

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. HANEN

Processus ponctuels stationnaires et flots spéciaux

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, n° 1 (1971), p. 23-30

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_1_23_0

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Processus ponctuels stationnaires et flots spéciaux

par

A. HANEN
(Paris)

RÉSUMÉ. — On donne, en étendant un résultat d'Ambrose, une construction de la mesure de Palm associée à un processus ponctuel stationnaire. On en déduit quelques propriétés des processus ponctuels stationnaires ergodiques, en particulier le calcul de leur entropie.

SUMMARY. — We give, extending, an Ambrose's result, a construction of Palm's measure associated to a stationary point process—some properties of ergodic stationary point processes are then given, peculiarly the calculus of their entropy.

§ 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit Ω l'ensemble des parties localement finies de \mathbb{R} , vérifiant, pour tout $\omega \in \Omega$ $\sup \omega = +\infty$, $\inf \omega = -\infty$.

Soit \mathcal{A} la σ algèbre initiale associée aux applications

$$A \rightarrow N_A(\omega) = \text{Cardinal de } (A \cap \omega),$$

A parcourant la σ algèbre β des Boréliens de \mathbb{R} .

$$\Omega_0 = \{ \omega : 0 \in \omega \}; \mathcal{A}_0 = \Omega_0 \cap \mathcal{A}$$

$$\xi_0(\omega) = \inf_{\substack{x \in \omega \\ x \geq 0}} x \quad \xi_n(\omega) = \inf_{\substack{x > \xi_{n-1}(\omega) \\ x \in \omega}} x \quad \eta_n(\omega) = \xi_{n+1}(\omega) - \xi_n(\omega)$$

La suite $\xi_n(\omega)$ est donc une suite strictement croissante, qui tend vers $\pm \infty$ si n tend vers $\pm \infty$ et

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \eta_n(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n(\omega) = +\infty$$

Soit ϕ_t l'application de Ω dans Ω définie par $x \in \phi_t(\omega) \Leftrightarrow x - t \in \omega$; on notera $\omega + t$ l'élément $\phi_t(\omega)$ de Ω . On montre aisément le :

LEMME. — Les applications ξ_n et η_n sont \mathcal{A} -mesurables et $\Phi = (\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ forme un groupe de bijections bimesurables de (Ω, \mathcal{A}) , tel que l'application $(\omega, t) \rightarrow \phi_t(\omega)$ soit mesurable pour les σ -algèbres $\mathcal{A} \otimes \beta$ sur $\Omega \times \mathbb{R}$ et \mathcal{A} sur Ω .

§ 2. FLOT SPÉCIAL ASSOCIÉ AU GROUPE $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$

THÉORÈME. — Soit $\bar{\Omega}$ le sous-ensemble de $\Omega_0 \times \mathbb{R}$ défini par la relation

$$\bar{\omega} \in \bar{\Omega} \Leftrightarrow \bar{\omega} = (\omega_0, u) \quad , \quad 0 \leq u < \eta_{-1}(\omega_0)$$

1) L'application

$$\omega \rightarrow \tau(\omega) = (\omega - \xi_0(\omega), \xi_0(\omega))$$

est une bijection bimesurable de (Ω, \mathcal{A}) sur $(\bar{\Omega}, \mathcal{A} \otimes \beta \cap \bar{\Omega})$.

2) L'application $\cdot S$

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \eta_{-1}(\omega_0)$$

est une bijection bimesurable de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$.

3) L'image par l'application τ du groupe ϕ_t est le flot spécial [1] [4] construit sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \eta_{-1}, S)$.

Démonstration

1) Il est clair tout d'abord que $\bar{\Omega}$ est un sous-ensemble mesurable de $(\Omega_0 \times \mathbb{R}^+, \mathcal{A}_0 \otimes \beta)$. D'autre part, $\omega - \xi_0(\omega)$ est bien un élément de Ω_0 , car $0 \in \omega - \xi_0(\omega) \Leftrightarrow \xi_0(\omega) \in \omega$, ce qui a bien lieu. De plus

$$\eta_{-1}(\omega - \xi_0(\omega)) = \eta_{-1}(\omega) = \xi_0(\omega) - \xi_{-1}(\omega) > \xi_0(\omega)$$

Donc $(\omega - \xi_0(\omega), \xi_0(\omega)) \in \bar{\Omega}$. On vérifie aisément que l'application $\bar{\tau}$ de $\bar{\Omega}$ dans $\bar{\Omega}$, définie par $\bar{\tau}(\omega_0, u) = \omega_0 + u$ est l'application réciproque de τ ; la bimesurabilité de τ est immédiate.

2) Il est clair que l'application S est une application de Ω_0 dans Ω_0 , telle que

$$\eta_0(S\omega_0) = \eta_{-1}(\omega_0)$$

L'application $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - \eta_0(\omega_0)$ est l'application réciproque de S , qui est donc une bijection dont on montre facilement la bimesurabilité. Remarquons d'autre part que

$$S(\omega - \xi_0(\omega)) = \omega - \xi_{-1}(\omega)$$

et plus généralement

$$\omega - \xi_j(\omega) = S^{-j}(\omega - \xi_0(\omega)).$$

De plus,

$$\eta_k(\omega) = \eta_k(\omega - \xi_0(\omega)) = \eta_{-1}(\omega - \xi_{k+1}(\omega)) = \eta_{-1}(S^{-(k+1)}(\omega_0))$$

(en posant $\omega_0 = \omega - \xi_0(\omega)$).

3) L'application $\eta_{-1}(\omega_0)$ vérifie

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{-1}(S^n(\omega_0)) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \eta_n(\omega_0) = +\infty \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} \eta_{-1}(S^n(\omega_0)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n(\omega_0) = +\infty \end{aligned}$$

On peut donc [1] [4] définir le flot spécial T_t construit sur (Ω_0, η_{-1}, S) .

Il reste à vérifier la commutativité du diagramme.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\phi_t} & \Omega \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \bar{\Omega} & \xrightarrow{T_t} & \bar{\Omega} \end{array} \quad \begin{aligned} \text{ie } (T_t \circ \tau)(\omega) &= (\tau \circ \phi_t)(\omega) \\ (\tau \circ \phi_t)(\omega) &= \tau(\omega + t) = (\omega + t - \xi_0(\omega + t), \xi_0(\omega + t)) \end{aligned}$$

Soit $j = \inf_{\xi_k(\omega) \geq -t} k$; on a $\xi_0(\omega + t) = \xi_j(\omega) + t$ et donc

$$\omega + t - \xi_0(\omega + t) = \omega - \xi_j(\omega) = S^{-j}(\omega - \xi_0(\omega)) = S^{-j}(\omega_0)$$

où

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega - \xi_0(\omega) \\ \xi_0(\omega + t) &= \xi_j(\omega) + t = \xi_j(\omega) - \xi_0(\omega) + t + \xi_0(\omega) \end{aligned}$$

Supposons $j \leq 0$

$$\begin{aligned} \xi_0(\omega + t) &= \xi_0(\omega) + t - \sum_{k=j}^{k=-1} \eta_k(\omega) = \xi_0(\omega) + t - \sum_{k=j}^{k=-1} \eta_k(\omega_0) \\ &= \xi_0(\omega) + t - \sum_{k=j}^{k=-1} \eta_{-1}(S^{-(k+1)}(\omega_0)) \\ &= \xi_0(\omega) + t - \sum_{k'=0}^{-j-1} \eta_{-1}(S^{k'}(\omega_0)) \end{aligned}$$

Donc, en posant $u = \xi_0(\omega)$, $j' = -j$

$$(\tau_0 \phi_t)(\omega) = (S^{j'}(\omega_0)), u + t - \sum_{k'=0}^{j'-1} \eta_{-1}(S^{k'}(\omega_0)) \quad (1)$$

$$(T_t \circ \tau)(\omega) = T_t(\omega - \xi_0(\omega), \xi_0(\omega)) = T_t(\omega_0, u) \quad (2)$$

D'après la définition d'un flot spécial (1) et (2) coïncident; la démonstration est analogue dans le cas $j > 0$; on a bien finalement

$$\tau \circ \phi_t = T_t \circ \tau, \quad \text{c. q. f. d.}$$

§ 3. MESURE DE PALM ASSOCIÉE A UN PROCESSUS PONCTUEL STATIONNAIRE

Rappelons [5] [6] qu'on appelle processus ponctuel stationnaire toute probabilité λ sur (Ω, \mathcal{A}) , invariante par le flot (ϕ_t) .

En vertu du théorème précédent, la mesure image de λ par l'application τ , $\tau(\lambda)$, sera une mesure sur $(\bar{\Omega}, \mathcal{A} \otimes \beta \cap \bar{\Omega})$, invariante par le flot spécial (T_t) .

THÉORÈME. — Soit λ un processus ponctuel stationnaire.

Il existe sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ une mesure v_0 unique telle que

1) S soit un automorphisme de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0)$

2) $\int_{\Omega} f d\lambda = \int_{\Omega_0} \left(\int_0^{\eta^{-1}(\omega_0)} f(\omega_0 + u) du \right) dv_0$, pour toute fonction mesurable positive définie sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$.

Démonstration. — Soit $\bar{\mathcal{A}}$ la complétée de $(\mathcal{A}_0 \otimes \beta) \cap \bar{\Omega}$ pour la mesure $\tau(\lambda)$, \bar{m} la complétée de $\tau(\lambda)$; le flot T_t sur $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{m})$ vérifie les conditions suivantes :

1) T_t est un groupe d'automorphismes de $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{m})$,

2) l'application $(\bar{\omega}, t) \rightarrow T_t(\bar{\omega})$ est $\bar{\mathcal{A}} \hat{\otimes} \beta$ mesurable,

3) si $\bar{\omega} = (\omega_0, u)$, les applications $\bar{\omega} \rightarrow F(\bar{\omega}) = \eta_{-1}(\omega_0)$ et $\bar{\omega} \rightarrow G(\bar{\omega}) = u$ sont deux applications mesurables, à valeurs dans (\mathbb{R}, β) .

On peut montrer, si ces conditions sont vérifiées, l'existence sur Ω_0 d'une structure d'espace mesuré complet $(\tilde{\mathcal{A}}, m)$, telle que :

1) S soit un automorphisme de $(\Omega_0, \tilde{\mathcal{A}}, m)$,

2) $\bar{\mathcal{A}}$ est la complétée de $(\tilde{\mathcal{A}} \otimes \beta) \cap \bar{\Omega}$ pour la mesure produit $m \otimes dx$, restreinte à $\bar{\Omega}$, dx désignant la mesure de Lebesgue sur (\mathbb{R}, β) et \bar{m} coïncide avec la complétée de la restriction à $\bar{\Omega}$ de $m \otimes dx$.

$\tilde{\mathcal{A}}$ est définie ainsi :

$$A \in \tilde{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (A \times \mathbb{R}) \cap \bar{\Omega} \in \bar{\mathcal{A}}$$

m se définit d'abord sur les ensembles $A \times [0, c[$ contenus dans $\bar{\Omega}$ par la formule $m(A) = \frac{1}{c} \bar{m}(A \times [0, c[)$, dont on montre l'invariance lorsque c varie; ceci s'étend aisément ensuite aux éléments de $\tilde{\mathcal{A}}$; ce résultat est une extension de celui obtenu par Ambrose [1], dans le cas d'un flot spécial strict [1] [4].

Dans le cas qui nous intéresse, on a

$$A \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A \times \mathbb{R} \cap \bar{\Omega} \in (\mathcal{A}_0 \otimes \beta) \cap \bar{\Omega} \subset \bar{\mathcal{A}},$$

et donc $A \in \tilde{\mathcal{A}}$; comme S laisse \mathcal{A}_0 invariante, la restriction v_0 de m à \mathcal{A}_0 est telle que S est un automorphisme de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0)$.

D'autre part, la formule définissant m montre que $\tau(\lambda)$ et $v_0 \otimes dx$ coïncident sur $(\mathcal{A}_0 \otimes \beta) \cap \bar{\Omega}$, car si $A \in \mathcal{A}_0$, $A \times [0, c[\subset \bar{\Omega}$, alors

$$A \times [0, c[\in \mathcal{A}_0 \otimes \beta \cap \bar{\Omega}$$

et donc

$$\bar{m}(A \times [0, c[) = \tau(\lambda)(A \times [0, c[) = v_0(A) \times c = (v_0 \otimes dx)(A \times [0, c[);$$

On en déduit aisément qu'alors

$$\tau(\lambda) = v_0 \otimes dx \quad \text{sur} \quad (\mathcal{A}_0 \otimes \beta) \cap \bar{\Omega}$$

La relation (2) résulte alors immédiatement du théorème de Fubini et du théorème de transfert des mesures; on en déduit aisément l'unicité de la mesure v_0 . La mesure v_0 s'appelle mesure de Palm associée au processus ponctuel stationnaire λ . Son existence et la relation (2) ont été montrées, par des méthodes différentes, par Ryll Nardzewski [5] et Neveu [6].

§ 4. RELATIONS ENTRE MESURE DE PALM ET LOI DES INTERVALLES

Soit $Y \subset (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$ la classe des suites bilatères positives définie ainsi

$$y \in Y \Leftrightarrow y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad y_n > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{-\infty}^0 y_n = \sum_0^{+\infty} y_n = +\infty$$

\mathfrak{Y} la σ -algèbre canonique associée à Y , θ la translation définie sur (Y, \mathfrak{Y}) par $(\theta(y))_n = y_{n+1}$.

Soit H l'application de Ω dans Y

$$\omega \rightarrow (\eta_n(\omega)), \quad n \in \mathbb{Z}$$

H est une application mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans (Y, \mathfrak{Y}) , possédant les propriétés suivantes.

THÉORÈME. — La restriction de H à Ω_0 est une bijection bimesurable de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ sur (Y, \mathfrak{Y}) , rendant le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \xrightarrow{S^{-1}} & \Omega_0 \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ Y & \xrightarrow{\theta} & Y \end{array}$$

Démonstration. — On a les relations

$$\begin{aligned} \xi_n(\omega_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k(\omega_0) & n > 0 \\ \xi_0(\omega_0) &= 0 \\ \xi_n(\omega_0) &= - \sum_{k=-1}^{k=n} \eta_k(\omega) & n < 0 \end{aligned}$$

qui définissent les $\xi_n(\omega_0)$ et donc ω_0 , en fonction des $(\eta_n(\omega_0))$, cela montre que l'application H est bijective.

D'autre part,

$$\begin{aligned} ((\theta \circ H)(\omega_0))_n &= (H(\omega_0))_{n+1} = \eta_{n+1}(\omega_0) \\ ((H \circ S^{-1})(\omega_0))_n &= \eta_n(S^{-1}(\omega_0)) = \eta_{n+1}(\omega_0) \end{aligned}$$

Ce qui montre bien la commutativité du diagramme.

Soit v la mesure sur (Y, \mathfrak{Y}) image de la mesure v_0 sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ par l'application H .

THÉORÈME

- 1) La mesure v sur (Y, \mathfrak{Y}) est θ invariante.
- 2) ϕ_t est λ ergodique $\Leftrightarrow S$ est v_0 ergodique $\Leftrightarrow \theta$ est v ergodique.

3) Si la mesure v_0 est finie et si $v_0' = \frac{v_0}{v_0[\Omega_0]}$, $v' = \frac{v}{v(Y)}$.

a) $v(Y) = v_0(\Omega_0) = \alpha$,

b) si $\widehat{h}(\phi_t)$ (resp. $\widehat{h}(S)$, $\widehat{h}(\theta)$) est l'entropie de l'automorphisme ϕ_t (resp. S , θ) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ (resp. $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0')$, (Y, \mathfrak{Y}, v') ,

$$\widehat{h}(\phi_t) = \alpha |t| \widehat{h}(\theta) = \alpha |t| \widehat{h}(S)$$

Démonstration. — Le 1) résulte immédiatement de l'invariance de S par v_0 et de la commutativité du diagramme du théorème précédent. Il en résulte que les systèmes dynamiques $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0, S)$ et $(Y, \mathfrak{Y}, v, \theta)$ sont spatialement isomorphes.

Le 2) vient d'un résultat d'Ambrose sur les flots mesurés spéciaux.

T_t est \bar{m} ergodique $\Leftrightarrow S$ est m ergodique, T_t désignant le flot spécial mesuré associé à $(\Omega, \mathcal{A}, m, f, S)$.

Ici, ϕ_t est λ ergodique $\Leftrightarrow T_t$ est $\tau(\lambda)$ ergodique $\Leftrightarrow T_t$ est \bar{m} ergodique $\Rightarrow S$ est m ergodique $\Rightarrow S$ est v_0 ergodique sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$.

Réciproquement, S v_0 ergodique sur $(\Omega_0, \mathcal{A}_0) \Rightarrow S$ est \widehat{v}_0 ergodique sur $(\Omega_0, \widehat{\mathcal{A}}_0)$ (\widehat{v}_0 désignant la complétée de v_0 et $\widehat{\mathcal{A}}_0$ celle de \mathcal{A}_0 pour v_0) $\Rightarrow T_t$ est $\widehat{v}_0 \otimes dx \cap \bar{\Omega}$ ergodique $\Rightarrow T_t$ est $(v_0 \times dx) \cap \bar{\Omega}$ ergodique $\Rightarrow T_t$ est $\tau(\lambda)$ ergodique $\Leftrightarrow \phi_t$ λ ergodique. L'isomorphisme spatial de $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, v_0, S)$ et $(Y, \mathfrak{Y}, v, \theta)$ donne S v_0 ergodique $\Leftrightarrow \theta$ v ergodique, ce même isomorphisme spatial implique dans le 3), a) et le fait que $\widehat{h}(S) = \widehat{h}(\theta)$. D'autre part, d'après [3] [4]

$$\widehat{h}(\phi_t) = |t| \widehat{h}(\phi_1) = \frac{|t| \widehat{h}(S)}{E_{v_0'}(\eta^{-1}(\omega_0))}$$

mais

$$\lambda(\Omega) = \int_{\Omega_0} \eta^{-1}(\omega_0) dv_0 = 1 \Rightarrow \int_{\Omega_0} \eta^{-1}(\omega_0') dv_0' = \frac{1}{v_0(\Omega_0)} = \frac{1}{\alpha}$$

d'où le résultat :

$$\widehat{h}(\phi_t) = \alpha |t| \widehat{h}(S).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMBROSE et KAKUTANI, Structure and continuity of measurable flows, *Duke Math.*, t. **9**, 1952, p. 25-42.
- [2] AMBROSE, Representation of ergodic flows, *Ann. Math.*, t. **42**, 1941, p. 723-729.
- [3] ABRAMOV, On flux en tropy, *D. A. H. C C C P*, t. **128**, n° 5, 1959, p. 873-875.
- [4] TOTOKI, Tim change of flows. *Memoirs of the Faculty of Sciences*, Kyushu University, Série A, vol. **20**, n° 1, 1966, p. 27-54.
- [5] NEVEU, CRAS 67 267, 1968, p. 561-564.
- [6] RYLL-NARDZEWSKI, Remarks on processes of calls, Proceedings IVth Berkeley Symposium, (6), 2, p. 455-463.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1970).
