ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL SCHREIBER

Quelques remarques sur les caractérisations des espaces $L^p, 0 \leq p < 1$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 1 (1972), p. 83-92

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_1_83_0>

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 1, 1972, p. 83-92. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Quelques remarques sur les caractérisations des espaces L^p, $0 \leqslant p < 1$

par

Michel SCHREIBER
Université de Nancy 1

SOMMAIRE. — On montre la stabilité par ultraproduit de certaines classes d'espaces F-normés et p-normés, en particulier des espaces L^p, $0 \leqq p < 1$. On en déduit une caractérisation de type universel.

SUMMARY. — It is shown that certain classes of F-normed and p-normed spaces, in particular L^p, $0 \leqq p < 1$, are closed for ultraproduct. A characterisation of universel type is then deduced.

§ 0. Dans ce travail, on montre que les résultats obtenus dans [*1*] et [*2*] par J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle et J.-L. Krivine peuvent s'étendre au cas des espaces L^p, $0 \leqslant p < 1$, l'espace L^0 étant entendu comme un espace de variables aléatoires muni de la convergence en probabilité. Les classes de sous-espaces L^p, $0 \leqslant p < 1$, considérés comme espaces vectoriels métriques en différents sens sont stables par ultraproduit. Les résultats de [*2*] montrent donc l'existence d'une caractérisation de type universel. Il est curieux de remarquer que la démonstration faite dans [*5*] pour $p \geqslant 1$ vaut pour $p < 1$ bien qu'il n'existe aucune interprétation (opérateur p-sommant) utilisant la dualité. Pour ce qui est du cas $0 < p < 1$, la technique montre que la convexité ne joue aucun rôle dans ces problèmes, l'outil fondamental restant l'interprétation probabiliste par les lois stables et les techniques d'espaces réticulés.

§ 1. ULTRAPRODUITS D'ESPACES F-NORMÉS

Soit E un espace vectoriel réel; il est dit F-normé s'il existe une fonction F, réelle, définie sur E, telle que

$$(1)\quad \begin{array}{llll} a) & F(x) \geqslant 0, & d) & F(x+y) \leqslant F(x) + F(y), \\ b) & x = 0 \text{ si } F(x) = 0, & e) & F(\lambda x_n) \to 0 \text{ si } F(x_n) \to 0, \\ c) & F(\lambda x) \leqslant F(x) \text{ si } |\lambda| \leqslant 1, & f) & F(\lambda_n x) \to 0 \text{ si } \lambda_n \to 0. \end{array}$$

On sait que F, la F-norme, définit sur E une structure d'espace vectoriel topologique métrisable [*4*].

Inversement, si E est un espace vectoriel topologique réel métrisable, il existe une F-norme permettant de définir la structure uniforme de E. En particulier si E est un espace localement borné, une p-norme sur E, c'est-à-dire une application réelle $|||\,.\,|||$ définie sur E telle que

$$(2)\quad \begin{array}{llll} a) & |||x||| \geqslant 0, & c) & |||\lambda x||| = |\lambda|\ |||x||| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \\ b) & x = 0 \text{ si } |||x||| = 0, & d) & |||x+y||| \leqslant |||x||| + |||y|||, \end{array}$$

est une F-norme.

On remarque qu'il ne s'agit pas ici d'espaces de Fréchet, aucune hypothèse de locale convexité n'ayant été faite.

On considère maintenant une famille $(E_i, F_i)_{i \in I}$ d'espaces F-normés, indexés par l'ensemble I et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Soit E_0 l'espace vectoriel

$$E_0 = \{ (x_i)_{i \in I}.\ x_i \in E_i, \text{ il existe } M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } F_i(x_i) \leqslant M \text{ pour tout } i \in I \},$$

pour les opérations $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$ et $\lambda(x_i)_{i\in I} = (\lambda x_i)_{i\in I}$. On pose $F((x_i)) = \lim\limits_{\mathcal{U}} F_i(x_i)$.

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des $(x_i)_{i\in I} \in E_0$ tels que $F((x_i)) = 0$. Alors $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de E_0 car l'inégalité (1, *d*) passe à la limite suivant $\mathcal{U}$. On note $E = \prod\limits_{I} E_i/\mathcal{U} = E_0/\mathcal{N}$ le quotient de E_0 par $\mathcal{N}$. On écrit 0 pour l'élément nul de E.

PROPOSITION (1.1). — (E, F) est un espace F-normé.

Les propriétés (1, *a*), (1, *b*), (1, *c*) et (1, *d*) sont clairement satisfaites par F. Pour montrer (1, *e*), soit $\{ (x_i^n)_{i\in I} \}$ une suite d'éléments de E tels que $F(\lambda(x_i^n)) \to 0$ quand $n \to \infty$. Si $|\lambda| \leqslant 1$, d'après (1, *c*), $F(\lambda(x_i^n)) \to 0$. Si $|\lambda| > 1$, on peut toujours écrire $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ avec $|\lambda_j| \leqslant 1$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. D'où

$$F(\lambda(x_i^n)) = F(\lambda_1(x_i^n) + \ldots + \lambda_k(x_i^n)) \leqslant F(\lambda_1(x_i^n)) + \ldots + F(\lambda_k(x_i^n))$$

et $F(\lambda_j(x_i^n)) \to 0$ quand $n \to \infty$. La propriété (1, *f*) est évidente.

DÉFINITION 1.1. — On appelle ultraproduit des espaces F-normés (E_i, F_i) suivant l'ultrafiltre $\mathscr{U}$ l'espace F-normé (E, F). Si (E_i, F_i) est complet pour chaque i, on appelle ultraproduit des (E_i, F_i) le complété de (E, F).

La proposition 1.1 peut encore s'énoncer

PROPOSITION 1.1′. — Le classe des espaces F-normés est stable par ultraproduit.

En particulier si F est un p-norme,

PROPOSITION 1.2. — La classe des espaces p-normés est stable par ultraproduit.

Étant donné un espace F-normé (E, F), soient $\mathscr{S}$ la famille de ses sous-espaces S de dimension finie, $\mathscr{U}_{\mathscr{S}}$ un ultrafiltre sur $\mathscr{S}$ et $\prod_{\mathscr{S}} S/\mathscr{U}_{\mathscr{S}}$ l'ultraproduit des S suivant $\mathscr{U}_{\mathscr{S}}$ (l'existence d'un ultrafiltre sur $\mathscr{S}$ est assurée puisque $\{ \Lambda(S) = \{ S' \in \mathscr{S}, S' > S \}, S \in \mathscr{S} \}$ en est un. L'injection h qui à $x \in E$ fait correspondre $(x_S)_{S \in \mathscr{S}} \in \prod_{\mathscr{S}} S/\mathscr{U}_S$ où $x_S = x$ si $x \in S$ et $x_S = 0$ si $x \notin S$ est linéaire et isométrique $(F(h(x)) = \lim_{\mathscr{U}} F((x_S)) = F(x))$.

Soit $\mathscr{C}$ une classe d'espaces F-normés;

DÉFINITIONS (1.2).

1) Un espace F-normé est dit de type $\mathscr{C}$ s'il existe un élément $C \in \mathscr{C}$ et une isométrie de E dans C.

2) Un λ-isomorphisme T d'un espace F-normé dans un espace F′-normé E′ est une application linéaire continue T de E dans E′ telle que si on note $\| T \| = \operatorname{Sup}_{x \in E} \frac{F'(Tx)}{F(x)}$, alors $\| T \| \,.\, \| T^{-1} \| \leqslant \lambda$. (On a en général $\lambda \geqslant 1$, le cas $\lambda = 1$ correspondant à une isométrie).

3) On dit qu'un espace F-normé E se plonge λ-isomorphiquement dans $\mathscr{C}$ ou est de type $\lambda - \mathscr{C}$ s'il existe $C \in \mathscr{C}$ et un λ-isomorphisme de E dans C.

4) Une classe $\mathscr{C}$ d'espaces F-normés a la propriété de λ-finitude si pour tout espace F-normé E les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) E est de type $\lambda - \mathscr{C}$,

b) tout sous-espace de dimension finie de E est de type $\lambda - \mathscr{C}$.

PROPOSITION 1.3. — Toute classe $\mathscr{C}$ d'espaces F-normés stable par ultra-produit a la propriété de λ-finitude.

La démonstration se fait comme dans le cas des espaces de Banach [2]. Il est évident que *a*) entraîne *b*). Si E est un espace F-normé, $(E_S)_{S\in\mathscr{S}}$ la famille de ses sous-espaces de dimension finie, il existe pour chaque $S \in \mathscr{S}$ un λ-isomorphisme T_S de E_S dans un espace C_S de $\mathscr{C}$, donc un λ-isomorphisme de $\prod_{\mathscr{S}} E_S/\mathscr{U}$ dans $\prod_{\mathscr{S}} C_S/\mathscr{U}$ et on sait qu'il existe une isométrie naturelle de E dans $\prod_{\mathscr{S}} E_S/\mathscr{U}$.

§ 2. RAPPELS SUR LES ESPACES VECTORIELS MÉTRIQUES RÉTICULÉS

On suppose maintenant que pour chaque i, E_i est un espace vectoriel réel, F_i-normé, réticulé, complet pour la topologie définie par F_i et on note l'ordre $\leqslant$, le sup $\vee$, l'inf $\wedge$, $x_i^+ = x_i \vee 0$, $x_i^- = x_i \wedge 0$, $|x_i| = x_i^+ + x_i^-$. On suppose de plus que pour chaque i les relations

1) $F_i(|x_i|) = F_i(x_i)$,
2) $0 \leqslant F_i(x_i) \leqslant F_i(y_i)$ si $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$,

sont satisfaites. On remarque que ces conditions sont du type de celles qu'on note (A, B) dans le cas normé [3]. Ces relations entraînent :

a) dans chaque (E_i, F_i) les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont continues ; en effet pour x_i et $y_i \in E_i$, on a $x_i \vee y_i = (x_i - y_i)^+ + y_i$ et, comme les opérations vectorielles sont continues, la continuité de $\vee$ est équivalente à celle de $(\ )^+$. Mais en vertu de la sous-linéarité $v_i = x_i^+ + y_i^+ \leqslant (x_i - y_i)$ et $-v_i = y_i^+ - x_i^+ \leqslant (y_i - x_i)^+ = (x_i - y_i)^-$. D'où $F_i(x_i^+ - y_i^+) = F_i(v_i) = F_i(v_i^+ + v_i^-) \leqslant F_i((x_i - y_i)^+ + (x_i - y_i)^-) = F_i(x_i - y_i)$;

b) puisque dans tout espace vectoriel réel $|x \vee y - z \vee u| \leqslant |x - y| + |y - u|$ on a pour tout i, $F_i(x_i \vee y_i - z_i \vee u_i) \leqslant F_i(x_i - z_i) + F_i(y_i - u_i)$.

On munit E_0 de l'ordre $(x_i)_{i\in I} \leqslant (y_i)_{i\in I}$ si $x_i \leqslant y_i$ pour tout i et on pose $(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee y_i)_{i\in I}$. On a donc pour $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ et $(z_i)_{i\in I}$ dans E_0, $F_i(x_i \vee z_i - y_i \vee z_i) \leqslant F_i(x_i - y_i)$ pour tout i, soit $F_i((x_i) \vee (z_i) - (y_i) \vee (z_i)) \leqslant F_i((x_i) - (y_i))$. Donc si $(x_i)_{i\in I} \sim (y_i)_{i\in I} \pmod{\mathscr{N}}$ on a $(x_i)_{i\in I} \vee (z_i)_{i\in I} \sim (y_i)_{i\in I} \vee (z_i)_{i\in I} \pmod{\mathscr{N}}$. Il s'ensuit que E est réticulé.

D'autre part, comme $F((x_i) \vee (y_i) - (x_i') \vee (y_i')) \leqslant F(x_i - x_i') + F(y_i - y_i')$ l'opération v de E × E dans E est continue.

Enfin, les conditions 1 et 2 sont satisfaites: $F(|x_i|) = F((x_i))$ et $0 \leqslant F((x_i)) \leqslant F((y_i))$ si $0 \leqslant (x_i)_{i\in I} \leqslant (y_i)_{i\in I}$. On a donc

PROPOSITION 2.1. — La classe des espaces vectoriels réels réticulés, F-normés, de F-norme satisfaisant les conditions 1 et 2 est stable par ultraproduit. C'est en particulier vrai si les F-normes sont des p-normes.

On a d'autre part

PROPOSITION 2.2. — Soit E un espace vectoriel réel, F-normé, réticulé, complet, de F-norme satisfaisant les conditions

1) $F(|x|) = F(x)$,
2) si $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $F(x) \leqslant F(y)$ est si de plus $x \neq y$, $F(x) < F(y)$,
3) toute suite décroissante d'éléments $\geqslant 0$ converge.

Alors il existe dans E une algèbre de Boole $\mathscr{B}$ vérifiant les deux propriétés

a) pour tout $z \geqslant 0$, $z \in E$, il existe $e \in \mathscr{B}$ tel que $z \wedge e = 0$,
b) si $e \in \mathscr{B}$ et $u \in E$, si $u \wedge (e - u) = 0$, alors $u \in \mathscr{B}$ et le sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$ engendré par $\mathscr{B}$ est partout dense dans E.

La démonstration se fait comme dans le cas des espaces de Banach [*2*]. L'algèbre est de la forme $\bigoplus_J \mathscr{B}_j$ où chaque $\mathscr{B}_j$ est une algèbre de Boole de E telle que

si $x \in E$, $e \in \mathscr{B}_j$, $x \wedge (e - x) = 0$	entraîne	$x \in \mathscr{B}_j$,
si $x \in \mathscr{B}_j$, $y \in \mathscr{B}_k$, $j \neq k$,	alors	$x \wedge y = 0$,

pour tout $z \in E$, $z > 0$, il existe $x \in \mathscr{B}_j$ tel que $z \wedge x \neq 0$ (ou encore la famille $(\mathscr{B}_j)_{j\in J}$ est maximale parmi celles satisfaisant aux deux premières propriétés).

§ 3. LES ESPACES L^p, $0 < p < 1$

Soit $L^p(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $0 < p < 1$, l'espace des classes d'équivalence des fonctions mesurables à valeurs réelles définies sur Ω_i telles que

$$\| f_i \|_p = \left(\int_{\Omega_i} | f_i |^p d\mu_i \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

pour la relation d'équivalence $f_i \sim g_i$ si $\| f_i - g_i \|_p = 0$. On sait que $\| f_i \|_p^p$ est une p-norme, donc une F-norme [*4*], d'où en particulier

$$\| f_i + g_i \|_p^p \leqslant \| f_i \|_p^p + \| g_i \|_p^p. \tag{1}$$

La quasi-norme $\| f_i \|_p$ définit sur $L^p(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$ une topologie d'espace vectoriel topologique réel localement borné par l'inégalité

$$(2) \qquad \| f_i + g_i \|_p \leqslant 2^{\frac{1-p}{p}} (\| f_i \|_p + \| g_i \|_p).$$

Pour tout i, on pose $E_i = L^p(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$; le sous-espace vectoriel E_0 de $\prod_I L^p(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$ est alors défini par

$$E_0 = \{ (f_i)_{i\in I}, f_i \in L^p(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mu_i), \text{ il existe } M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \| f_i \|_p^p \leqslant M \text{ pour tout } i \}.$$

Pour tout élément $(f_i)_{i\in I}$ de E_0, on écrit $\| (f_i) \|_p = \lim_{\mathscr{U}} \| f_i \|_p$; alors $\| (f_i) \|_p^p$ est une semi-p-norme. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des éléments de E_0 de semi-p-norme nulle ; alors

Définition 3.1. — L'ultraproduit E est le complété du quotient $E_0/\mathscr{N}$ pour la p-norme $\| (f_i) \|_p^p$.

On a dans le cas présent

Proposition 3.1. — E est un espace vectoriel réel, réticulé, p-normé, de p-norme satisfaisant les conditions 2.1 et 2.2.

Pour chaque i, E_i est un tel espace. D'après la proposition 2.1 il en est de même de E.

Proposition 3.2. — Toute suite décroissante d'élément $\geqslant 0$ de E est convergente.

Pour tout i, on a

$$(3) \qquad \| f_i + g_i \|_p \geqslant \| f_i \|_p + \| g_i \|_p \qquad \text{si} \qquad f_i \geqslant 0, g_i \geqslant 0,$$

puisque la fonction $x \to x^p$, $0 < p < 1$ est concave. Considérons une suite décroissante $((f_i^n)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments positifs de E. Pour chaque i, $f_i^n \geqslant f_i^{n+1}$, donc $\| f_i^n \|_p \geqslant \| f_i^{n+1} \|_p$, ce qui entraîne $\lim_{\mathscr{U}} \| f_i^n \|_p \geqslant \lim_{\mathscr{U}} \| f_i^{n+1} \|_p$ et donc $\| (f_i^n) \|_p \geqslant (f_i^{n+1}) \|_p$. La suite décroissante des nombres positifs $\| (f_i^n) \|_p$ tend en décroissant vers une limite α. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre positif N tel que si $n \geqslant N$ on ait $\| (f_i^n) \|_p < \alpha + \varepsilon$. Si $m \geqslant n \geqslant N$, $\| (f_i^n) \|_p \geqslant \| (f_i \ ) \|_p + \| (f_i^n) - (f_i \ ) \|_p$, soit $\| (f_i^n) - (f_i^m) \|_p \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que la suite $((f_i^n)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Les conditions de la proposition 2.2 étant satisfaites, on sait qu'il existe dans E une algèbre de Boole $\mathscr{B}$ telle que le sous-espace de E engendré par $\mathscr{B}$ soit dense dans E. La construction de $\mathscr{B}$ se fait comme dans le cas des espaces de Banach [1].

PROPOSITION 3.3. — La classe des espaces $L^p(\Omega, \mu)$, $0 < p < 1$, est stable par ultraproduit.

La proposition 1.3 entraîne

COROLLAIRE 3.3. — La classe des espaces $L^p(\Omega, \mu)$, $0 < p < 1$ possède la propriété de finitude.

DÉFINITION 3.2. — Un espace vectoriel réel E, p-normé est dit de type p, $0 < p < 1$ s'il existe un espace mesuré (X, μ) et une application linéaire isométrique de E dans $L^p(X, \mu)$.

En particulier l'ultraproduit d'une famille d'espaces $L^p(\Omega_i, \mu_i)$, $i \in I$ suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I est de type p.

PROPOSITION 3.4. — La classe des espaces réels p-normés de type p est stable par ultraproduit et possède donc la propriété de finitude.

Soit une famille $(E_i, F_i)_{i \in I}$ d'espaces p-normés et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. A tout (E_i, F_i) on associe un $L^p(\Omega_i, \mu_i)$ par l'isométrie $h_i : x_i \to h_i(x_i)$. On a alors $F((x_i)) = \lim_{\mathcal{U}} F_i(x_i) = \lim_{\mathcal{U}} \| h_i(x_i) \|_p^p = \| h((x_i)) \|_p^p$ où $h = (h_i)_{i \in I}$ définit bien une isométrie de $\prod_I E_i/\mathcal{U}$ dans $\prod_I L^p(\Omega_i, \mu_i)/\mathcal{U}$.

Soit E un espace vectoriel réel et soit ϕ une fonction réelle définie sur E telle que

1) $\phi(x) \geqslant 0$ et $\phi(x) = 0$ entraîne $x = 0$,

2) ϕ est homogène : $\phi(\lambda x) = |\lambda| \phi(x)$ pour tout λ réel,

3) $\phi(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)$ est continue en $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ quels que soient $x_1, \ldots, x_n$ de E,

4) il existe un nombre p, $0 < p < 1$, pour lequel ϕ^p est de type négatif sur E, c'est-à-dire satisfait à la condition $\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \phi^p(x_j - x_k) \leqslant 0$ quels que soient l'entier positif n, les éléments $(x_j, j = 1, \ldots, n)$ de E et les nombres réels $(\alpha_j, j = 1, \ldots, n)$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 0$.

PROPOSITION 3.5. — L'espace (E, ϕ^p) est un espace vectoriel réel p-normé de type p.

Soient $x_1, \ldots, x_n$, n éléments de E linéairement indépendants ; $E_{x_1,\ldots,x_n}$ peut donc être identifié à $\mathbb{R}^n$ et ϕ^p considérée comme une fonction de type négatif sur $\mathbb{R}^n$.

On sait [*1*] qu'on peut écrire

$$\phi^p(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \int_{S_n} \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j \right|^p d\mu_{x_1,\ldots,x_n}(s_1, \ldots, s_n)$$

où $\mu_{x_1,\ldots,x_n}$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur la sphère unité S_n de $\mathbb{R}^n$. Cette expression définit une application linéaire de $E_{x_1,\ldots,x_n}$ dans $L^p(S_n, \mu_{x_1,\ldots,x_n})$ qui à $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ fait correspondre $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j$, et en posant $\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\|_p^p = \phi(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)$ on définit une p-norme sur $E_{x_1,\ldots,x_n}$. Tout sous-espace de dimension finie de E pouvant être défini par des éléments $x_1, \ldots, x_k$ linéairement indépendants est donc un espace p-normé isométrique à un espace L^p, c'est-à-dire un espace de type p. La classe des espaces (E, ϕ^p) est stable par ultraproduit puisque

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \phi^p\big((x_i^j) - (x_i^k)\big) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \lim_{\mathcal{U}} \phi_i(x_i^j - x_i^k) \leqslant 0.$$

La proposition 3.4 entraîne donc que (E, ϕ^p) est de type p.

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel réel réticulé et que ϕ est une fonction réelle définie sur E pour laquelle il existe un p, $0 < p < 1$ tel que ϕ^p soit une p-norme sur E satisfaisant les conditions

1) E est complet pour la topologie définie par ϕ^p,
2) $\phi(|x|) = \phi(x)$,
3) $\phi(x + y) \geqslant \phi(x) + \phi(y)$ si x et $y \geqslant 0$,
4) $\phi^p(x \vee y) + \phi^p(x \wedge y) = \phi^p(x) + \phi^p(y)$ si x et $y \geqslant 0$.

Alors

PROPOSITION 3.6. — Il existe un espace mesuré (X, μ) tel que l'espace p-normé, réticulé complet (E, ϕ^p) soit isomorphe à $L^p(X, \mu)$.

Les conditions imposées à ϕ entraînent que les conditions de la proposition 2.2 sont satisfaites par ϕ^p ; d'où l'existence d'une σ-algèbre de Boole $\mathscr{B} = \bigoplus_J \mathscr{B}_j$. La mesure sur chaque $\mathscr{B}_j$ peut alors être définie par $\mu_j(u_j) = \phi^p(u_j)$. La démonstration se termine comme dans le cas des espaces de Banach [*1*].

On peut enfin montrer le résultat suivant qui généralise ceux de [*5*] :

PROPOSITION 3.7. — Soient E un espace p-normé et $\lambda \geqq 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que E soit λ-isomorphe à un sous-espace d'un espace L^p, $0 < p < 1$, est que quels que soient les rationnels σ_j, a_{ij},

$1 \leqq j \leqq m$, $1 \leqq i \leqq n$ tels que $\sum_{j=1}^{m} \sigma_j \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\rho_i \right|^p \geqq 0$ pour tous $\rho_1, \ldots, \rho_n$ réels, on ait :

$$\sum_{j=1}^{m} m_j\sigma_j \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \right\|_p^p \geqq 0,$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_n$ de E, où $m_j = \lambda$ si $\sigma_j \geqq 0$ et $m_j = 1$ si $\sigma_j < 0$.

La démonstration se fait comme dans le cas des espaces normés [*2*].

§ 4. LE CAS L^0.

Soient $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, P_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de probabilité indexée par l'ensemble I et $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur I. Soit d'autre part une fonction f, réelle, définie sur $\mathbb{R}$, paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $f(0)=0$, $f(1) = 1$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = K < \infty$ $\left(\text{par exemple } f(x) = \dfrac{2|x|}{1+|x|}\right)$. Une telle fonction permet de définir pour chaque $i \in I$ une F-norme sur l'espace vectoriel $L_i^0 = L(\Omega_i, \mathscr{A}_i, P_i)$ des classes de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, P_i)$ par

$$F_i(X_i) = E_i(f(X_i)) = \int_{\Omega_i} f(X_i(\omega))P_i(d\omega).$$

On sait que la topologie de l'espace vectoriel F-normé (L_i^0, F_i) est celle de la convergence en probabilité des variables aléatoires de L_i^0 et que (L_i^0, F_i) est complet.

D'autre part L_i^0 est réticulé pour l'ordre naturel pour les variables aléatoires réelles et F_i satisfait les conditions 2.1 et 2.2.

Soit (L^0, F) l'ultraproduit des (L_i^0, F_i) suivant $\mathscr{U}$ construit à partir de l'espace vectoriel

$L_0^0 = \{ (X_i)_{i\in I}, X_i \in L_i^0 \text{ ; il existe } M, 0 < M < K \text{ tel que } F_i(X_i) < M \text{ pour tout } i \}$.

On sait que (L^0, F) est un espace vectoriel réel, réticulé, F-normé (proposition 2.1).

Soit maintenant $\mathscr{B}_0$ l'ensemble des éléments de L^0 de la forme $(1_{A_i})_{i\in I}$, $A_i \in \mathscr{A}_i$ pour tout i : c'est une algèbre de Boole, d'élément unité $(1_{\Omega_i})_{i\in I}$; en effet $(1_{A_i})_{i\in I} \leqslant (1_{\Omega_i})_{i\in I}$, et si $(1_{A_i})_{i\in I}$ et $(1_{A'_i})_{i\in I}$ sont dans $\mathscr{B}_0$,

$$(1_{A_i})_{i\in I} \vee (1_{A'_i})_{i\in I} = (1_{A_i\cup A'_i})_{i\in I} \quad \text{et} \quad (1_{\Omega_i})_{i\in I} - (1_{A_i})_{i\in I} = (1_{A_i^c})_{i\in I}$$

sont dans $\mathscr{B}_0$. Et F est une probabilité additive sur $\mathscr{B}_0$ car $F((1_{\Omega_i})) = 1$ et $F((1_{A_i}) \vee (1_{A'_i})) = F((1_{A_i})) + F((1_{A'_i}))$ si $(1_{A_i})_{i\in I} \wedge (1_{A'_i})_{i\in I} = 0$.

Soit $\mathscr{B}$ le complété de $\mathscr{B}_0$ dans L^0 ; comme F est continue sur L^0 puisque $|F_i(X_i) - F_i(Y_i)| \leqslant F_i(X_i - Y_i)$ pour tout i, il s'ensuit que $\mathscr{B}$ est une σ-algèbre sur laquelle F est σ-additive. Pour tout élément B de $\mathscr{B}$, on pose $P(B) = F(B)$. La σ-algèbre probabilisée ($\mathscr{B}$, P) est isomorphe, d'après le théorème de Loomis, à une σ-algèbre probabilisée ($\mathscr{A}$, P) quotient d'une σ-algèbre de parties d'un ensemble Ω par un σ-idéal d'éléments de probabilité P nuls.

L'espace $\mathscr{R}$ des fonctions étagées sur $\mathscr{B}$ est isomorphe à l'espace $\mathscr{E}$ des fonctions étagées sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Puisque P est additive sur $\mathscr{B}$ pour les éléments étrangers et $F(\lambda B) = \lim\limits_{\mathscr{U}} F_i(\lambda B_i) = f(\lambda) \lim\limits_{\mathscr{U}} F_i(B_i) = f(\lambda)F(B)$, la fonctionnelle F définit sur $\mathscr{E}(\Omega, P)$ une topologie d'espace F-normé équivalente à celle de la convergence en probabilité. Le complété pour F de $\mathscr{E}(\Omega, P)$ étant $L^0(\Omega, \mathscr{A}, P)$, espace des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ munies de la convergence en probabilité, on a

PROPOSITION 4.1. — Le sous-espace $\overline{\mathscr{R}}$ de L^0, complété de l'espace engendré par $\mathscr{B}_0$ est isomorphe à $L^0(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Soit maintenant $(X_i)_{i\in I}$ un élément étranger à $\mathscr{B}_0$, c'est-à-dire tel que $F((X_i) \wedge (1_{A_i})) = 0$ pour tout élément $(1_{A_i})_{i\in I}$ de $\mathscr{B}_0$, en particulier pour $(1_{\Omega_i})_{i\in I}$. Alors $\lim\limits_{\mathscr{U}} F_i(X_i \wedge 1_{\Omega_i}) = 0$ ce qui implique que l'ensemble $\{ i \in I, X_i = 0, P_i - \text{p. s.} \} \in \mathscr{U}$, c'est-à-dire $(X_i)_{i\in I} = 0$. Le sous-espace $\overline{\mathscr{R}}$ de L^0 est donc identique à L^0, d'où

PROPOSITION 4.2. — L'ultraproduit L^0 d'une famille d'espaces de variables aléatoires munies de la convergence en probabilité $L^0(\Omega_i, \mathscr{A}_i, P_i)$ est isométrique, en tant qu'espace vectoriel métrique réticulé à un espace du même type, $L^0(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. BRETAGNOLLE, D. DACUNHA-CASTELLE et J.-L. KRIVINE, Lois stables et espaces L^p. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. II, n° 3, 1966, p. 231-259.

[*2*] D. DACUNHA-CASTELLE et J.-L. KRIVINE, Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach. *Studia Math.* (à paraître).

[*3*] M. M. DAY, *Normed linear spaces.* Ergebnisse d. Math. Berlin Heidelberg, Springer, 1958.

[*4*] G. KÖTHE, *Topological vector spaces I.* Berlin Heidelberg, 1969.

[*5*] J. LINDENSTRAUSS et A. PELCZYNSKI, Absolutely summing operators in L^p-spaces and their applications. *Studia Math.*, t. **29**, 1967-1968, p. 275-326.

(Manuscrit reçu le 21 juillet 1971).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1859*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6334. 1-1972.