(x, \cdot) \quad \text{pour tout } x \in E_1;$$

b) ou bien il existe une partie mesurable E_2 de E telle que $m(E_2^c) = 0$, que $P1_{E_2} \geq 1_{E_2}$ et que

$$m \perp \sum_{N^*} P^n(x, \cdot) \quad \text{pour tout } x \in E_2.$$

L'inégalité $P1_{E_1} \geq 1_{E_1}$ assure que la trace P' de la probabilité de transition P sur l'espace mesurable $(E_1, E_1 \cap \mathcal{F})$ est une probabilité de transition et que les itérées de P' sur E_1 sont les traces sur E_1 des itérées P^n de P ($n \in \mathbb{N}^*$). Dans le cas (a) envisagé dans la proposition ci-dessus, la trace de P sur E_1 est donc une probabilité de transition irréductible pour la mesure m restreinte à E_1 .

Démonstration. — Commençons par introduire le sous-ensemble A de E défini par

$$A = \{ x : m \ll U_\theta(x, \cdot) \}$$

où U_θ est, pour tout réel $\theta \in [0, 1[$, le noyau positif défini sur (E, \mathcal{F}) par

$$U_\theta(x, F) = \sum_{\mathbb{N}^*} (1 - \theta)^n P^n(x, F);$$

il est clair que la définition de A ne dépend pas du θ choisi.

Montrons que A est mesurable en nous fixant un $\theta \neq 0$; pour un tel θ les mesures $U_\theta(x, \cdot)$ ($x \in E$) sont finies. Nous pourrions supposer aussi, en la remplaçant éventuellement par une mesure équivalente, que la mesure m est finie. Choisissons alors une sous-algèbre de Boole \mathcal{G} de \mathcal{F} qui soit dénombrable et qui engendre \mathcal{F} ; désignons ensuite par \mathcal{G}_n ($n \in \mathbb{N}^*$) les classes dénombrables

$$\mathcal{G}_n = \left\{ G : G \in \mathcal{G}, m(G) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Or pour toute mesure positive et finie μ sur (E, \mathcal{F}) , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $m \ll \mu$ sur \mathcal{F} ,
- b) pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que $m(G) \leq \varepsilon$ dès que G est un ensemble de \mathcal{G} vérifiant $\mu(G) \leq \delta(\varepsilon)$,
- c) $\inf_{\mathcal{G}_n} \mu(G) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte immédiatement que

$$A = \bigcap_{\mathbb{N}^*} \left\{ x : \inf_{\mathcal{G}_n} U_\theta(x, G) > 0 \right\}$$

et la mesurabilité de A est donc claire.

Montrons ensuite que $A^c = \{ x : m \perp U_\theta(x, \cdot) \}$. Le second membre de cette égalité ne dépendant en fait pas de θ , nous établirons cette égalité par un $\theta > 0$. A cet effet considérons un état $x \in E$ tel que la mesure $U_\theta(x, \cdot)$

ne soit pas étrangère à la mesure m . L'équation résolvante $U_0 = U_\theta + \theta U_\theta U_0$ entraîne alors pour toute partie mesurable F non négligeable de (E, \mathcal{F}, m) que

$$U_0(x, F) \geq \theta \int U_\theta(x, dy)U_0(y, F) > 0$$

car la fonction $U_0(\cdot, F)$ est strictement positive m -presque partout grâce à l'hypothèse d'essentielle irréductibilité. Nous avons ainsi établi que $m \ll U_0(x, \cdot)$, c'est-à-dire que $x \in A$.

Démontrons que $U_0 1_A = 0$ sur A^c ; cela entraînera que $1 - P 1_{A^c} = P 1_A = 0$ sur A^c et donc que $P 1_{A^c} \geq 1_{A^c}$. Pour cela choisissons un état $x \in E$ tel que $U_0(x, A) > 0$. La définition de l'ensemble A entraînant que $U_\theta(\cdot, F) > 0$ sur A pour toute partie mesurable F de (E, \mathcal{F}, m) qui n'est pas négligeable, l'équation résolvante $U_0 = U_\theta + \theta U_0 U_\theta$ nous permet cette fois d'écrire que

$$U_0(x, F) \geq \theta \int_A U_0(x, dy)U_\theta(y, F) > 0 \quad \text{car } U_0(x, A) > 0.$$

Cela montre que $m \ll U_0(x, \cdot)$, c'est-à-dire que $x \in A$, dès que $U_0(x, A) > 0$; aussi $U_0 1_A = 0$ sur A^c . En outre $m(A)$ ou $m(A^c)$ doit être nul car si $m(A) \neq 0$, l'essentielle irréductibilité de P entraîne que $U_0(x, A) > 0$ p. p. $[m]$ et donc d'après l'égalité $U_0 1_A = 0$ sur A^c que nous venons de démontrer, que $m(A^c) = 0$.

Deux cas sont donc possibles. Ou bien $m(A) = 0$ et dans ce cas en posant $E_2 = A^c$, nous déduisons de ce qui précède que les propriétés (b) de la proposition sont vérifiées par cet ensemble E_2 . Ou bien $m(A^c) = 0$; dans ce cas nous posons $E_1 = \{ U_0(\cdot, A^c) = 0 \}$ et vérifions que cet ensemble jouit des propriétés (a) de la proposition. La condition d'absolue continuité $mP \ll m$ entraîne que $mU_0 \ll m$ et donc que

$$\int m(dx)U_0(x, A^c) = 0$$

puisque par hypothèse $m(A^c) = 0$; cela montre déjà que $m(E_1^c) = 0$. L'inégalité $PU_0 \leq U_0$ entraîne d'autre part que

$$\int P(x, dy)U_0(y, A^c) = 0 \quad \text{si } x \in E_1;$$

par conséquent $P(x, E_1^c) = 0$ si $x \in E_1$ et ceci montre que $P 1_{E_1} \geq 1_{E_1}$. Enfin comme $U_0(\cdot, A) = 0$ sur A^c et que $U_0(\cdot, E) = +\infty$ partout, il est clair que $E_1 \subset A$ et cela achève la démonstration. ■

Voici une application immédiate de la proposition 2 ci-dessus et de la proposition 3.5 [4].

COROLLAIRE 3. — *Soit m une mesure positive σ -finie et soit P une probabilité de transition définies sur l'espace mesurable séparable (E, \mathcal{A}) . Supposons que $mP \ll m$ et que l'opérateur T sur $L^1(m)$ associé à P soit conservatif et ergodique. Supposons en outre l'existence d'un ensemble mesurable G non-négligeable (pour m) tel que les mesures $\sum_{N^*} P^n(x, \cdot)$ ($x \in G$) ne soient pas disjointes de m . Alors il existe une partie mesurable E_0 de E vérifiant $m(E_0^c) = 0$ et $P1_{E_0} \geq 1_{E_0}$, telle que la restriction de P à E_0 vérifie la condition de récurrence de Harris.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. DUFLO, Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov irréductibles. *Bull. Soc. Math.*, t. **98**, 1970, p. 127-163.
- [2] N. JAIN and B. JAMISON, Contribution to Doeblin's theory of Markov processes. *Zeits. f. Wahrsch.*, t. **8**, 1967, p. 19-40.
- [3] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, 2^e éd., 1970.
- [4] J. NEVEU, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *Ann. Inst. Fourier*, 1972.

(Manuscrit reçu le 22 février 1972).