ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DANG NGOC NGHIEM

Convergence forte des espérances conditionnelles et des projecteurs d'un espace de Hilbert

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, n° 1 (1970), p. 9-13
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_1_9_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
VOL. VI, n° 1, 1970, p. 9-13.

SECTION B :
Calcul des probabilités et Statistique.

Convergence forte des espérances conditionnelles et des projecteurs d'un espace de Hilbert

par

DANG NGOC NGHIEM

RÉSUMÉ. — L'objet essentiel de ce travail est de démontrer que la convergence en ordre implique la convergence au sens de L^p pour des suites d'espérances conditionnelles.

SUMMARY. — In this paper, we establish that order convergence implies L^p-convergence for sequences of conditional expectations.

I. — CONVERGENCE FORTE DES ESPÉRANCES CONDITIONNELLES

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité, $(\mathscr{B}_n)_{n\in N}$ une suite de sous-σ-algèbres de $\mathscr{A}$, on définit la convergence au sens L^p de $(\mathscr{B}_n)$ vers $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ par :

$\mathscr{B}_n \xrightarrow{L^p} \mathscr{B}$ si pour tout $f \in L^p(\Omega, \mathscr{A}, P)$, la suite $E^{\mathscr{B}_n}f$ des espérances conditionnelles de f converge au sens L^p vers $E^{\mathscr{B}}f$.

On définit :

$$\mathscr{B}_\infty = \limsup \mathscr{B}_n = \bigcap_n \Big(\bigvee_{m \geq n} \mathscr{B}_m \Big) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_0 = \liminf \mathscr{B}_n = \mathrm{V}_n \Big(\bigcap_{m \geq n} \mathscr{B}_m \Big).$$

L'un des résultats essentiels de ce papier est le théorème suivant :

THÉORÈME I-3. — Si $\liminf \mathscr{B}_n = \limsup \mathscr{B}_n$. Alors la suite $\mathscr{B}_n$ est convergente au sens L^p pour $\forall p \in (1, +\infty($.

Ce théorème admet une généralisation dans le cas des projecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert qui sera traitée dans la partie II de ce papier.

Dans toute la suite $\mathscr{B}_n$, $\mathscr{B}'_n$, $\mathscr{B}''_n$, $\mathscr{B}$, désignent des sous-σ-algèbres de $\mathscr{A}$.

THÉORÈME I-1. — Si $(\mathscr{B}_n)$ et $(\mathscr{B}'_n)$ convergent vers $\mathscr{B}$ au sens L^p $(1 \leqq p \leqq \infty)$ et si $\mathscr{B}_n \subset B'_n$, alors toute suite $(\mathscr{B}''_n)$, vérifiant $\mathscr{B}_n \subset B''_n \subset B'_n$, converge vers la même limite.

Démonstration. — Rappelons quelques propriétés des espérances conditionnelles :

(1) $E^{\mathscr{B}} = E^{\mathscr{B}}E^{\mathscr{B}'} = E^{\mathscr{B}'}E^{\mathscr{B}}$ p. s. si $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$.

(2) $\| E^{\mathscr{B}}f \|_p \leqq \| f \|_p$ pour tout $f \in L^p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$.

Puisque $\mathscr{B}_n \subset B''_n \subset B'_n$, d'après (1) on a :

$$E^{\mathscr{B}''_n}f - E^{\mathscr{B}_n}f = E^{\mathscr{B}''_n}(E^{\mathscr{B}'_n}f - E^{\mathscr{B}_n}f) \qquad \forall f \in L^p.$$

Donc, d'après (2) :

$$\| E^{\mathscr{B}''_n}f - E^{\mathscr{B}_n}f \|_p = \| E^{\mathscr{B}''_n}(E^{\mathscr{B}'_n}f - E^{\mathscr{B}_n}f) \|_p \leqq \| E^{\mathscr{B}'_n}f - E^{\mathscr{B}_n}f \|_p \to 0$$

quand $n \to \infty$ par hypothèse.

Donc, au sens L^p :

$$\lim E^{\mathscr{B}''_n}f = \lim E^{\mathscr{B}_n}f = E^{\mathscr{B}}f \qquad \text{pour} \qquad \forall f \in L^p.$$

Le théorème est donc démontré.

COROLLAIRE 1. — Soit θ la σ-algèbre triviale de $\mathscr{A}$ (θ est engendrée par les ensembles négligeables). Si $\mathscr{B}_n \overset{L^p}{\to} \theta$, alors toute suite $(\mathscr{B}'_n)$ vérifiant $\mathscr{B}'_n \subset \mathscr{B}_n$ converge vers θ au sens L^p $(1 \leqq p \leqq \infty)$.

Démonstration. — En effet, $\theta \subset \mathscr{B}'_n \subset \mathscr{B}_n$ et il suffit d'appliquer le théorème I-1.

Conséquences du théorème I-1. — Pour $p \in (1, +\infty($, le théorème suivant est classique :

THÉORÈME I-2. — Toute suite croissante (resp. décroissante) $\mathscr{B}_n$ converge au sens L^p $(1 \leqq p < \infty)$ vers $\limsup_n \mathscr{B}_n$ (resp. $\liminf \mathscr{B}_n$). On en déduit une condition suffisante de convergence :

COROLLAIRE 2. — S'il existe une suite $\mathscr{B}'_n$ vérifiant : $\mathscr{B}'_n \subset \mathscr{B}_n$ (resp. $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}'_n$) et qui converge au sens L^p vers $\mathscr{B} = \lim\sup \mathscr{B}_n$ (resp. $\mathscr{B} = \lim\inf \mathscr{B}_n$). Alors $\mathscr{B}_n \overset{L^p}{\to} \mathscr{B}$.

Démonstration. — Soit

$$\mathscr{B}''_n = \bigvee_{m \geqq n} \mathscr{B}_m \left(\text{resp. } \mathscr{B}''_n = \bigcap_{m \geqq n} \mathscr{B}_n\right),$$

$\mathscr{B}''_n$ est une suite monotone convergeant au sens L^p vers $\mathscr{B}$, et on a

$$\mathscr{B}'_n \subset \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}''_n \text{ (resp. } \mathscr{B}''_n \subset \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}'_n)$$

donc $\mathscr{B}_n \overset{L^p}{\to} \mathscr{B}$ d'après le théorème I-1.

THÉORÈME I-3. — Si $\lim\sup \mathscr{B}_n = \lim\inf \mathscr{B}_n = \mathscr{B}$. Alors $\mathscr{B}_n$ converge vers $\mathscr{B}$ au sens L^p $(1 \leqq p < \infty)$.

Démonstration. — Soient

$$\mathscr{B}'_n = \bigcap_{m \geqq n} \mathscr{B}_m \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}''_n = \bigvee_{m \geqq n} \mathscr{B}_m$$

on a $\mathscr{B}'_n \subset \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}''_n$ et $(\mathscr{B}'_n)$ et $(\mathscr{B}''_n)$ sont deux suites monotones convergentes, on applique le théorème I-1.

COROLLAIRE. — Toute suite $(\mathscr{B}_n)$ de σ-algèbre *indépendantes* est convergente au sens L^p $(1 \leqq p < \infty)$ vers θ.

Démonstration. — D'après la « loi $\{0, 1\}$ » on a :

$$\lim\sup \mathscr{B}_n = \lim\inf \mathscr{B}_n = \theta.$$

Remarque. — Il n'existe pas de réciproque du théorème I-3 (voir l'exemple de Sidak [*1*]).

Mais on a un théorème d'encadrement suivant de $\mathscr{B}$:

THÉORÈME I-4. — Si $\mathscr{B}_n \overset{L^p}{\to} \mathscr{B}$ $(p \in [0, \infty])$. Alors nécessairement on a :

$$\lim\inf \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B} \subset \lim\sup \mathscr{B}_n.$$

On va d'abord montrer qu'il existe un encadrement plus précis de $\mathscr{B}$ qui implique le théorème I-4 :

— Soit $\mathscr{B}'_\infty = \bigcap_{(\mathscr{B}_{n_k})} \lim\sup \mathscr{B}_{n_k}$ le signe intersection porte sur toutes les suites extraites $(\mathscr{B}_{n_k})$. On a évidemment :

$$\mathscr{B}'_\infty \subset \limsup \mathscr{B}_n$$

— Soit $\mathscr{B}'_0 = \bigvee_{(\mathscr{B}_{n_k})} \liminf \mathscr{B}_{n_k}$ le signe V porte sur toutes les suites les suites extraites $(\mathscr{B}_{n_k})$ de $(\mathscr{B}_n)$. On a :

$$\liminf_n \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}'_0.$$

THÉORÈME I-5. — Si $\mathscr{B}_n \overset{L^p}{\to} \mathscr{B}$ ($p \in [1, +\infty]$). Alors on a nécessairement :

$$\mathscr{B}'_0 \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{B}'_\infty.$$

Et on a par suite :

$$\liminf \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}'_0 \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{B}'_\infty \subset \limsup_n \mathscr{B}_n.$$

Démonstration.

1) $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'_\infty$: soit $(\mathscr{B}_{n_k})$ une suite extraite quelconque de $(\mathscr{B}_n)$, il suffit de montrer que

$$B \in \mathscr{B} \Rightarrow B \in \limsup_k \mathscr{B}_{n_k}.$$

Or, par hypothèse :

$$E^{\mathscr{B}_{n_k}} 1_B \overset{L^p}{\to} E^{\mathscr{B}} 1_B = 1_B$$

quand $k \to \infty$; on peut donc trouver une suite extraite de $(E^{\mathscr{B}_{n_k}} 1_B)$ que je note $(E^{\mathscr{B}_{n_{k(l)}}} 1_B)_{l \in \mathrm{N}}$ qui converge p. s. vers 1_B :

$$1_B = \lim_{l \to \infty} \inf_{m \geqslant l} E^{\mathscr{B}_{n_{k(m)}}} 1_B$$

le second membre est une fonction mesurable par rapport à $\limsup_k \mathscr{B}_{n_k}$. On a donc $B \in \limsup_k \mathscr{B}_{n_k}$ pour $\forall B \in \mathscr{B}$ et pour toute suite extraite

$$(\mathscr{B}_{n_k}) \Rightarrow \mathscr{B} \subset \mathscr{B}'_\infty.$$

2) $\mathscr{B}'_0 \subset \mathscr{B}$: Il s'agit de montrer $\liminf_k \mathscr{B}_{n_k} \subset \mathscr{B}$ pour toute suite extraite $(\mathscr{B}_{n_k})$. Or

$$\liminf \mathscr{B}_{n_k} = \bigvee_k \left(\bigcap_{l \geq k} \mathscr{B}_{n_l} \right)$$

est la σ-algèbre engendrée par les ensembles A appartenant à toutes les $\mathscr{B}_{n_k}$ sauf pour un nombre fini d'indices k, il suffit de démontrer qu'un tel A appartienne à $\mathscr{B}$.

Or, $\exists k_0$ tel que

$$\forall k \geqq k_0 \qquad A \in \mathscr{B}_{n_k} \Rightarrow E^{\mathscr{B}_{n_k}} 1_A = 1_A$$

et

$$\lim_k E^{\mathscr{B}_{n_k}} 1_A = E^{\mathscr{B}} 1_A.$$

Donc :

$$1_A = E^{\mathscr{B}} 1_A \Rightarrow A \in \mathscr{B};$$

on a démontré $\mathscr{B}'_0 \subset \mathscr{B}$.

II. — CONVERGENCE FORTE DES PROJECTEURS ORTHOGONAUX DANS UN ESPACE DE HILBERT

Sur l'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert on peut considérer une relation d'ordre partiel (voir [*2*]). On obtient alors des résultats analogues sur la convergence forte des suites des projecteurs orthogonaux. On aurait pu d'ailleurs montrer ces résultats d'abord et en déduire ensuite ceux de la partie I comme cas particulier.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] SIDAK, *Teoria Veroyatnost i Primen*, **2**, 1957, 283.
[*2*] HALMÖS, *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

(Manuscrit reçu le 6 mai 1969).