ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GÉRARD LETAC

Groupe de Stam d'une probabilité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n^{o} 2 (1972), p. 175-181

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_2_175_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 2, 1972, p. 175-181. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Groupe de Stam d'une probabilité

par

Gérard LETAC

Université de Clermont.

SUMMARY. — The aim of this note is to put in the natural setting of harmonic analysis, the paper from A. J. Stam [3], and by the way to get straighter proofs.

SOMMAIRE. — Cette note cherche à placer une partie du remarquable article de A. J. Stam [3] dans son cadre naturel, celui de l'analyse harmonique et, éventuellement, à simplifier les preuves.

Soit G un groupe abélien localement compact dont la loi est notée additivement, M(G) l'algèbre de Banach des mesures de Radon bornées sur G ($\mu\nu$ note le produit de convolution de μ et ν), P(G) la partie de M(G) formée de mesures positives de masse 1. La mesure ε_x est la masse unité en x.

1. PROPRIÉTÉS DE $V(\mu, x)$

DÉFINITION 1. — Si μ est dans P(G) on pose : $V(\mu, x) = \| \mu(\varepsilon_0 - \varepsilon_x) \|_{M(G)}$. Nous énumérons quelques propriétés de V :

v 1) $V(\mu, 0) = 0$ et $V(\mu, x) = V(\mu, -x)$
v 2) $V(\mu, x + y) \leqslant V(\mu, x) + V(\mu, y)$
v 3) $V(\mu\nu, x) \leqslant V(\mu, x)$
v 4) $V(\mu, x)$ est semi-continue inférieurement (s. c. i.) par rapport à x.

Seule la propriété v 4) est moins évidente :

$$V(\mu, x) = \sup \left\{ \left| \int (f(x+y) - f(y))\mu(dy) \right| : \right.$$
$$\left. f \text{ fonction continue à support compact, } \sup_{y \in G} | f(y) | \leqslant 1 \right\}.$$

La fonction f étant à support compact est uniformément continue, et donc la fonction $x \mapsto \int f(x+y)\mu(dy)$ est continue. La fonction $V(\mu, x)$ étant le sup d'une famille de fonctions continues est donc s. c. i.

DÉFINITION 2. — Soient μ et μ' dans P(G). On note $\mu' \prec \mu$ si il existe α dans l'intervalle (0, 1) et μ'' dans P(G) tels que

$$\mu = \alpha\mu' + (1 - \alpha)\mu''$$

(Il est facile [*1*] de voir que $\mu' \prec \mu$ est équivalent au fait que μ' est absolument continue par rapport à μ et que la dérivée de Radon-Nicodym $\frac{d\mu'}{d\mu}$ est essentiellement bornée par rapport à μ).

PROPOSITION 1. — $V(\mu, x) < 2$ si et seulement si il existe μ_0 dans P(G) tel que

$$\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2} \mu_0 \prec \mu.$$

Cette proposition se trouve dans [*3*] et sa preuve se transpose immédiatement dans le cadre actuel.

2. LE GROUPE $L(\mu)$

DÉFINITION 3. — Si μ est dans P(G), on pose :

$$L(\mu) = \{ x : \lim_{n \to +\infty} V(\mu^n, x) = 0 \}$$

On dira que $L(\mu)$ est le groupe de Stam de la probabilité μ. Voici quelques propriétés de $L(\mu)$:

l 1) $L(\mu)$ est un sous-groupe de G (on utilise v 1) et v 2))
l 2) $L(\mu) \subset L(\mu\nu)$ (on utilise v 3))
l 3) $L(\mu^n) = L(\mu)$ pour tout entier positif u.

En effet $V(\mu^n, x)$ est une suite décroissante en n d'après v 3). Donc $L(\mu^n) \subset L(\mu)$; et on utilise l 2).

PROPOSITION 2. — Si μ et ν sont dans P(G) et si $\mu \prec \nu$, alors $L(\mu) \subset L(\nu)$.

Preuve. — Il existe $\alpha \in [0, 1]$ et $\mu' \in P(G)$ tels que $\nu = \alpha\mu + (1 - \alpha)\mu'$. Alors

$$(*) \qquad V(\nu^n, x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} V(\mu^k, x)$$

On peut conclure, comme le fait Stam, en considérant un procédé à la Toeplitz. On peut aussi utiliser l'argument suivant:

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par

$$P(X_1 = 0) = \alpha \quad , \quad P(X_1 = 1) = 1 - \alpha.$$

Posons $a(k) = V(\mu^k, x)$. Le second membre de l'inégalité (*) s'écrit

$$E(a(X_1 + \ldots + X_n)),$$

où E est le symbole usuel de l'espérance. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre K tel que $k > K$ entraîne $a(k) < \varepsilon$. Désignant par A_n l'événement $\{ X_1 + \ldots + X_n \leqslant K \}$, on a, comme $a(k) \leqslant 2$:

$$E(a(X_1 + \ldots + X^n)) \leqslant 2 \Pr(A_n) + \varepsilon$$

Mais, d'après la loi faible des grands nombres, $X_1 + \ldots + X_n \to \infty$ en probabilité si $n \to \infty$. Donc $\Pr(A_n) \to 0$, ce qui achève la preuve.

PROPOSITION 3.

$$x \in L\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)$$

Preuve. — Si x est un élément du groupe G d'ordre infini, $V\left(\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)^n, x\right)$ est égal à la somme des valeurs absolues des coefficients du polynôme $\left(\frac{1 + s}{2}\right)^n (1 - s)$ que, par application du théorème central limite, Stam montre être équivalente à $\frac{2}{\sqrt{\pi n}}$. Si x est d'ordre fini, $\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)^n$ tend suivant la topologie faible de M(G), vers la mesure de Haar du sous-groupe fini H engendré par x. $\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)^n (\varepsilon_0 - \varepsilon_x)$ tend donc faiblement vers zéro, mais H étant fini, la topologie faible est équivalente à la topologie de la norme sur M(H) et donc $V\left(\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right)^n, x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3. LES THÉORÈMES PRINCIPAUX

THÉORÈME 1.

$$L(\mu) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x : V(\mu^n, x) < 2 \}$$

En d'autres termes la suite décroissante $V(\mu^n, x)$ n'a d'autres limites que 0 ou 2.

Preuve. — Si $V(\mu^n, x) < 2$, d'après la proposition 1 il existe $\alpha \in [0, 1]$ et μ_0 et μ_1 dans P(G) tels que :

$$\mu^n = \frac{\alpha}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_x)\mu_0 + (1 - \alpha)\mu_1.$$

Donc $x \in L\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\right) \subset L\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_x}{2}\mu_0\right) \subset L(\mu^n) = L(\mu)$, les différentes implications étant justifiées successivement par la proposition 3, *l* 2), la proposition 2 et *l* 3).

COROLLAIRE. — $L(\mu)$ est un F_σ.

Preuve. — En effet, $V(\mu^n, x)$ étant décroissante en n, d'après le théorème 1 :

$$L(\mu) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x : V(\mu^n, x) \leqslant 1 \}$$

Mais les accolades désignent des fermés puisque d'après *v* 4), $V(\mu^n, x)$ est s. c. i.

THÉORÈME 2. — Si μ est absolument continue par rapport à ν, alors $L(\mu) \subset L(\nu)$.

Preuve. – Posons $f = \frac{d\mu}{d\nu}$ et

$$c_n = \int \min (f(x), n)\nu(dx)$$

Si n est assez grand, $c_n > 0$ et on peut définir la fonction :

$$f_n = \frac{1}{c_n} \min(f(x), n),$$

ainsi que la mesure μ_n de P(G), absolument continue par rapport à ν, telle que $f_n = \frac{d\mu_n}{d\nu}$. Si n est assez grand, $c_n \geqslant 1/2$ et donc $f_n \leqslant 2f$.

Puisque $f_n \underset{n\infty}{\rightarrow} f$ ν-presque partout, en utilisant le théorème de la convergence dominée, on peut affirmer que

$$\| \mu - \mu_n \| = \int | f - f_n | \, d\nu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la proposition 2 et la remarque suivant la définition 2), on a $L(\mu_n) \subset L(\nu)$. Il reste seulement à prouver que $L(\mu) \subset \bigcup_n L(\mu_n)$.

Soit $x \in L(\mu)$. Alors il existe k assez grand et fixé tel que $V(\mu^k, x) < 2$. Posons $\varepsilon = 2 - V(\mu^k, x)$. Alors pour tout n :

$$V(\mu_n^k, x) < \| \mu_n^k - \mu^k \| + \| (\mu^k - \mu_n^k)\varepsilon_x \| + V(\mu^k, x) ;$$

or :

$$\| \mu_n^k - \mu^k \| \leqslant k \| \mu_n - \mu \|$$

puisque μ_n et μ sont dans P(G). Prenons ensuite n assez grand pour que $2k \| \mu_n - \mu \| < \varepsilon$. Donc $V(\mu_n^k, x) < 2$, ce qui d'après le théorème 1, montre que $x \in L(\mu_n)$ et achève la preuve.

Rappelons qu'une partie C de G est appelée coset s'il existe un sous-groupe H et un point x de G tels que $C = x + H$. On vérifie facilement que si l'intersection d'une famille $(x_\alpha + H_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cosets est non vide, c'est un coset. Cette remarque donne un sens à la définition suivante :

DÉFINITION 4. — Si μ est dans P(G), on pose $C(\mu) = \cap \{ C : C$ coset fermé tel que $\mu(C) = 1 \}$.

$C(\mu)$ est donc le plus petit coset fermé qui « supporte » μ.

DÉFINITION 5. — Un élément μ de P(G) est dit fortement apériodique si $C(\mu) = G$.

Si $C(\mu) = x + H$, il est évident que $L(\mu) \subset H$. L'hypothèse de forte apériodicité dans le théorème suivant, qui caractérise le cas où $L(\mu) = H$, n'a donc rien de restrictif.

THÉORÈME 3. — Si μ de P(G) est fortement apériodique, alors $L(\mu) = G$ si et seulement si il existe un entier positif n et une mesure ν absolument continue par rapport à la mesure de Haar de G tels que $\nu \prec \mu^n$.

Preuve. — Il est assez surprenant que la partie « seulement si » de la preuve soit la plus brève. La méthode de Stam se transpose mot à mot dans le cadre actuel et nous ne démontrerons donc ici que la partie « si ».

Sans perte de généralité, compte tenu de l 3) et de la proposition 2), on peut supposer μ absolument continue par rapport à la mesure de Haar dx de G. La convolution de deux fonctions de $L^1(G)$ étant continue, on peut supposer continue la densité de μ.

Posons $f_n = \dfrac{d(\mu^n)}{dx}$. Alors

$$V(\mu^n, x) = \int |f_n(y) - f_n(y - x)|\, dy$$

est une fonction continue de x (voir [*2*]), et d'après le théorème 1, $L(\mu)$ est un sous-groupe ouvert de G ; $H = G/L(\mu)$ est un groupe discret et la mesure μ' induite par μ sur H est purement atomique. Si H comprend plus d'un élément, μ ayant été supposé fortement apériodique, il existe deux éléments distincts h_1 et h_2 de H tels que $\mu'(h_1)$ et $\mu'(h_2)$ soient non nuls. Si $\mu'(h) \neq 0$, définissons μ_h comme la restriction de μ au coset h multipliée par $1/\mu'(h)$. H étant discret, à densité continue, on peut écrire $\mu = \sum_{h \in H} \mu_h \mu'(h)$. Mais μ_{h_1} et μ_{h_2} étant absolument continues, il existe x_1 dans h_1 et x_2 dans h_2 tels que

$$\| \mu_{h_1} - \mu_{h_2} \varepsilon_{x_1 - x_2} \| = 2 - \alpha < 2 \quad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\mu'(h_1) \leqslant \mu'(h_2)$. Posons alors $\mu''_{h+x_1-x_2} = \mu_h \varepsilon_{x_1 - x_2}$

$$\begin{aligned}
V(\mu, x_1 - x_2) &\leqslant \sum_{\substack{h \in H \\ h \neq h_1}} \| \mu_h \mu'(h) - \mu''_h \mu'(h + h_2 - h_1) \| \\
&\quad + \| \mu_{h_1} \mu'(h_1) - \mu''_{h_1} \mu'(h_2) \| \\
&\leqslant 2 - \mu'(h_1) - \mu'(h_2) + \mu'(h_1) \| \mu_{h_1} - \mu''_{h_1} \| + \| \mu''_{h_1} \| \, \| \mu'(h_1) - \mu'(h_2) \| \\
&= 2 - \mu'(h_1) - \mu'(h_2) + \mu'(h_1)(2 - \alpha) + \mu'(h_2) - \mu'(h_1) \\
&= 2 - \alpha \mu'(h_1) < 2
\end{aligned}$$

Donc $x_1 - x_2 \in L(\mu)$, ce qui contredit le fait que H ait plus d'un point et montre que $L(\mu) = G$.

COROLLAIRE. — Si μ est purement atomique, soit $x + \mathrm{H}$ le plus petit coset contenant l'ensemble de ses atomes. Alors $\mathrm{L}(\mu) = \mathrm{H}$.

Preuve. — Soit G_d le groupe G muni de la topologie discrète. L'application identité de $\mathrm{M}(\mathrm{G}_d)$ dans M(G) conservant la norme, on a donc $\mathrm{L}(\mu) = \mathrm{L}(\mu\varepsilon_{-x}) \subset \mathrm{H}$. Comme $\mu\varepsilon_{-x}$ est concentrée dans H, cette dernière mesure est fortement apériodique par rapport au groupe H discret et évidemment absolument continue par rapport à sa mesure de Haar. Le théorème 1 permet alors de conclure.

4. REMARQUES

Dans [*4*] Wiener et Young construisent une mesure fortement apériodique μ sur les réels telle que $\mathrm{V}(\mu, x) = 2$, $\forall x \neq 0$. On peut se demander s'il existe une mesure fortement apériodique μ telle que $\mathrm{V}(\mu^n, x) = 2$, $\forall x \neq 0$, $\forall n$, autrement dit telle que $\mathrm{L}(\mu) = \{ 0 \}$. Il est vraisemblable qu'il en existe, mais à la connaissance de l'auteur, aucun exemple n'a été construit, et l'exemple de Wiener et Young semble difficile à tester (*).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] G. LETAC, *Problèmes de Probabilité.* Presses Universitaires de France, 1970, problème n° 70.

[*2*] W. RUDIN, *Fourier Analysis on Groups.* ınterscience, p. 3.

[*3*] A. J. STAM, On shifting iterated convolutions I, *Compositio Mathematica.*, vol. **17**, 1966, p. 268-280.

[*4*] N. WIENER et R. C. YOUNG, The total variation of $g(x + h) - g(x)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **35**, 1933, p. 327-340.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1971.

(*) *Note sur épreuve :* Guy FOURT, de l'Université de Clermont, a récemment construit une telle mesure dans $\mathbb{R}$ (« Existence de mesures à puissances singulières à toutes leurs translatées », *C. R. Acad. Sci.*, février 1972), ainsi que dans $\mathrm{D}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.