

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL MÉTIVIER

## **Théorèmes limite quotient pour chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 8, n° 2 (1972), p. 93-105

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1972\\_\\_8\\_2\\_93\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_2_93_0)

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Théorèmes limite quotient pour chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris

par

**Michel MÉTIVIER**

Laboratoire de Probabilités, Université de Rennes I,  
Équipe associée du C. N. R. S. n° 250, Avenue du Général-Leclerc, BP 25 A,  
35-Rennes.

---

**SUMMARY.** — The paper states and gives a proof of a generalized version of an Orey's ratio limit theorem for recurrent (in the sense of Harris) Markov chains. Namely, for every couple of special fonctions  $f$  and  $g$  (« special » in the sense of J. Neveu), and any couple of probability measures  $\mu$  and  $\nu$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \leq n} \mu P^k f}{\sum_{k \leq n} \nu P^k g} = \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)}$$

where  $\lambda$  is the P-invariant measure.

### I. — PROBLÈME

On considère le noyau markovien  $P$  d'une chaîne récurrente au sens de Harris  $(X_n)$  sur un espace d'états  $(E, \beta)$ . Le problème auquel nous nous

intéressons est celui de l'étude du comportement asymptotique des rapports

$$(1) \quad R^n(\mu, \nu; A, B) = \frac{\sum_{k \leq n} \mu P^k A}{\sum_{k \leq n} \nu P^k B}$$

où A et B sont deux éléments de  $\beta$ ;  $\mu$  et  $\nu$  deux probabilités.

Dans son article de 1956 [3], Harris pose la question de savoir si, sous la seule hypothèse de récurrence telle que nous la supposons ici, les rapports  $R^n(\mu, \nu; A, B)$  convergent vers  $\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}$ ,  $\lambda$  désignant la mesure invariante, pour tout couple  $(\mu, \nu)$  de probabilités sur  $(E, \beta)$  et pour tout couple  $(A, B)$  d'ensembles de mesure  $\lambda$  finie.

Cette question est d'autant plus naturelle que dans le cas de chaînes de Markov, à espace E dénombrable, le résultat analogue a été prouvé par Doeblin en 1938 et Chung en 1954 (voir la bibliographie dans [3]).

Ce problème comporte une réponse simple lorsque la mesure invariante  $\lambda$  est une probabilité. Dans ce cas, on sait (cf. Orey [9]) que, pour tout  $A \in \beta$  et toute probabilité  $\mu$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \mu P^k - \lambda \right\| = 0.$$

On en déduit immédiatement que, pour tout  $A \in \beta$ , tout  $B \in \beta$  et tout couple  $(\mu, \nu)$  de probabilités, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^n(\mu, \nu; A, B) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}.$$

Dans le cas où  $\lambda(E) = +\infty$ , la réponse la plus voisine de la conjecture de Harris a été donnée par Jain dans un article important de 1966 [4].

**THÉORÈME DE JAIN.** — *Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions intégrables par rapport à la mesure invariante  $\lambda$ , il existe un ensemble N, dépendant de  $f$  et  $g$ , de mesure nulle pour  $\lambda$ , tel que*

$$\forall(x, y) \quad x \notin N, \quad y \notin N \quad \lim_n R^n(x, y; f, g) = \lim_n \frac{\sum_{k \leq n} P^k f(x)}{\sum_{k \leq n} P^k g(y)} = \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)}$$

Cet énoncé laisse clairement ouverte la question : quand peut-on affirmer que la limite existe pour tout  $(x, y)$ , ou au moins pour tout  $x$  et  $y$  n'appartenant pas à un ensemble exceptionnel  $N$ , indépendant de  $f$  et  $g$ ?

Des contre-exemples, donnés par Jain lui-même dans son article et par Orey (cf. [9]), montrent que, sous la seule hypothèse de récurrence de Harris, il n'existe pas d'ensemble  $N$ ,  $\lambda$ -négligeable, indépendant de  $(f, g)$ , pour tout couple de fonctions  $f$  et  $g$   $\lambda$ -intégrables.

On peut néanmoins chercher des classes  $\mathcal{C}$  de fonctions  $\lambda$ -intégrables, telles que la limite ait lieu pour tout  $(x, y) \in E \times E$  et tout couple  $(f, g) \in \mathcal{C}$ .

Le premier théorème dans ce sens a été énoncé par Harris [2], sans démonstration. Un théorème de ce type se trouve démontré dans [5], pour une classe  $\mathcal{C}$  d'indicateurs d'ensembles (appelés depuis modestes par Meyer). Ces divers résultats sont inclus dans un théorème d'Orey [9] qui considère pour  $\mathcal{C}$  l'ensemble des indicateurs d'une classe plus vaste (cf. Brunel [1] pour la preuve de l'inclusion) que celle des ensembles modestes : celle des « D-sets ».

Les « D-sets » d'Orey étant les ensembles dont les indicateurs sont des fonctions « spéciales » au sens de J. Neveu (cf. Brunel [1]), une forme un peu plus générale du théorème d'Orey est obtenue en prenant pour  $\mathcal{C}$  l'ensemble des « fonctions spéciales ».

Cet exposé est consacré à l'énoncé et la preuve de cette forme légèrement généralisée du théorème d'Orey.

## II. — ÉNONCÉ DU THÉORÈME LIMITE QUOTIENT

### 1. — Fonctions spéciales.

Nous utilisons systématiquement la théorie des fonctions spéciales due à J. Neveu. Nous revenons constamment au mémoire de ce dernier (cf. [7]) pour les résultats sur les fonctions spéciales.

Nous rappelons seulement quelques notations et définitions utilisées dans [7].

Pour toute fonction  $\beta$ -mesurable  $h$ ,  $0 \leq h \leq 1$ , sur  $E$ , on note  $M_h$  l'opérateur  $g \rightsquigarrow h \cdot g$ , et simplement  $M_A$  si  $h = 1_A$ .

On note également  $U_h$  l'opérateur positif

$$U_h = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(M_{1-h}P)^n$$

On rappelle qu'une fonction  $f$   $\beta$ -mesurable positive, bornée est appelée *spéciale* par J. Neveu si pour toute  $h$ ,  $\beta$ -mesurable à valeurs dans  $[0, 1]$ , telle que  $\lambda(h) > 0$ , la fonction  $U_h(f)$  est bornée sur  $E$  (Dans tout cet article,  $\lambda$  est la mesure invariante associée au noyau de Harris  $P$ ).

## 2. — Théorème principal.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions spéciales, intégrables pour la mesure invariante  $\lambda$ . Pour tout couple  $(\mu, \nu)$  de probabilités sur  $(E, \beta)$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\mu, \nu; f, g) = \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)}$$

## III. — LEMMES PRÉLIMINAIRES

Nous groupons ici quelques lemmes sur les fonctions spéciales qui nous sont utiles pour la démonstration du théorème.

LEMME 1 (cf. démonstration de la proposition IV-6 de [7]). — Soit  $f_0$  une fonction  $\geq 0$   $\|f_0\| \leq 1$  <sup>(1)</sup> et  $m_0$  une mesure positive  $\neq 0$  abs. cont. par rapport à la mesure invariante  $\lambda$  telles que  $U_{f_0} \geq 1 \otimes m_0$ . Alors, pour toute  $h$ , telle que  $0 \leq h \leq f_0$  et  $\int h d m_0 \neq 0$ , et pour toute fonction spéciale  $f$  on a :

$$U_h(f) \leq \frac{1}{m_0(h)} \|U_{f_0}(f)\|$$

*Démonstration.*

$$U_h(f) = \sum_{n \geq 0} (U_{f_0} M_{f_0-h})^n U_{f_0}(f) \quad (\text{Prop. III-1 de [7]}).$$

Comme

$$\int f_0 d\lambda \geq \int h d\lambda > 0$$

on a  $U_{f_0} f_0 = 1$ , d'où

$$\begin{aligned} (U_{f_0} M_{f_0-h}) 1 &= U_{f_0}(f_0 - h) \\ &= 1 - U_{f_0} h \leq 1 - m_0(h) < 1 \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> On note  $\|f\| = \sup_{x \in E} |g(x)|$ .

On a donc

$$U_h(f) \leq \sum_{n \geq 0} \|U_{f_0}(f)\| (1 - m_0(h))^n \leq \frac{\|U_{f_0}(f)\|}{m_0(h)}$$

LEMME 2. — Soit  $f$  une fonction spéciale  $\geq 0$  et  $\lambda$ -intégrable. Pour tout  $\alpha > 0$ , existe une constante  $K_\alpha$  telle que pour toute  $h \geq 0$  vérifiant  $\lambda(h) \geq \alpha$  et  $0 \leq h \leq f$  on ait

$$U_h f \leq K_\alpha$$

Démonstration. — Soit  $\theta < \frac{1}{\|f\|}$ . D'après la proposition IV-9 de [7], il existe une mesure  $m_0$ , équivalente à  $\lambda$  telle que, si nous posons  $f_0 = \theta f$  on ait :

$$U_{f_0} \geq 1 \otimes m_0$$

Comme  $m_0$  et  $\lambda$  sont équivalentes, on peut trouver  $\alpha_0$ , tel que pour toute  $h \leq f$ , on ait

$$\int h d m_0 \leq \alpha_0 \Rightarrow \int h d \lambda \leq \frac{\alpha}{\theta}$$

D'où, d'après le lemme 1, pour toute  $h$  telle que

$$\int \theta h \cdot d \lambda > \alpha \quad \text{on a} \quad U_h(f) \leq \frac{1}{\theta \alpha_0} \|U_{f_0} f\|. \quad \blacksquare$$

LEMME 3. — Soit  $Q$  un opérateur markovien de Harris, de mesure invariante  $\lambda$ , pour lequel la fonction constante égale à 1 est spéciale.

Alors, pour toute  $h \in H$ , non négligeable pour  $\lambda$ , et notant  ${}^Q U_h$  le potentiel associé à  $h$  et  $Q$ :

$$\sum_{k \geq n} Q(M_{1-h} Q)^k 1 \leq \frac{\|{}^Q U_h 1\|^2}{n + 1}$$

Démonstration. — Posons  $\|Q_{U_h}\| = a$ ; on a

$$\sum_{k \geq n} (Q M_{1-h})^k Q = (Q M_{1-h})^n {}^Q U_h$$

Comme la suite  $((M_{1-h} Q)^n 1)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante (itérés d'opérateurs sous-markoviens), il en est de même de  $Q(M_{1-h} Q)^n 1$  et

$$(n + 1)(Q M_{1-h})^n 1 = (n + 1)(Q M_{1-h})^n Q 1 \leq \sum_{k \leq n} (Q M_{1-h})^k Q 1 \leq a$$

d'où

$$\sum_{k \geq n} (QM_{1-h})^k Q 1 \leq a(QM_{1-h})^n \leq \frac{a^2}{n+1}$$

LEMME 4. — Soit, comme dans [7],  $H$  l'ensemble des fonctions sur  $E$ ,  $\beta$ -mesurables à valeurs dans  $[0, 1]$ . Soient  $f \in H$ ,  $h \in H$ .

On note  $\lambda$  la mesure invariante pour le noyau markovien de Harris  $P$ .

On suppose  $\lambda(f \cdot h) > 0$ .

On pose :

$$\begin{aligned} S_f &= [f > 0] \\ Q &= M_{S_f} U_f M_f \\ {}^Q U_h &= \sum_{k \geq 0} Q(M_{1-h} Q)^k \end{aligned}$$

Alors

$$1^\circ M_{S_f} U_{h \cdot f} M_f = {}^Q U_h.$$

2° Si  $f$  est spéciale pour  $P$ ,  $Q$  restreint à  $S_f$  est un noyau de Harris sur  $S_f$ , de mesure invariante  $f \cdot \lambda$  et  $1_{S_f}$  est spéciale pour  $Q$ .

*Démonstration.*

1° Par définition

$$\begin{aligned} {}^Q U_h &= \sum_{k \geq 0} (M_{S_f} U_f M_f)(M_{1-h} M_{S_f} U_f M_f)^k \\ &= M_{S_f} \sum_{k \geq 0} U_f (M_{f-h} U_f)^k M_f \end{aligned}$$

D'après la formule fondamentale de [7], prop. II-1, on a bien

$${}^Q U_h = M_{S_f} U_{h \cdot f} M_f$$

2° On sait [7], prop. IV-1, que  $f \cdot \lambda$  est une mesure invariante pour  $Q$ , et que pour toute  $h$  telle que  $\lambda(f \cdot h) > 0$  on a

$$U_{h \cdot f} h f = 1$$

Donc, en vertu du 1° du lemme :

$$(f \cdot \lambda)(h) > 0 \Rightarrow {}^Q U_h h = 1_{S_f}$$

Ceci exprime que  $Q$ , restreint à  $S_f$ , est un noyau de Harris, et, comme,

pour toute  $h \in H$ ,  $h$  nulle en dehors de  $S_f$  et telle que  $(f \cdot \lambda)(h) > 0$  on a

$${}^Q U_h 1_{S_f} = M_{S_f} U_{h \cdot f} M_f 1_{S_f} \leq M_{S_f} U_{h \cdot f} f < + \infty$$

$1_{S_f}$  est bien spéciale pour  $Q$ . ■

LEMME 5. — Soit  $f$  une fonction spéciale,  $\lambda$ -intégrable,  $f \in H$ . Soit  $Q$  le noyau markovien  $M_{S_f} U_f M_f$  (cf. notations du lemme 4). Alors, pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\exists K > 0$  tel que

$$(0 \leq h \leq f, h \in H, \lambda(f \cdot h) \geq \alpha) \Rightarrow \left\| \sum_{k \geq n} Q(M_{1-h} Q)^k 1_{S_f} \right\| \leq \frac{K}{n+1}$$

Démonstration. — On sait (lemme 4) que le noyau  $Q = M_{S_f} U_f M_f$  est un noyau de Harris sur  $S_f$ , de mesure invariante associée  $f \cdot \lambda$ , tel que précisément

$${}^Q U_h = \sum_{k \geq 0} Q(M_{1-h} Q)^k$$

On applique alors les lemmes 2 et 3.

LEMME 6. — Soit  $f$  une fonction spéciale  $\lambda$ -intégrable,  $f \in H$ . Il existe un processus de Markov  $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \geq 0}, (P_x)_{x \in E})$  admettant  $P$  pour probabilité de transition, et une suite  $(\tau_f^m)_{m > 0}$  de temps d'arrêts du processus telle que (en notant comme d'habitude  $\theta$  l'opérateur de translation)

$$\tau_f^m = \tau_f^1 \circ \theta_{\tau_f^{m-1}} + \tau_f^{m-1}$$

$$E_x \left( \sum_{k=1}^{\tau_f} g(X_k) \right) = U_f g(x)$$

pour toute  $g$  bornée  $\beta$ -mesurable.

Démonstration. — On construit d'abord un processus de Markov  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{X}_n)_{n \geq 0}, (\tilde{P}_x)_{x \in E}, \tilde{\theta})$  associé à  $P$ , et suivant une méthode classique pour la construction des « processus subordonnés » ; on pose :

$$\Omega = \mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*} \times \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}^*}$$

$$X_n((k_p, \tilde{w}_p)_{p \in \mathbb{N}^*}) = \tilde{X}_{n - (k_0 + \dots + k_{r-1})}(\tilde{w}_r) \text{ où } r = \inf \{j : k_0 + \dots + k_j \geq n\} \text{ et } k_0 = 0$$

(i. e. : on construit une fonction aléatoire correspondant à l'histoire d'une particule, tuée et aussitôt remplacée, aux instants successifs  $\tau_p = k_1 + \dots + k_p$ , se déplaçant entre les instants  $(\tau_p)$  comme la particule primitive).

On définit la loi de probabilité  $P_x$  de telle sorte que  $f(X_{k_{r+1}}(w))$  repré-



sente la probabilité d'être remplacée de la particule qui, entre  $\tau_r$  et  $\tau_{r+1}$ , suit la trajectoire  $\tilde{w}_{r+1}$ . Introduisons alors la fonctionnelle multiplicative

$$\mathcal{M}_k(\tilde{w}) = \prod_{i=1}^k (1 - f(X_i(\tilde{w}))), \quad \mathcal{M}_0(\tilde{w}) = 1$$

Considérons la famille croissante des tribus cylindriques  $\mathcal{F}_n$ , de dimension finie dans  $\mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*} \times \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}^*}$  et le système projectif de probabilités  $(\mathbf{P}_x^n)$  définie de la façon suivante :

Soit  $N(x, \Phi)$ ,  $x \in E$ ,  $\Phi$ -mesurable sur  $\mathbb{N} \otimes \tilde{\Omega}$ , défini par

$$N(x, \Phi) = \tilde{E}_x \left( \sum_{k>1} \Phi(k, \tilde{w})(\mathcal{M}_{k-1}(\tilde{w}) - \mathcal{M}_k(\tilde{w})) \right)$$

On pose

$$\int \Phi(k_1, \tilde{w}_1) \mathbf{P}_x^1(dk_1, d\tilde{w}_1) = N(x, \Phi)$$

et on définit par récurrence les lois  $(\mathbf{P}_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\begin{aligned} & \int \Phi(k_1, \dots, k_n; \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) \mathbf{P}_x^n(dk_1, \dots, d\tilde{w}_n) \\ &= \int \mathbf{P}_x^{n-1}(dk_1, \dots, dk_{n-1}; \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{n-1}) \\ & \int N(\tilde{X}_{k_{n-1}}(\tilde{w}_{n-1}); d(k_n, \tilde{w}_n)) \Phi(k_1, \dots, k_n; \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) \end{aligned}$$

Le théorème classique de Ionescu-Tulcea sur les limites projectives (cf. [8]) montre que la famille  $(\mathbf{P}_x^n)$  admet une limite projective  $\mathbf{P}_x$ . Il est plus ennuyeux que difficile de vérifier que l'objet  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbf{P}_x), (X_n))$  ainsi construit est un processus de Markov de transition  $\mathbf{P}$ .

On vérifie qu'on définit un opérateur de translation en posant :

$$\theta((k_p, \tilde{w}_p)_{p \in \mathbb{N}}) = (k'_p, \tilde{w}'_p)_{p \in \mathbb{N}}$$

avec

$$\begin{aligned} k'_1 &= k_1 - 1 && \text{si } k_1 > 1 \\ k'_i &= k_i && i = 2, \dots \\ \tilde{w}'_1 &= \tilde{\theta}(\tilde{w}_1) \\ \tilde{w}'_i &= \tilde{w}_i && i = 2, \dots \\ k'_i &= k_{i+1} && i = 1, \dots && \text{si } k_1 = 1 \\ \tilde{w}'_i &= \tilde{w}_{i+1} && i = 1, \dots \end{aligned}$$

De la définition des  $\tau_i$  et de la définition de  $P_x$ , résultent aisément les égalités du lemme 6, si l'on pose  $\tau_f^i = \tau_i$ .

LEMME 7. — Soit  $f$  une fonction spéciale  $\lambda$ -intégrable,  $f \in H$ . Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de parties mesurables de  $S_f = [f > 0]$ , telle que

$$\forall i \in I \quad f \cdot \lambda(C_i) \geq \alpha > 0$$

On note  $\sigma_i$  le temps d'entrée du processus du lemme 6 dans  $C_i$ .  
Alors, pour toute probabilité initiale  $\mu$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \inf_{i \in I} P_\mu[\sigma_i \leq m]) = 0$$

Démonstration. — Soit, comme dans les lemmes précédents,

$$Q = M_{S_f} U_f M_f \text{ restreint à } S_f = [f > 0]$$

On a,  $m_0$  étant fixé,

$$\begin{aligned} P_\mu[\sigma_i \leq m] &\geq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m, \sigma_i \circ \theta_{\tau_f^1} + \tau_f^1 \leq m] \\ &\geq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m] - P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m, \sigma_i \circ \theta_{\tau_f^1} + \tau_f^1 > m] \\ &\geq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m] - P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m, \sigma_i \circ \theta_{\tau_f^1} + \tau_f^1 > \tau_f^{m_0}] \\ &\geq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m] - P_\mu \left[ \sum_{k < m_0} 1_{C_i}(X_{\tau_f^k + \tau_f^1}) = 0 \right] \end{aligned}$$

La propriété forte de Markov donne alors :

$$P_\mu[\sigma_i \leq m] \leq P_\mu[\tau_f^{m_0} \leq m] - E_\mu P_{X_{\tau_f^1}} \left[ \sum_{k < m_0} 1_{C_i}(X_{\tau_f^k}) = 0 \right]$$

Comme  $X_{\tau_f^1} \in S_f$  et

$$\forall x \in S_f \quad P_x \left[ \sum_{k < m_0} 1_{C_i}(X_{\tau_f^k}) = 0 \right] = \sum_{n \geq m_0 - 1} Q(M_{E - C_i} Q)^n 1_{C_i}(x)$$

l'hypothèse  $\lambda(f \cdot 1_{C_i}) > \alpha > 0$ , permet, d'après le lemme 5 de trouver  $m_0$  tel que la quantité au second membre de cette égalité soit majorée uniformément par  $\varepsilon$ . Le lemme 7 en résulte. ■

#### IV. — PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Le théorème que nous avons en vue résultera du théorème suivant, dont la démonstration suit largement l'idée de la démonstration du théorème d'Orey dans [9].

THÉORÈME. — Soit  $f$  une fonction spéciale intégrable pour  $\lambda$ , et soient  $\mu$  et  $\nu$  deux lois de probabilité sur  $(E, \beta)$ ; alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^n(\mu, \nu; f, f) = 1$$

Démonstration. — On le démontre seulement pour  $\nu = \frac{f \cdot \lambda}{\int f d\lambda}$  et  $0 < f < 1$ , le cas général s'y ramenant immédiatement.

Soit  $S = [f > 0]$ .

Soit  $\delta > 0$ . On va montrer que

$$(1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} R^n(\mu, \nu; f, f) \leq 1 + \delta$$

et

$$(2) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} R^n(\mu, \nu; f, f) \geq 1 - \delta$$

Introduisons les notations, relatives au processus  $(X_n)$  des lemmes précédents

$$\begin{aligned} H_n(x) &= E_x \left( \sum_{1 \leq k \leq n} f(X_k) \right) \\ H_n(\mu) &= E_\mu \left( \sum_{1 \leq k \leq n} f(X_k) \right) \\ B_{n,\delta} &= \{ x : x \in S \quad H_n(x) \leq (1 + \delta)H_n(\nu) \} \\ C_{n,\delta} &= \{ x : x \in S \quad H_n(x) \geq (1 - \delta)H_n(\nu) \} \\ h_{n,\delta} &= f \cdot 1_{B_{n,\delta}} \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(\nu) = +\infty$ , pour  $n$  assez grand, on a  $H_n(\nu) > 0$  d'où

$$H_n(\nu) \geq \int_{E - B_{n,\delta}} H_n(x) \nu(dx) \geq \nu(E - B_{n,\delta})(1 + \delta)H_n(\nu)$$

et par suite, pour tout  $n$  assez grand (indépendamment de  $\delta$ )

$$(3) \quad \frac{1}{\lambda(f)} \lambda(h_{n,\delta}) = \nu(B_{n,\delta}) \geq \frac{\delta}{1 + \delta}$$

Pour toute probabilité  $\mu$ , on a alors, en notant  $\tau_{B_{n,\delta}}$  le temps d'entrée du processus dans  $B_{n,\delta}$ ,

$$H_n(\mu) = \int E_x \left( \sum_{k=1}^{\tau_{B_{n,\delta}}} f(X_k) \right) \mu(dx) + \int E_x \left( \sum_{k=(\tau_{B_{n,\delta}}+1) \wedge n}^n f(X_k) \right)$$

En appliquant la propriété de Markov forte au deuxième terme et en utilisant la définition de  $B_{n,\delta}$

$$\begin{aligned} H_n(\mu) &\leq E_\mu \left( \sum_{k=1}^{\tau_{B_{n,\delta}}} f(X_k) \right) + \sup_{x \in B_{n,\delta}} H_n(x) \\ &\leq \mu U_{B_{n,\delta}} f + (1 + \delta) H_n(v) \end{aligned}$$

et, *a fortiori*,

$$H_n(\mu) \leq \mu U_{h_{n,\delta}} f + (1 + \delta) H_n(v)$$

Le lemme 2 et la relation (3) impliquent alors l'existence d'une constante  $K_\delta$  telle que, pour tout  $n$  assez grand,

$$(4) \quad H_n(\mu) \leq K_\delta + (1 + \delta) H_n(v)$$

comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(v) = + \infty$$

la relation (1) en résulte.

Avant de prouver l'inégalité (2), nous montrons d'abord qu'en raison de l'inégalité (4), le complémentaire de  $C_{n,\delta}$  ne peut pas être trop gros :

$$\begin{aligned} H_n(v) &= \int_{C_{n,\delta}} H_n(x) \nu(dx) + \int_{E - C_{n,\delta}} H_n(x) \nu(dx) \\ &\leq [K_\delta + (1 + \delta) H_n(v)] \nu(C_{n,\delta}) + (1 - \delta) H_n(v) \nu(E - C_{n,\delta}) \end{aligned}$$

Pour tout  $n$  tel que  $K_\delta \leq \delta H_n(v)$  on a donc

$$(5) \quad \nu(C_{n,\delta}) \geq \frac{1}{3}$$

En utilisant la propriété de Markov forte, on peut écrire

$$\begin{aligned} H_{n+m}(\mu) &= E_\mu \left( \sum_{k=1}^{n+m} f(X_k) \right) \\ &\geq E_\mu \left[ 1_{[\tau_{C_{n,\delta}} \leq m]} \sum_{k=\tau_{C_{n,\delta}}+1}^{n+\tau_{C_{n,\delta}}} f(X_k) \right] \\ &\geq E_\mu (1_{[\tau_{C_{n,\delta}} \leq m]} H_n(X_{\tau_{C_{n,\delta}}})) \\ &\geq E_\mu (1_{[\tau_{C_{n,\delta}} \leq m]} \inf_{y \in C_{n,\delta}} H_n(y)) \\ &\geq (1 - \delta) H_n(v) \cdot P_\mu [\tau_{C_{n,\delta}} \leq m] \end{aligned}$$

D'après le lemme 7, il est possible de choisir  $m$  assez grand pour que (cf. (5) ci-dessus)

$$K_\delta \leq \delta H_n(v) \Rightarrow P_\mu[\tau_{C_n, \delta} \leq m] \geq (1 - \delta)$$

Pour tout  $n$  assez grand, on a donc :

$$H_n(\mu) + m \geq H_{n+m}(\mu) \geq (1 - \delta)^2 H_n(v)$$

et par suite

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n(\mu)}{H_n(v)} \geq (1 - \delta)^2$$

ce qui prouve (2).

### FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME LIMITE QUOTIENT

Le théorème d'Orey généralisé que nous avons en vue se déduit aisément du théorème précédent.

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions spéciales telles que  $\lambda(f) > 0$  et  $\lambda(g) > 0$ , posons

$$h = f - \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)} g$$

La fonction  $|h|$  est spéciale avec  $\int h d\lambda = 0$

On a

$$H_n(\mu, f) - \frac{\lambda(f)}{\lambda(g)} H_n(\mu, g) = \sum_{k=1}^n \mu P^k h$$

D'après le théorème de [7], corollaire V-5, les sommes  $\sum_{k=1}^n \mu P^k h$  sont bornées, d'où immédiatement le théorème, puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(\mu, g) = +\infty$ . ■

### RÉFÉRENCES

- [1] A. BRUNEL, Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. 19, 1971, p. 323-329.
- [2] T. E. HARRIS, Recurrent Markov processes. *Ann. Math. Statistics*, § 26, 1955, p. 152-153.
- [3] T. E. HARRIS, The existence of stationary measures for certain Markov processes. *Proc. Third Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab.*, vol. II, 1956, p. 113-124.
- [4] N. C. JAIN, Some limit theorems for a general Markov process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. 6, 1966, p. 206-223.

- [5] MÉTIVIER, Existence of an invariant measure and an Ornstein's ergodic theorem. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 40, n° 1, 1969, p. 79-96.
- [6] MEYER, Solutions de l'équation de Poisson dans le cas récurrent. Séminaire de Strasbourg, 1969, p. 1070.
- [7] NEVEU, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *A paraître*.
- [8] NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des Probabilités*. Masson.
- [9] OREY, Limit theorems for Markov chain transition probability function. *Lecture Notes*. University of Minneapolis.

*Manuscrit reçu le 26 octobre 1971.*

---