

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN LARISSE

## **Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, III**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 8, n° 3 (1972), p. 229-240

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1972\\_\\_8\\_3\\_229\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_3_229_0)

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, III

par

**Jean LARISSE**

Euratom-Cetis. Ispra (Varese). Italie

### INTRODUCTION

Cette étude fait suite aux deux précédentes [7], dont nous utilisons les notations et définitions. Ici, nous nous intéressons à la norme de convergence  $\lambda$  des matrices de transitions des marches unilatères et bilatère, dont nous donnons les propriétés. En particulier, nous montrons que si on se limite à un demi-groupe complètement simple  $S(G)$  et à une certaine classe de lois-produits, l'égalité  $\lambda = 1$  équivaut à l'existence d'une moyenne invariante sur  $G$ , ce qui équivaut aussi à l'existence d'une moyenne invariante à droite (à gauche) sur les idéaux minimums à gauche (à droite) de  $S(G)$ . Ce résultat étend aux demi-groupes complètement simples celui obtenu dans le cas des groupes [4, 5].

Si  $M$  est une matrice de transitions de probabilités, on définit

$$\lambda(s, s') = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [m^{(n)}(s, s')]^{\frac{1}{n}}.$$

Cette limite existe toujours puisque  $0 \leq m^{(n)}(s, s') \leq 1$ , et c'est l'inverse du rayon de convergence de la série

$$M(z; s, s') = \sum_{n=0}^{\infty} m^{(n)}(s, s')z^n, \quad z \text{ réel positif.}$$

Nous désignerons par  $\lambda_d(P; s, s')$  la valeur de ce paramètre correspondant à une matrice de transitions de marche au hasard à droite définie

par la distribution de probabilité  $P(A)$  chargeant tout  $A$  engendrant le demi-groupe  $S$ . Les définitions  $\lambda_g(P; s, s')$  pour la marche à gauche et  $\Lambda(P; s, s')$  pour la marche bilatère sont analogues.

Il est clair qu'en général  $\lambda_d(P; s, s') \neq \lambda_g(P; s, s')$ . Il suffit que  $S$  possède un élément neutre  $e' \in A$  d'un côté, à droite par exemple, et ne possède pas d'élément neutre de l'autre côté. On a alors :

$$\lambda_d(P; s, s) \geq p(e') \quad \text{et} \quad \lambda_g(P; s, s) = 0.$$

LEMME III. 1. — *i)* S'il existe un élément neutre à droite pour  $s$  de la forme  $asb$ , avec  $a, b \in S \cup \emptyset$ ,  $\emptyset$  étant l'élément vide, on a

$$\lambda_d(P; s, s) = \overline{\lim}_n [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

*ii)* S'il existe un élément neutre à gauche pour  $s$  de la forme  $a'sb'$ , avec  $a', b' \in S \cup \emptyset$ , on a

$$\lambda_g(P; s, s) = \overline{\lim}_n [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

*iii)* Si  $s = a'sb'sasb$ , avec  $a', b', a, b \in S \cup \emptyset$   $|a'sb'| = |asb|$ ,  $|f| =$  longueur du mot  $f \in S$ , on a

$$\Lambda(P; s, s) = \overline{\lim}_n [P^{(n)}(s)]^{\frac{2}{n}}.$$

En particulier, la conjonction des conditions *i)* et *ii)* entraîne *iii)* et dans ce cas on a

$$\lambda_d(P; s, s) = \lambda_g(P; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P; s, s).$$

*Démonstration.* — Pour tout  $s \in S$ , et pour un  $m$  fini tel que  $P^{(m)}(s) > 0$ , on a

$$P^{(n+m)}(s) \geq P^{(m)}(s)m_d^{(n)}(s, s)$$

donc

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}} \geq \lambda_d(P, s, s).$$

Si, de plus, pour un  $s \in S$ , il existe  $t = asb$ ;  $a, b \in S$ , tel que  $s = st = sasb$ , on a, pour  $P^{(r_1)}(a) > 0$ ,  $P^{(r_2)}(b) > 0$

$$m_d^{(r_1+n+r_2)}(s, s) \geq P^{(r_1)}(a)P^{(n)}(s)P^{(r_2)}(b)$$

puis

$$\lambda_d(P; s, s) \geq \overline{\lim}_n [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}},$$

d'où le résultat si  $a, b \in S$ . Les cas  $a = \emptyset$ ,  $b = \emptyset$ ,  $a = b = \emptyset$  sont immédiats, et également le cas à gauche.

Supposons, maintenant, que pour  $a, b, a', b' \in S \cup \emptyset$ ,  $|asb| = |a'sb'|$  on ait  $s = a'sb'sasb$ . De  $P^{(r_1)}(a')$ ,  $P^{(r_2)}(b')$ ,  $P^{(r_3)}(a)$ ,  $P^{(r_4)}(b) > 0$ ,

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = m_0,$$

on tire

$$P^{(2n+m)}(s) \geq P^{(m)}(s)m_{dg}^{(n)}(s, s) \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(2n)}(s)]^{\frac{1}{2n}} \geq \Lambda^{\frac{1}{2}}(P; s, s),$$

et aussi

$$m_{dg}^{(m_0+n)}(s, s) \geq P^{(r_1)}(a')P^{(n)}(s)P^{(r_2)}(b')P^{(r_3)}(a)P^{(n)}(s)P^{(r_4)}(b),$$

puis

$$\Lambda(P; s, s) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n)}(s)]^{\frac{2}{n}},$$

d'où l'égalité du cas *iii*).

En particulier, si les conditions *i*) et *ii*) sont remplies, on a

$$s = a'sb'sasb = (a'sb')^n s (asb)^{n'}$$

$n$  et  $n'$  entiers positifs quelconques et pour  $n = |a'sb'|$ ,  $n' = |asb|$  on est ramené à la condition *iii*). On a alors

$$\lambda_d(P; s, s) = \lambda_g(P; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P; s, s)$$

Examinons alors le cas d'un état  $s$  essentiel dans une, ou plusieurs marches définies par  $P(A)$ , et montrons que dans chaque cas le lemme III.1 est applicable.

*i*)  $s$  est essentiel bilatère, donc  $s = a'sb'sasb$ , avec  $a', b', a, b \in S \cup \emptyset$   $|asb| = |a'sb'|$ . Par conséquent,

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}(P; s, s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

*ii*)  $s$  est essentiel à droite, donc  $s = sasb$ ;  $a, b \in S \cup \emptyset$ . Mais  $s$  est alors aussi essentiel bilatère (chap. I). Dès lors,

$$\lambda_d(P; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P; s, s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

*iii*) Le raisonnement correspondant au cas à gauche donne

$$\lambda_g(P; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P; s, s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

*iv*) Si  $s$  est essentiel à droite et aussi à gauche, ce qui équivaut à  $s \in S(G)$ , on obtient alors

$$\lambda_d(P; s, s) = \lambda_g(P; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P; s, s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(P; s, s).$$

On remarquera que cette dernière égalité est aussi vraie dans un cas plus général. Supposons, en effet, que  $s = sxs$  pour un  $x \in S$  ( $s$  est régulier au sens de [I], et on sait que tout  $s \in S(G)$  est régulier). Faisant  $a = x$ ,  $b = \emptyset$  ou bien  $a' = \emptyset$ ,  $b' = x$ , les conditions *i*) et *ii*) du lemme III.1 sont satisfaites, donc aussi la condition *iii*).

Résumons les résultats obtenus :

PROPOSITION III.1. — *i*) Si  $s$  est essentiel bilatère, on a

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}; s, s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

*ii*) Si  $s$  est essentiel à droite, donc essentiel bilatère, on a

$$\lambda_d(\mathbf{P}; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}; s, s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}$$

*iii*) Si  $s$  est essentiel à gauche, donc essentiel bilatère, on a

$$\lambda_g(\mathbf{P}; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}; s, s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

*iv*) Si  $s = sxs$  pour un  $x \in S$ , et, en particulier, si  $s \in S(G)$  ce qui équivaut à  $s$  essentiel à droite et aussi à gauche, on a

$$\lambda_d(\mathbf{P}; s, s) = \lambda_g(\mathbf{P}; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}; s, s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\mathbf{P}; s, s).$$

Lorsqu'une matrice de transitions  $M$  sur les états  $S$  d'un processus markovien est irréductible, ce qui équivaut au fait que  $S$  est la classe essentielle du processus, des inégalités classiques :

$$\begin{aligned} m^{(k+v+n)}(s, s) &\geq m^{(k)}(s, s') m^{(v)}(s', s') m^{(n)}(s', s) \\ m^{(n+v+k)}(s', s') &\geq m^{(n)}(s', s) m^{(v)}(s, s) m^{(k)}(s, s') \\ m^{(k+v)}(s, s') &\geq m^{(k)}(s, s') m^{(v)}(s', s'); \quad m^{(v+n)}(s, s) \geq m^{(v)}(s, s') m^{(n)}(s', s) \\ m^{(n+v)}(s', s) &\geq m^{(n)}(s', s) m^{(v)}(s, s); \quad m^{(v+k)}(s', s') \geq m^{(v)}(s', s) m^{(k)}(s, s'), \end{aligned}$$

on déduit aisément que  $\lambda(\mathbf{P}; s, s')$  ne dépend pas de  $s, s' \in S$ . Pour cette raison, on conviendra de définir  $\lambda(\mathbf{P}, s, s)$  « norme de convergence » de la matrice  $M$  [II]. En particulier, si  $M$  est la matrice de transitions d'une marche à droite sur une classe essentielle  $R_i$  du demi-groupe  $S$ ,  $\lambda(\mathbf{P}, s, s)$ ,  $s \in R_i$  sera la norme de convergence de la classe essentielle  $R_i$ . La même remarque vaut évidemment pour toutes les autres classes essentielles unilatères et bilatères.

THÉORÈME III.1. — Les classes essentielles bilatères, lorsqu'elles existent, ont la même norme de convergence  $\Lambda(\mathbf{P})$ . Les classes essentielles à droite

(à gauche), lorsqu'elles existent, ce qui entraîne l'existence de classes essentielles bilatères, ont la même norme de convergence  $\lambda_d(P)$ ,  $(\lambda_g(P))$ , et on a

$$\lambda_d(P) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P), \quad (\lambda_g(P) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P)).$$

Si, de plus, S possède un idéal minimum qui soit complètement simple S(G), alors

$$\lambda_d(P) = \gamma_g(P) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P) = \lambda(P).$$

*Démonstration.* — Soient R et R' ( $\neq R$ ) deux classes essentielles distinctes dans la marche à droite sur S. On sait [I] que  $s \in R'$  entraîne  $sR = R'$ . De  $sx = s' \in R'$ ,  $x \in R$ , on tire alors

$$m_d^{(n)}(s, s') \geq P^{(n)}(x) \\ \Rightarrow \lambda_d(P; s, s') = \lambda_d(P; s, s) \geq \lambda_d(P; x, x) \quad (\text{Proposition III.1}).$$

De  $s''R' = R$ ,  $s'' \in R$ , on déduit l'inégalité inverse  $\lambda_d(P; x, x) \geq \lambda_d(P; s, s)$ .

Le cas à gauche se discute de manière analogue. On déduit le résultat annoncé dans le cas bilatère en tenant compte de l'inégalité du théorème I.4

$$P^{(r_1)}(i_1)P^{(n_1)}(s_1)P^{(n_2)}(s_2)m_{dg}^{(n)}(i_2, i_2)P^{(n_x)}(x)P^{(n_y)}(y) \leq P^{(r_1)}(i_1)m_{dg}^{(m+n)}(i_1, i_1),$$

et de l'inégalité inverse obtenue en permutant  $i_1$  et  $i_2$ .

D'autre part, et d'après la Proposition III.1, l'existence d'une classe essentielle à droite, ou à gauche, suffit pour entraîner les égalités

$$\lambda_d(P) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P), \quad \text{ou} \quad \lambda_g(P) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P)$$

respectivement.

Si S possède un  $S(G) = \bigcup_i R_i = \bigcup_j L_j$ , de ce qui précède on tire

$$\lambda_d(P) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P) = \lambda_g(P) = \lambda(P). \quad \blacksquare$$

Bien que nous n'aurons pas à utiliser le résultat qui suit, nous pensons intéressant de noter un autre cas de l'égalité  $\Lambda = \lambda_d \lambda_g$  pour une chaîne markovienne sur un ensemble quelconque d'états.

Supposons, en effet, une chaîne markovienne réversible, à droite dont la matrice de transitions, irréductible, est W. Suivant Kendall [3], on peut toujours lui associer une mesure sous-invariante, c'est-à-dire une suite  $\{m_i\}$  de nombre réels positifs et finis tels que

$$\sum_i m_i w_{ij} \leq m_j \quad \text{pour chaque } j \text{ et } w_{ij} = \|W\|_{ij};$$

(dans le cas de l'égalité on dira que la mesure est invariante).  $W$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} W &= DTD^{-1} \text{ avec} \\ D &= \text{matrice diagonale d'élément } \|D\|_{ii} = m_i^{-1/2} \\ T &= \text{opérateur de contraction de l'espace de Hilbert.} \end{aligned}$$

$T$  est hermitique si et seulement si il existe une mesure par rapport à laquelle  $W$  est réversible :

$$m_i w_{ij} = m_j w_{ji} \quad \text{pour tout } i \text{ et } j,$$

cette mesure étant alors invariante.

On remarque que : si deux chaînes markoviennes, l'une à droite, l'autre à gauche, définies sur le même espace, réversibles par rapport à la même mesure, dont les matrices de transitions irréductibles ont le même support ( $w_{d;i,j} > 0 \Leftrightarrow w_{g;i,j} > 0$ ), commutent, alors la norme de convergence  $\Lambda$  du processus bilatère dont la matrice de transitions est  $W_{dg} = W_d \cdot W_g (= W_g W_d)$  vérifie la relation :

$$\Lambda = \lambda_d \cdot \lambda_g$$

En effet, on a :

$$W_d = DT_d D^{-1}; \quad W_g = DT_g D^{-1}.$$

Par définition,  $W_{dg} = W_d W_g = W_g W_d$ , ce qui entraîne

$$W_{dg} = DT_d T_g D^{-1} = DT_g T_d D^{-1}; \quad T_{dg} = T_d T_g = T_g T_d; \quad W_{dg} = DT_{dg} D^{-1}.$$

Les deux opérateurs linéaires bornés  $T_d$  et  $T_g$  commutant, les rayons spectraux  $r_d$ ,  $r_g$  et  $r_{dg}$  de  $T_d$ ,  $T_g$  et  $T_{dg}$  respectivement vérifient, l'inégalité [9] :

$$r_{dg} \leq r_d \cdot r_g \left( r = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}, \quad \|T^n\| = \text{norme de } T^n \right).$$

D'autre part,  $T_d$  étant hermitique, on a la représentation spectrale :

$$\|T_d^{(n)}\|_{ij} = \int_{\lambda'_d}^{\lambda_d} \mu^n d\sigma_{d;i,j}(\mu);$$

$\sigma_d(\mu)$  = matrice spectrale,  $[\lambda'_d; \lambda_d]$  spectre réel de  $T_d$ ; puis

$$w_{d;i,j}^{(n)} = \left( \frac{m_j}{m_i} \right)^{1/2} \int_{\lambda'_d}^{\lambda_d} \mu^{(n)} d\sigma_{d;i,j}(\mu).$$

On a un résultat identique pour  $T_g$  et  $T_{dg}$ .  $W_d$  et  $W_g$  ayant le même support ont la même période  $\nu$ .

Il suit de [4] que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [w_{d;ii}^{(n)}]^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [t_{d;ii}^{(n)}]^{1/n} = \lambda_d = r_d.$$

Mais on sait [6] que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [t_{d;ii}^{(n)}]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [t_{d;ii}^{(nv)}]^{1/nv}.$$

Ces remarques valent pour  $W_g$  et  $W_{dg}$ . On obtient alors de  $w_{dg;ii}^{(n)} \geq w_{d;ii}^{(n)} w_{g;ii}^{(n)}$  l'inégalité inverse  $r_{dg} \geq r_d \cdot r_g$ , ce qui établit le résultat.

Il se pose ensuite le problème des relations qui pourraient exister entre la norme de convergence  $\lambda(S, P)$  des classes essentielles unilatères du demi-groupe  $S$ , et la norme de convergence  $\lambda(G, Q_1)$  du sous-groupe  $G$  de  $S$ . Il est clair qu'il faut, de plus, définir les deux distributions  $P(A)$  et  $Q_1(B)$  dont il s'agit. Pour établir le résultat principal de ce chapitre, nous n'aurons à nous intéresser qu'aux cas où ces deux normes sont égales. Nous allons montrer qu'il suffit pour cela de définir  $Q_1(B)$  et  $P(A)$  comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent. Les résultats préliminaires que nous établirons ne sont donc que des conséquences du chapitre II.

De l'inégalité, établie dans [7, II]

$$P^{(r)}(e_{11})P^{(n)}(e_{11})P^r(e_{11}) \leq P^{(r)}(e_{11})Q^{(n)}(\bar{e})P^{(r)}(e_{11}) \leq \Sigma \{ P^{(n+2r)}(s)/s \in N \}$$

on déduit

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n)}(e_{11})]^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [Q^{(n)}(\bar{e})]^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [\Sigma P^{(n+2r)}(s)/s \in N]^{1/n}.$$

Puisque chaque série  $\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(s)z^n, s \in N$ , a le même rayon de convergence

$\lambda^{-1}(P)$ , lorsque  $N$  est fini, la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \Sigma \{ P^{(n)}(s)/s \in N \} z^n$  aura aussi

$\lambda^{-1}(P)$  comme rayon de convergence.

Donc, on a

$$\lambda(S, P) = \lambda(G/N, Q).$$

D'autre part, de l'existence de l'homomorphisme  $\varphi : G \rightarrow G/N$ , nous savons définir, chapitre II, une distribution  $Q_1(B_1)$  chargeant  $B_1$  engendrant  $G$  à partir d'une distribution  $Q(B)$  chargeant  $B$  engendrant  $G/N$  et inversement. Entre  $Q_1$  et  $Q$  nous avons la relation

$$Q^{(n)}(\bar{e}) = \Sigma \{ Q^{(n)}(g)/g \in \varphi^{-1}(\bar{e}) = N \}.$$



Pour la même raison que précédemment nous aurons

$$\lambda(G/N, Q) = \lambda(G, Q_1) \quad \text{donc aussi} \quad \lambda(S, P) = \lambda(G, Q_1).$$

Ainsi, pour tout couple de distributions  $P(A)$  et  $Q_1(B_1)$  déduites l'une de l'autre au moyen des homomorphismes  $\theta : S \rightarrow G/N$  et  $\varphi : G \rightarrow G/N$  on a le

THÉORÈME III.2. — Lorsque le sous-groupe  $N$  de  $G$  engendré par  $J$  est fini, on a :

$$\lambda(S, P) = \lambda(G, Q_1).$$

THÉORÈME III.3. — Dans les conditions du Théorème II.3, on a

$$\lambda(S, P) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [m^{*(n)}(\bar{u}, \bar{v})]^{\frac{1}{n}}$$

pour une classe essentielle unilatère, et l'égalité correspondante dans le cas bilatère.

*Démonstration.* — Des inégalités *i)* et *ii)* [7, page 145] la deuxième étant écrite dans le cas où la distribution initiale est  $P(A)$ , en appliquant la Proposition III.1 et le Théorème III.1, on obtient :

$$i) \quad q(\bar{u})m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)}P^{(r)}(1) \leq \sum_j P(u_j)m_{u_j, v_1}^{(n+r)} \leq P^{(n+r+1)}(v_1)$$

d'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)}]^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{(n+r+1)}(v_1)]^{\frac{1}{n}} = \lambda(S, P),$$

puis

$$ii) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [m_{\bar{u}\bar{v}}^{*(n)}]^{\frac{1}{n}} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [m_{u_j, v_1}^{(n)}]^{\frac{1}{n}} = \lambda(S, P)$$

*i)* et *ii)* établissent le Théorème dans le cas à droite. Les cas à gauche et bilatère se discutent de manière analogue. ■

Dans le cas des demi-groupes complètement simples  $S(G)$ , et des lois produits  $P_1(I) \times P_2(\bar{A}) \times P_3(J)$  on a le

COROLLAIRE III.2. — Dans les conditions de la Proposition II.5,

$$\lambda[S(G); P_1 \times P_2 \times P_3] = \lambda[G; P_{31} * P_2].$$

*Démonstration.* — Elle résulte du Théorème III.3 et de la Proposition II.5, ou même directement des inégalités établies dans la démonstration de cette Proposition. ■

Enfin, dans le cas  $S(G) = G/N \times T$ , on obtient

COROLLAIRE III.3. — Dans les conditions de la Proposition II.8, on a

$$\lambda(S, Q) = \lambda(G/N, P_1) \times \lambda(T, P_2).$$

*Démonstration.* — On sait [6] que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m^{(n)}(s, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^{(nd)}(s, s)$  où  $d$  est la période de l'état  $s$ . Dès lors si  $d_1$  et  $d_2$  sont celles des marches unilatères sur  $G/N$  et  $T$  respectivement, de  $q^{(n)}(e_{11}, e_{11}) = m_1^{(n)}(\bar{e}, \bar{e}) \times m_2^{(n)}(t_{11}, t_{11})$  on tire :

$$\begin{aligned} \lambda(S, Q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [q^{(nd_1 d_2)}(e_{11}, e_{11})]^{\frac{1}{nd_1 d_2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} [m_1^{(nd_1 d_2)}(\bar{e}, \bar{e})]^{\frac{1}{nd_1 d_2}} \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} [m_2^{(nd_1 d_2)}(t_{11}, t_{11})]^{\frac{1}{nd_1 d_2}} = \lambda(G/N, P_1) \cdot \lambda(T, P_2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lorsqu'on se limite à la classe  $C_1$  des distributions symétriques  $Q(B)$  chargeant les éléments d'un ensemble générateur de  $B$  de  $G$ , ( $q(g) = q(g^{-1})$ ;  $\forall g \in B$ ) Kesten [4] a montré que si  $\lambda(G, Q) = 1$  pour un  $Q \in C_1$  alors cette égalité vaut pour tout  $Q \in C_1$ , ce que l'on exprimera par la notation  $\lambda(G) = 1$ . De plus, dans [5] le même auteur a montré que l'égalité  $\lambda(G) = 1$  équivaut à l'existence sur  $G$  d'une moyenne invariante, c'est-à-dire d'une fonctionnelle  $L$  sur l'espace  $C(G)$  de toutes les fonctions réelles bornées sur  $G$  vérifiant :

- $\inf_{x \in G} f(x) \leq Lf \leq \sup_{x \in G} f(x)$ ,  $f(x), g(x) \in C(G)$ .
- $L \{ f(yxz) \} = L \{ f(x) \}$  pour tout  $y, z \in G$ .
- $L \{ \alpha f \} = \alpha Lf$ ,  $\alpha$  réel.
- $L \{ f + g \} = Lf + Lg$  (notations de [5]).

Nous avons vu dans la démonstration du Corollaire II.2 qu'il est toujours possible de construire sur  $S(G)$  une classe  $C_2$  de lois produits  $P(S) = P_1(I) \times P_2(D) \times P_3(J)$  classe pour laquelle, d'après le Corollaire III.2, on a  $\lambda[S(G), P] = \lambda(G, Q)$ ,  $Q \in C_1$ . Il suit alors que si  $\lambda[S(G), P] = 1$  pour un  $P \in C_2$ , l'égalité vaut pour tout  $P \in C_2$ , ce que nous noterons  $\lambda[S(G)] = 1$ , et on a alors le

THÉORÈME III.4. — Pour la classe  $C_2$  des lois produits,  $\lambda[S(G)] = 1$  si et seulement si  $G$  admet une moyenne invariante.

Mais il faut remarquer que contrairement au cas des groupes,  $\lambda[S(G)] = 1$  n'équivaut pas, en général, à l'existence d'une moyenne invariante sur  $S(G)$ . En effet, faisant  $G$  fini,  $|I| = |J| = 2$ ,  $S(G)$  est alors fini et  $\lambda[S(G)] = 1$ ,

or, d'après Rosen [10]  $S(G)$  n'admet pas de moyenne invariante. Cependant on a le :

**COROLLAIRE III.4.** —  $\lambda[S(G)] = 1$  équivaut à l'existence d'une moyenne invariante à gauche sur  $R_i$  à droite sur  $L_j$  pour tout  $i \in I, j \in J$ .

*Démonstration.* — Il suffit de montrer qu'une moyenne invariante sur  $G$  équivaut à l'existence d'une moyenne invariante à gauche sur  $R_i$  à droite sur  $L_j$ .

Considérons le cas de  $L_1.L_1$  est simplifiable à droite ( $s_1, s_2, s \in L_1$  et  $s_1s = s_2s \Rightarrow s_1 = s_2$ ). D'après le Corollaire III.6 de Namioka [8], si  $L_1$  admet une moyenne invariante à droite, alors  $F$  étant un sous-ensemble fini arbitraire de  $H_{11} = G$ , et  $k$  un nombre tel que  $0 < k < 1$ , il existe un sous-ensemble fini  $A$  tel que, pour chaque  $s \in F$  on ait :

$$c(As \cap A) \geq kc(A), \quad c(A) = \text{nombre d'éléments de } A.$$

Désignons l'ensemble des éléments de  $A$  par

$$A = \{ (i\bar{a}(i, n)1) \}, \quad i \in I_0 \text{ fini}, \quad n \in N(i) \text{ fini pour chaque } i.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} As \cap A &= \left\{ \bigcup_{i \in I_0} \bigcup_{n \in N(i)} (i\bar{a}(i, n)1) \cdot (1\bar{s}1) \right\} \cap \left\{ \bigcup_{i' \in I_0} \bigcup_{n' \in N(i')} (i'\bar{a}(i', n')1) \right\} \\ &= \bigcup_{i \in I_0} \left\{ \bigcup_{n, n' \in N(i)} (i\bar{a}(i, n)\bar{s} \cap \bar{a}(i, n')1) \right\} \\ &= \bigcup_{i \in I_0} (i\bar{A}_i\bar{s} \cap \bar{A}1), \quad (\text{où } \bar{A}_i \text{ est la trace de } A \text{ dans } R_i) \\ &\subset \bigcup_{i \in I_0} (i\bar{A}\bar{s} \cap \bar{A}1). \end{aligned}$$

Donc

$$c(As \cap A) \leq \sum_{i \in I_0} (ic(\bar{A}\bar{s} \cap \bar{A})1) = c(I_0) \times c(\bar{A}\bar{s} \cap \bar{A}),$$

et puisque  $c(A) \geq c(\bar{A})$ , nous avons

$$\begin{aligned} c(I_0) \times c(\bar{A}\bar{s} \cap \bar{A}) &\geq c(As \cap A) \geq kc(A) \geq kc(\bar{A}), \\ c(\bar{A}\bar{s} \cap \bar{A}) &\geq \frac{k}{c(I_0)} c(\bar{A}). \end{aligned}$$

Mais la condition sur  $k$  et l'inégalité  $1 \leq c(I_0) < \infty$  entraînent

$$0 \leq k/c(I_0) = k' < 1,$$

et

$$c(\bar{A} \bar{s} \cap \bar{A}) \geq k'c(\bar{A}).$$

La même inégalité vaut pour tout  $s \in F$ , puisque  $k$  et  $c(I)$  ne dépendent pas de  $s$ . Donc

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n c(\bar{A} \bar{s}_v \cap \bar{A}) \geq k'c(\bar{A}) \quad \text{avec} \quad s_v \in F, \quad c(F) = n,$$

Nous avons montré qu'il existe  $k'$ ,  $0 < k' < 1$  tel que pour un sous-ensemble fini arbitraire d'éléments  $F$  de  $G$ , il existe un sous-ensemble fini  $\bar{A}$  de  $G$  tel que l'inégalité précédente soit vérifiée. Par application de la condition suffisante, et d'ailleurs aussi nécessaire, de Folner [2],  $G$  admet une moyenne invariante.

Inversement supposons un tel  $G$ , et soit  $b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n \in S(G)$  un sous-ensemble fini d'éléments non nécessairement distincts. Les  $b_v$  et  $c_v, v = 1, \dots, n$ , sont de la forme

$$b_v = (i_v \bar{b}_v 1)$$

$$c_v = (i'_v \bar{c}_v 1).$$

Posons  $\bar{a}_v = \bar{b}_v(\bar{c}_v)^{-1}$ . Alors [2], il existe  $k, 0 < k < 1$  tel que pour  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  il existe un sous-ensemble fini  $\bar{A}$  de  $G$  pour lequel vaut l'inégalité :

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n c(\bar{A} \cap \bar{A} \bar{a}_v) \geq kc(\bar{A}).$$

Mais alors

$$c(\bar{A} \cap \bar{A} \bar{a}_v) = c[\bar{A} \cap \bar{A} \bar{b}_v(\bar{c}_v)^{-1}] = c[\bar{A} \bar{c}_v \cap \bar{A} \bar{b}_v] = c[\bar{A} b_v \cap \bar{A} c_v],$$

donc

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n c(\bar{A} c_v \cap \bar{A} b_v) \geq kc(\bar{A}),$$

et d'après le Théorème 4.1 de [8]  $L_1$  admet une moyenne invariante à droite.

Le cas de  $R_i$  se démontre avec les inégalités correspondantes

$$c(sA \cap A) \geq kc(A),$$

$$n^{-1} \sum_{v=1}^n c(c_v \bar{A} \cap b_v \bar{A}) \geq kc(\bar{A}),$$

et le raisonnement s'étend à tout  $R_i$ ,  $i \in I$  et tout  $L_j$ ,  $j \in J$ , en prenant pour  $F$  et  $E$  les ensembles d'idempotents de  $R_i$  et  $L_j$  respectivement.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, The Algebraic Theory of Semi-Groups. *Am. Math. Soc.*, vol. 1, 1961.
- [2] E. FOLNER, On groups with full Banach mean value. *Math. Scand.*, t. 3, 1955.
- [3] D. G. KENDALL, *Unitary dilations of markov transition operators*. Probability and Statistics, H. Cramer, 1959.
- [4] H. KESTEN, Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 92, 1959.
- [5] H. KESTEN, Full Banach mean values on countable groups. *Math. Scand.*, t. 7, 1959.
- [6] J. F. C. KINGMAN, The exponential decay of markov transition probabilities. *Proc. London Math. Soc.*, t. 13 (3), 1963.
- [7] J. LARISSE, Marches au hasard sur les demi-groupes discrets; I, II. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 8 (2), 1972.
- [8] I. NAMIOKA, Folner's conditions for amenable semi-groups. *Math. Scand.*, t. 15, 1964.
- [9] F. RIESZ et B. S. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthiers-Villars, Paris, 1955.
- [10] W. G. ROSEN, On invariant means over compact semi-groups. *Proceed. Amer. Math. Soc.*, vol. 7, 1956.
- [11] D. VERE JONES, Geometric ergodicity in denumerable markov chains. *Quartely Journals of Math.*, t. 13, 1962.

(Manuscrit reçu le 13 novembre 1971).