

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. FRÉMOND

M. SUEUR-PONTIER

Caractérisation des groupes localement compacts de type (T) ayant la propriété de point fixe

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, n° 4 (1971), p. 293-298

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_4_293_0

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Caractérisation des groupes localement compacts de type (T) ayant la propriété de point fixe

par

C. FRÉMOND (*) et M. SUEUR-PONTIER
(Paris) (Poitiers)

SUMMARY. — Using results of Azencott, we characterize all locally compact groups for which the bounded measurable functions of non singular random walks are constant.

INTRODUCTION

Dans sa thèse [1], Azencott définit les espaces de Poisson d'un groupe G localement compact à base dénombrable, associés à des mesures de probabilité μ de la manière suivante : on appelle *fonction μ -harmonique* toute fonction borélienne bornée f sur le groupe G telle que $f * \mu = f$; Azencott munit l'espace vectoriel H_μ des fonctions μ -harmoniques uniformément continues à gauche d'une structure de C^* -algèbre ; l'*espace de Poisson* π_μ associé à la probabilité μ est alors le spectre de la C^* -algèbre H_μ . L'espace π_μ est un G -espace. Une mesure de probabilité est dite *étalée* s'il existe un entier n tel que μ^{*n} n'est pas étrangère à la mesure de Haar sur G . Le groupe G est dit *de type (T)* si, pour toute mesure de probabilité μ étalée, il est transitif sur l'espace de Poisson π_μ associé. Un groupe G a la *propriété de point fixe* si : chaque fois que G opère continûment sur une partie convexe compacte K d'un espace vectoriel topologique localement convexe, par des transformations affines, alors G laisse fixe un point de K .

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 2 « Théories physiques et Probabilités », associée au C. N. R. S.

NOTATIONS

Si G est un groupe localement compact à base dénombrable, on notera G_0 sa composante connexe, R son radical. La classe des groupes de type (T) sera symbolisée par (T), celle des groupes ayant la propriété de point fixe par (PF).

Azencott démontre dans [1] (théorèmes V-2 et V-3) les résultats suivants.

THÉORÈME 0.1. — *Si G est un groupe de Lie connexe, et si G/R est compact, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) $G \in (T)$.
- 2) $R \in (T)$.

D'autre part, Azencott caractérise les groupes de la classe (T) ayant la propriété de point fixe :

THÉORÈME 0.2. — *Si G est un groupe de Lie à base dénombrable, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a) $G \in (T) \cap (PF)$.
- b) G/G_0 est fini ; $G_0 \in (T) \cap (PF)$.
- c) G/G_0 est fini ; G_0/R est compact ; pour tout élément X du radical \mathcal{R} de l'algèbre de Lie de G , les valeurs propres de $\text{ad}_{\mathcal{R}} X$ sont imaginaires pures.
- d) Pour toute mesure de probabilité étalée μ sur G , l'espace de Poisson π_μ est fini.
- e) Pour toute mesure de probabilité étalée μ sur G , l'espace vectoriel des fonctions μ -harmoniques est de dimension finie.
- f) G/G_0 est fini ; pour toute mesure de probabilité étalée μ sur G , une fonction mesurable bornée sur G est μ -harmonique si et seulement si elle admet comme périodes tous les points du support de μ .

Azencott suggère ([1], remarque V.5) que l'on doit pouvoir étendre cette caractérisation aux groupes localement compacts en utilisant le résultat suivant de Rickert [5] (qui est d'ailleurs une extension de résultats de Furstenberg [3]) :

THÉORÈME 0.3. — *Si G est un groupe localement compact à base dénombrable, et si G/G_0 est compact, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- a) $G \in (PF)$.
- b) G/R est compact.

Le but de cet article est de montrer que l'on peut effectivement étendre ainsi cette caractérisation.

**§ 1. EXTENSION DU THÉORÈME 0.1
AUX GROUPES DE LIE NON CONNEXES**

THÉORÈME 1.1. — *Si G est un groupe de Lie à base dénombrable tel que G/R est compact, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) $G \in (T)$.
- ii) $G_0 \in (T)$.
- iii) $R \in (T)$.

Démonstration. — Comme R est inclus dans G_0 , G_0/R est un fermé du compact G/R , donc G_0/R est compact. De plus, R est aussi le radical de G_0 ; le théorème 0.1 appliqué à G_0 montre l'équivalence de ii) et iii). Par ailleurs, G/G_0 , isomorphe à $G/R/G_0/R$, est compact, donc fini. Le fait que G_0/R est compact entraîne que $G_0 \in (PF)$ (théorème 0.3). Alors, le théorème 0.2 permet d'affirmer que ii) entraîne i). La réciproque est vraie (d'après [1], § IV.1, corollaire 2).

**§ 2. EXTENSION DU THÉORÈME 0.2
AUX GROUPES LOCALEMENT COMPACTS
A BASE DÉNOMBRABLE**

THÉORÈME 2.1. — *Si G est un groupe localement compact à base dénombrable tel que G/R est compact, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- i) $G \in (T)$.
- ii) $G_0 \in (T)$.

Démonstration. — Puisque G/R est compact, G/G_0 est compact pour la même raison que dans le § 1. On peut alors appliquer un résultat de Montgomery et Zippin ([4], p. 153 et 175) : « il existe un sous-groupe compact distingué K de G tel que G/K soit un groupe de Lie ». L'image du radical R par l'application naturelle $p : G \rightarrow G/K$, RK/K , est un sous-groupe connexe, distingué et résoluble ; donc, RK/K est contenu dans le radical de G/K , $R(G/K)$. Par ailleurs, le quotient $G/K/RK/K$, isomorphe à G/RK , est compact, puisque G/R l'est et que RK contient R . Le fait que RK/K est contenu dans $R(G/K)$ induit une surjection canonique de $G/K/RK/K$ sur $G/K/R(G/K)$, qui, par conséquent, est aussi compact. Le théorème 1.1 s'applique alors au groupe de Lie G/K , dont la compo-

sante connexe est G_0K/K ([2], p. 58) : les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) $G/K \in (T)$.
- b) $G_0/G_0 \cap K \in (T)$ (puisque G_0K/K est isomorphe à $G_0/K \cap G_0$). Or, K et $G_0 \cap K$ sont des sous-groupes compacts distingués, respectivement de G et G_0 . Un résultat d'Azencott ([1], proposition IV.4 c)) permet de dire que chacune des propositions a) et b) est équivalente respectivement à i) et ii) du théorème, qui se trouve ainsi démontré.

On peut alors démontrer l'extension du théorème 0.2 aux groupes localement compacts à base dénombrable :

THÉORÈME 2.2. — *Si G est un groupe localement compact à base dénombrable, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a) $G \in (T) \cap (PF)$.
- b) G/G_0 est compact et $G_0 \in (T) \cap (PF)$.
- c) G/G_0 est compact, G_0/R est compact et il existe un sous-groupe compact distingué K de G tel que G/K est un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et tel que, si \mathcal{R} est l'algèbre de Lie de G/K , pour tout X de \mathcal{R} , les valeurs propres de $\text{ad}_{\mathcal{R}} X$ sont imaginaires pures.
- d) Pour toute mesure de probabilité étalée μ sur G , l'espace de Poisson π_μ est fini.
- e) Pour toute mesure de probabilité étalée μ sur G , l'espace vectoriel des fonctions μ -harmoniques est de dimension finie.
- f) G/G_0 est compact, et pour toute mesure de probabilité étalée μ sur G , une fonction mesurable bornée est μ -harmonique si et seulement si elle admet comme périodes tous les points du support de μ .

Démonstration. — Rappelons d'abord un résultat d'Azencott ([1], théorème IV.2).

(*) Pour que le groupe G soit de type (T), il faut et il suffit que G/G_0 soit compact, et qu'il existe un sous-groupe compact distingué K de G tel que G/K soit un groupe de Lie de type (T) ayant un nombre fini de composantes connexes.

Montrons que a) équivaut à b) : d'après (*) dans l'hypothèse a) G/G_0 est compact et G/K est un groupe de Lie de type (T). Par ailleurs, $K \cap G_0$ est un sous-groupe compact distingué de G_0 ; $G_0/K \cap G_0$ est isomorphe à G_0K/K , composante connexe de G/K . On peut alors appliquer le théorème 0.2 au groupe de Lie $G/K : G_0K/K$, donc aussi $G_0/K \cap G_0$, est de type (T). Le résultat (*) appliqué au groupe G_0 permet de conclure que G_0 est de type (T). Enfin d'après ([5], 5.4), $G \in (PF) \Rightarrow G_0 \in (PF)$.

Réciproquement, si G/G_0 est compact, d'après ([5], 4.8):

$$G_0 \in (\text{PF}) \Rightarrow G \in (\text{PF}).$$

De plus, si G_0 a la propriété du point fixe, G_0/R est compact ([5], 5.3); ceci ajouté au fait que G/G_0 est compact permet de dire que G/R est compact. On peut appliquer alors le théorème 2.1: $G_0 \in (\text{T}) \Rightarrow G \in (\text{T})$.

Montrons que *a) équivaut à c)*; on vient de voir que dans l'hypothèse *a)*, G/G_0 est compact. De plus, d'après ([5], 5.3), G_0/R est compact. Soit par ailleurs un sous-groupe compact distingué K de G tel celui du rappel 2.3: G/K est un groupe de Lie de type (T) ayant un nombre fini de composantes connexes. A ce groupe de Lie, on applique le théorème 0.2 dont la proposition *c)* donne la condition cherchée ici.

Dans l'hypothèse *c)* il suffira de montrer que G/K appartient à $(\text{T}) \cap (\text{PF})$ pour montrer *a)*, puisque K est un sous-groupe compact distingué de G . Pour montrer que G/K appartient à $(\text{T}) \cap (\text{PF})$, on applique à ce groupe de Lie l'équivalence des propositions *a)* et *c)* de 0.2: pour s'y ramener, il faut montrer que le quotient de la composante connexe de ce groupe de Lie par son radical, $R(G/K)$ est compact. On a vu que sa composante connexe est G_0K/K , et que son radical contient RK/K . Il existe donc une surjection canonique de $G_0K/K / RK/K$, isomorphe à G_0K/RK , sur ce quotient. Par ailleurs, G_0K/RK est isomorphe à $G_0/G_0 \cap RK$ ($G_0K = G_0 \cdot RK$ puisque G_0 contient R), et $G_0 \cap RK$ s'écrit encore $R \cdot (G_0 \cap K)$ et par conséquent contient R . Il existe donc une surjection canonique de G_0/R , compact par hypothèse, sur $G_0/G_0 \cap RK$. Donc, G_0K/RK , et par conséquent le quotient $G_0K/K / R(G/K)$, sont compacts.

Pour les dernières équivalences, la démonstration est la même que celle du théorème 0.2, puisque, pour les montrer, Azencott fait appel à des propositions concernant les groupes localement compacts à base dénombrable, et non pas seulement les groupes de Lie ([I], propositions IV.1; IV.7; IV.8). Cette dernière proposition ([I], IV.8) montre exactement que *a) entraîne d)*. Montrons que *d) entraîne a)*. μ est une mesure de probabilité étalée sur G , l'espace de Poisson associé π_μ est fini. Soit H le sous-groupe fermé engendré par le support de μ . En appliquant ([I], IV.7), on obtient que π_μ est isomorphe à G/H . La proposition ([I], IV.1) montre alors que G est transitif sur π_μ , donc G appartient à (T).

L'équivalence de *d)* et de *e)* résulte immédiatement de la proposition ([I], IV.7). Dans l'hypothèse *d)*, le groupe G appartient à (T), et par conséquent G/G_0 est compact. En utilisant à nouveau la proposition ([I], IV.7), on voit que, dans l'hypothèse *d)*, la proposition *f)* est complètement démontrée. Pour montrer la réciproque, on se ramène une dernière fois à la pro-

position ([1], IV. 7). On montre que G/H est fini, où H est toujours le sous-groupe fermé engendré par le support de la mesure μ : en effet, puisque la mesure μ est étalée, le sous-groupe H est ouvert. Ceci entraîne d'une part que G/H est discret, et d'autre part que H contient G_0 ; or, G/G_0 est compact ; donc G/H l'est aussi, et par conséquent G/H est effectivement fini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. AZENCOTT, Espaces de Poisson des groupes localement compacts, *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag, 1970.
- [2] N. BOURBAKI, Topologie Générale III.
- [3] H. FURSTENBERG, Poisson Formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math.*, t. 77, 1963, p. 335-386.
- [4] D. MONTGOMERY et L. ZIPPIN, *Topological transformation groups*, New York, Interscience Publishers, 1955.
- [5] N. W. RICKERT, Amenable groups and groups with the fixed point property. *Transactions Amer. Math. Soc.*, t. 127, 1967, p. 221-232.

Manuscrit reçu le 14 juin 1971.
