

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HERVÉ REINHARD

BERNARD ROYNETTE

## **Retournement des processus de Markov à un temps fixe. Remarque sur l'hypothèse de dualité**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 6, n° 1 (1970), p. 41-60

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1970\\_\\_6\\_1\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_1_41_0)

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# **Retournement des processus de Markov à un temps fixe. Remarque sur l'hypothèse de dualité**

par

**Hervé REINHARD**

(Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications »  
dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités »  
associée au C. N. R. S.,

I. H. P., 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris-5<sup>e</sup>).

et

**Bernard ROYNETTE**

(Faculté des Sciences d'Orsay,  
Département de Mathématiques, 91-Orsay).

---

**RÉSUMÉ.** — Nous montrons que le processus retourné à un temps fixe d'un processus de Markov homogène est, sous certaines hypothèses de dualité, un processus de Markov non homogène.

Dans le § I on rappelle la notion de processus « Espace-temps » associé à un processus non homogène. On étend aux temps négatifs la définition de C. Mayer et on donne une propriété caractéristique des semi-groupes ainsi obtenus.

Au § II on montre que le processus espace-temps obtenu à partir d'un processus homogène satisfait aux hypothèses d'un théorème de Kunita et Watanabe relatif au retournement du temps.

Dans le § III on considère le processus retourné à un temps fixe comme projection du processus retourné du § II, on énonce alors le théorème relatif au retournement du temps à un temps fixe. On donne une condition nécessaire et suffisante pour que ce processus soit « quasi homogène ». Enfin on montre que l'hypothèse de dualité est en quelque sorte nécessaire pour retourner un processus à un temps de retour et obtenir un processus homogène.

Nous remercions Mme DUFLO de toute l'aide qu'elle nous a apportée dans l'élaboration de cet article.

SUMMARY. — We show that, under certain duality hypothesis, a homogeneous Markov process reversed to a fixed time is a non homogeneous Markov process. A necessary and sufficient condition for the reversed process to be « quasi-homogeneous » is given. It is also shown that the duality hypothesis is necessary, in a certain sense, to reverse a process to a return time and to obtain a homogeneous process.

## NOTATIONS

$P_x$  désigne  $P_{\varepsilon_x}$ , où  $\varepsilon_x$  est la masse 1 en  $x$ ,  
 $\mathcal{B}(E)$  désigne l'ensemble des fonctions  $\mathcal{E}$  mesurables bornées sur  $(E, \mathcal{E})$ ,  
 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  désigne les boréliens de  $\mathbb{R}$ ,  
 $f_s(x)$  désigne la section en  $s$  d'une fonction de 2 variables  $f(x, s)$ ,  
 $A_s$  désigne la section en  $s$  d'un ensemble de  $E \times \mathbb{R}$ ,  
 $\mathcal{M}_1^+(E)$  désigne l'ensemble des probabilités sur  $(E, \mathcal{E})$ ,  
 $C_k(E)$  désigne les fonctions continues à support compact,  
 $C(E)$  désigne les fonctions continues bornées,  
 $E$  est supposé localement compact à base dénombrable,  $\delta$  est le point de compactification.

## § 1. — ESPACE-TEMPS ET PROCESSUS NON HOMOGÈNE

Les définitions — que nous rappelons — sont presque identiques à celles que donne C. Mayer dans [1] où on trouvera toutes les remarques désirables.

I.1. Soit  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \{X_t\}_{t \geq 0}, \{\theta_t\}_{t \geq 0}, P_\mu^s, \mu \in \mathcal{M}_1^+(E))$  un processus de Markov non homogène à valeur dans  $(E, \mathcal{E})$ .

C'est :

- un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  muni d'une famille croissante  $\{\mathcal{F}_t\}$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}_\infty$  ;
- une famille de variables aléatoires  $\{X_t\}$  de  $\Omega$  dans  $E$  telle que  $\forall t, X_t$  soit  $\mathcal{F}_t$ -mesurable ;
- une famille d'applications  $\theta_t$  de  $\Omega$  dans  $\Omega$  ;
- une famille de probabilités  $P_\mu^s$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  où  $\mu \in \mathcal{M}_1^+(E)$  ;

tels que :

- I.  $X_u \circ \theta_t = X_{u+t} \quad \forall u, t; \theta_0 = \text{identité.}$
- II.  $\forall t \geq 0$   
 $\forall A \in \mathcal{E} \quad (x, s) \rightsquigarrow P_x^s \{ X_t \in A \}$  est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  mesurable.
- III.  $\forall A \in \mathcal{E}$   
 $\forall \mu \in \mathcal{M}_+^1(E) \quad P_\mu^s \{ X_0 \in A \} = \mu(A).$
- IV.  $\forall t, u \geq 0$   
 $\forall A \in \mathcal{E} \quad P_\mu^s \{ X_{t+u} \in A \mid \mathcal{F}_u \} = P_{X_u}^{s+u} \{ X_t \in A \} - P_\mu^s \text{ p. s.}$

On définit un semi-groupe généralisé de transition  $\mathbb{P}_{s+t}^s$  par :

$$P_{s+t}^s f(x) = E_x^s \{ f(X_t) \} \quad \forall f \in \mathcal{B}(E)$$

$\mathbb{P}_t^s$  vérifie les trois propriétés suivantes :

$$P_s^s = \text{identité} \quad P_t^t 1 = 1 \quad P_t^s P_u^t = P_u^s \quad \forall s, t, u \quad s \leq t \leq u$$

I.2. On associe à ce processus le processus « Espace-temps »

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{ \tilde{\mathcal{F}}_t \}_{t \geq 0}, \{ \tilde{X}_t \}_{t \geq 0}, \{ \tilde{\theta}_t \}_{t \geq 0}, \tilde{P}_\mu \quad \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_+^1(\tilde{E}))$$

à valeur dans  $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$  défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \Omega \times \mathbb{R} \\ \tilde{E} &= E \times \mathbb{R} \\ \tilde{\mathcal{E}} &= E \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ \tilde{\mathcal{F}} &= \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ \tilde{\mathcal{F}}_t &= \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ \tilde{X}_t(\omega, s) &= (X_t(\omega), s + t) \\ \tilde{\theta}_t(\omega, s) &= (\theta_t(\omega), s + t) \\ \tilde{P}_{(x,s)} &= P_x^s \otimes \varepsilon_s \end{aligned}$$

$\tilde{P}_{(x,s)}$  est une probabilité sur  $\tilde{\mathcal{E}}$  et on peut définir

$$\tilde{P}_{\tilde{\mu}}(\Gamma) = \int_E \tilde{P}_{(x,s)}(\Gamma) d\tilde{\mu}(x, s)$$

On notera la différence entre cette définition et celle de C. Mayer qui pose

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+; \quad \tilde{E} = E \times \mathbb{R}_+.$$

On peut étendre trivialement à un tel processus les théorèmes énoncés en [1], en particulier le processus  $\tilde{X}_t$  est un processus de Markov homogène de probabilité de transition

$$\tilde{P}_t f(x, s) = P_{s+t}^s(x).$$

$\tilde{P}_t$  est le semi-groupe homogène associé à  $P_t^s$ .

### I.3. — Propriété caractéristique des semi-groupes « Espace-temps »

Il est clair que  $\tilde{P}_t$  satisfait les deux conditions suivantes :

C.1.  $\forall \varphi \in \mathcal{B}(E)$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \tilde{P}_t[\varphi(\cdot)\lambda(\cdot)](x, s)\mu(s+t) = \tilde{P}_t[\varphi(\cdot)\lambda(\cdot)](x, s)\lambda(s+t).$$

C.2.  $f_{s+t} = g_{s+t} \Rightarrow \tilde{P}_t f(x, s) = \tilde{P}_t g(x, s).$

On peut énoncer une réciproque de cette remarque :

PROPOSITION I.3. — Soit  $\tilde{P}_t$  un semi-groupe sur  $E \times \mathbb{R}$  satisfaisant à C.1. et C.2., la formule  $P_{s+t}^s \varphi(x) = \tilde{P}_t(\varphi(\cdot)1(\cdot))(x, s)$  définit un semi-groupe généralisé et si  $Q_t$  est le semi-groupe homogène associé à  $P_v^u$  :  $Q_t \equiv \tilde{P}_t$ .

— Calculons d'abord

$$P_u^s(P_v^u \varphi)(x) = Q_{u-s}[Q_{v-u}(\varphi \cdot 1)(\cdot, u)1(\cdot)](x, s)$$

or  $Q_{v-u}[\varphi \cdot 1](\cdot, u)1(\cdot)$  et  $Q_{v-u}[\varphi \cdot 1](\cdot, \cdot)$  ont la même section en  $u$  donc d'après C.2.

$$P_u^s P_v^u \varphi(x) = Q_{u-v}[Q_{v-u}(\varphi \cdot 1)(\cdot, \cdot)](x, s) = P_v^s \varphi(x).$$

— Montrons maintenant que  $Q_t = \tilde{P}_t$

$$\begin{aligned} Q_t[\varphi(\cdot)\lambda(\cdot)](x, s) &= \lambda(s+t)P_{s+t}^s \varphi(x) = \lambda(s+t)\tilde{P}_t[\varphi(\cdot)1(\cdot)](x, s) \\ &= \tilde{P}_t[\varphi(\cdot)\lambda(\cdot)](x, s) \quad \text{d'après C.1.} \end{aligned}$$

$\tilde{P}_t$  et  $Q_t$  qui coïncident sur les fonctions de la forme  $\varphi(x)\lambda(t)$  coïncident partout.

## § II. — RETOURNEMENT DU TEMPS

### II.1. — Retournement d'un processus homogène à un temps de retour L

Si  $(\Omega, \mathcal{F}_v, X_v, \theta_v, P_x)$  est un processus homogène à valeur dans  $(E, \mathcal{E})$  on appelle temps de retour une variable aléatoire L qui vérifie les 2 propriétés suivantes :

- 1)  $L(\omega) < \infty \Rightarrow L(\omega) \leq \zeta(\omega)$  (si  $\zeta$  est le temps de mort).
- 2)  $\forall t \geq 0 \quad L \circ \theta_t = (L - t)^+$ .

Sous certaines hypothèses de dualité Nagasawa a montré qu'on pouvait retourner au temps L le processus  $X_t$  en posant :

$$\hat{X}_t = \begin{cases} (X_{L-t})_- & \text{si } t < L(\omega) < \infty \\ \delta & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose aussi

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_s &= \{ A \in \mathcal{F} : \forall u \geq 0 \quad \theta_u^{-1}(A) \cap (s + u < L) \} \\ &= A \cap \{ s + u < L \}. \end{aligned}$$

On trouvera dans [3] des détails sur le retournement de temps.

Nous utiliserons le théorème suivant qui est une conséquence du lemme de Nagasawa et qui est dû à Kunita et Watanabe.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}_t, X_t, P_x)$  un processus de semi-groupe de transition  $P_t$  et de résolvante  $U^\lambda$ . On fait les hypothèses  $\{K\}$  suivantes :

K.1.  $U^\lambda$  est en dualité avec  $\hat{U}^\lambda$  relativement à une mesure  $\xi$  finie sur les compacts, de la forme  $vU$  où  $v$  est une probabilité ;  $\hat{U}^\lambda$  est la résolvante d'un semi-groupe  $\hat{P}_t$ .

K.2.  $U^0$  et  $\hat{U}^0$  sont intégrables, c'est-à-dire que  $U^0(x, K)$  est bornée en  $x$  quelque soit le compact  $K$ .

K.3. Si  $f \in C_k(E)$   $\hat{U}f \in \mathcal{C}(E)$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \hat{U}^\alpha 1 = 1$ .

On désigne par  $u(x, y)$  la densité de  $U$  et  $\hat{U}$  par rapport à  $\xi$ . Si  $\mu$  est 1 probabilité on désigne par  $v$  la fonction co-excessive

$$v(y) = \int \mu(dz)u(z, y).$$

On posera

$$\begin{aligned} U(x, f) &= \int u(x, y)f(y)\xi(dy) = Uf(x) \\ \hat{U}(f, y) &= \int u(x, y)f(x)\xi(dx) = f\hat{U}(y) \end{aligned}$$

THÉORÈME II.1. — Si on munit  $\Omega$  de la loi  $P_\mu$  le processus  $(\Omega, \hat{\mathcal{F}}_t, \hat{X}_t)$  est un processus de Markov de semi-groupe de transition  ${}^v\hat{P}_t$ .  ${}^v\hat{P}_t$  est le semi-groupe du  $v$ -processus :

$$\begin{aligned} {}^v\hat{P}_t(x, f) &= \frac{\hat{P}_t(x, fv)}{v(x)} \quad 0 < v(x) < \infty \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Si  $\mu = v$   ${}^v\hat{P}_t = \hat{P}_t$ .

## II. 2. — Retournement dans l'Espace-temps

Soit  $X = (\Omega, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P_x)$  un processus homogène à valeur dans  $(E, \mathcal{E})$ ; on peut lui appliquer la construction du § I pour obtenir

$$\tilde{X} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{X}_t, \tilde{\theta}_t, \tilde{P}_{x,s}).$$

Soient  $P_t$  et  $U_\lambda$  [resp  $\tilde{P}_t, \tilde{U}_\lambda$ ] les semi-groupes et la résolvante de  $X$  [resp  $\tilde{X}$ ].

Soit dans l'espace-temps le temps de retour

$$L(\omega, s) = \begin{cases} a - s & \text{si } s \leq a \\ \infty & \text{si } s > a. \end{cases}$$

Nous allons retourner  $\tilde{X}_t$  au temps  $L$  en appliquant le théorème précédent. Pour cela nous faisons les hypothèses  $\{H\}$  suivantes :

H. 1. Le semi-groupe  $P_t$  est en dualité avec un semi-groupe  $Q_t$  par rapport à une mesure  $\xi$  finie sur les compacts et on pose :

$$P_t \varphi(x) = \int_E p_t(x, y) \varphi(y) \xi(dy)$$

$$Q_t \varphi(x) = \int_E p_t(y, x) \varphi(y) \xi(dy)$$

H. 2.  $\xi = \nu U$  où  $\nu$  est une probabilité sur  $E$ .

H. 3. Si  $f \in \mathcal{C}_k(E)$   $Q_t f \in \mathcal{C}(E)$

$$Q_t f(x) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f(x).$$

PROPOSITION II. 2. — *Sous les hypothèses  $\{H\}$  on peut retourner le processus  $\tilde{X}_t$  au temps  $L$ .*

Nous allons mettre en évidence un semi-groupe  $\tilde{Q}_t$  dual de  $\tilde{P}_t$ , qui vérifie les hypothèses  $\{K\}$ .

LEMME. — Soit  $u_\lambda(x, s; y, v) = e^{-\lambda(v-s)} p_{v-s}(x, y) 1_{v>s}$

$$\tilde{U}_\lambda[h(\cdot, \cdot)](x, s) = \int_{E \times \mathbb{R}} u_\lambda(x, s; y, v) h(y, v) \xi(dy) l(dv)$$

et  $(x, s) \rightsquigarrow u_\lambda(x, s; y, v)$  est  $\tilde{P}_t \lambda$ -excessive  $\forall y, v$ .

$l(dv)$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

Il suffit de montrer que  $\tilde{U}_\lambda$  est de la forme ci-dessus pour des fonctions de la forme  $f(y)g(v) = h(y, v)$ .

Or

$$\begin{aligned}\tilde{U}_\lambda[f(\cdot)g(\cdot)](x, s) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(s+t) dt \int_E p_t(x, y) f(y) \xi(dy) \\ &= \int_E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(v-s)} p_{v-s}(x, y) 1_{v>s} \cdot g(v) f(y) l(dv) \xi(dy).\end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_t^\lambda[u_\lambda(\cdot, \cdot; y, v)](x, s) &= e^{-\lambda t} e^{-\lambda(v-s-t)} 1_{v>s+t} P_t[p_{v-(s+t)}(\cdot, y)](x) \\ &= e^{-\lambda(v-s)} 1_{v>s+t} p_{v-s}(x, y) \leq u_\lambda(x, s; y, v)\end{aligned}$$

de plus si  $t \downarrow 0$

$$\tilde{P}_t^\lambda[u_\lambda](x, s) \uparrow u_\lambda[x, s; y, v]$$

ce qui établit le lemme.

PROPOSITION II.2'. — Soit

$$\tilde{V}^\lambda f(x, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_E u_\lambda[y, v; x, s] f(y, v) \xi(dy) l(dv)$$

et

$$\tilde{Q}_t f(x, s) = Q_t f_{s-t}(x);$$

$\tilde{V}^\lambda$  est en dualité avec  $\tilde{U}^\lambda$  par rapport à  $\xi \otimes l$  et les hypothèses  $\{\mathbf{K}\}$  sont vérifiées.

LEMME 1. —  $\tilde{Q}_t$  est un semi-groupe,  $\tilde{V}_\lambda$  est sa résolvante et

$$(y, v) \rightsquigarrow u_\lambda(x, s; y, v)$$

est  $\lambda$ -excessive pour  $\tilde{Q}_t$ .

$$a) \tilde{Q}_u \tilde{Q}_t f(x, s) = Q_u(Q_t f_{s-u-t}(\cdot))(x) = \tilde{Q}_{u+t} f(x, s).$$

$$\begin{aligned}b) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \tilde{Q}_t f(x, s) ds &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f_{s-t}(x) dt \\ &= \int_E \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(z, x) f_{s-t}(z) \xi(dz) dt \\ &= \int_E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(s-v)} p_{s-v}(z, x) 1_{v<s} f(z, v) \xi(dz) dv \\ &= \tilde{V}^\lambda f(x, s).\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
c) \quad \tilde{Q}_t^\lambda u_\lambda[(x, s), (\cdot, \cdot)](y, v) &= e^{-\lambda t} Q_t u_\lambda[(x, s); (\cdot, (v-t))](y) \\
&= e^{-\lambda t} Q_t (e^{-\lambda(v-t-s)} p_{v-t-s}(x, \cdot) 1_{v-t>s})(y) \\
&= e^{-\lambda(v-s)} \int p_t(z, y) p_{v-t-s}(x, z) \xi(dz) 1_{v-t>s} \\
&= e^{-\lambda(v-s)} 1_{v>t+s} p_{v-s}(x, y) \leq u_\lambda(x, s; y, v)
\end{aligned}$$

Si  $t \downarrow 0$

$$\tilde{Q}_t^\lambda u_\lambda[\cdot](y, v) \uparrow u_\lambda(x, s; y, v)$$

ce qui établit le lemme 1.

LEMME 2. —  $\tilde{\xi} = \xi \otimes l$  est finie sur les compacts et  $\xi \otimes l = (v \otimes l) \tilde{U}$ .  
On calcule :

$$\begin{aligned}
(v \otimes l) \tilde{U}(A \times I) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_E v(dx) l(ds) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_E u[(x, s); (y, v)] 1_A(y) 1_I(v) \xi(dy) l(dv) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_E v(dx) l(ds) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_E 1_{v>s} p_{v-s}(x, y) 1_A(y) 1_I(v) \xi(dy) l(dv) \\
&= \int_{s=-\infty}^{s=+\infty} \int_{u=0}^{u=\infty} \int_E \int_E 1_A(y) p_u(x, y) 1_I(s+u) l(du) \xi(dy) v(dx) l(ds) \\
&= l(I) \int 1_A(y) u(x, y) \xi(dy) v(dx) = l(I) \xi(A) \quad \text{d'après H. 2.}
\end{aligned}$$

LEMME 3. —  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  sont intégrables.

En effet

$$\tilde{U}(x, s; 1_{K \times I}) = \int_0^\infty P_u 1_K(x) 1_I(s+u) du \leq l(I).$$

De même

$$\tilde{V}(x, s; 1_{K \times I}) = \int_0^\infty Q_u 1_K(x) 1_I(s-u) du \leq l(I).$$

LEMME 4. — Si  $\varphi \in C_k(E \times \mathbb{R})$  alors  $\tilde{V}_\lambda \varphi \in \mathcal{C}(E \times \mathbb{R})$  et  $\lambda \tilde{V}_\lambda 1 \rightarrow 1$ .

1) La deuxième partie de l'énoncé est évidente car

$$(Q_t f(x) \rightarrow f(x)) \text{ entraîne } (\lambda V_\lambda f(x) \rightarrow f(x))$$

et

$$\lambda \tilde{V}^\lambda 1(x, s) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} Q_u 1_E(x) 1_R(s-u) du = \lambda V^\lambda 1(x).$$

2) Pour démontrer la première on peut utiliser les théorèmes de Cairoli dans [4]. En voici une adaptation au processus espace-temps.

$$a) \tilde{Q}_u: C_k(E, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(E \times \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \tilde{Q}_u f(x, s) \xrightarrow{u \rightarrow 0} f(x, s)$$

Ce lemme correspond au théorème 5, de Cairoli sur les produits de noyaux Felleriens. Si  $f \in C_k(E \times \mathbb{R})$  on peut l'approcher uniformément par

$$\sum_1^n \varphi_i(x) \lambda_i(s)$$

avec  $\varphi_i \in C_k(E)$  et  $\lambda_i \in C_k(\mathbb{R})$ ; on peut donc approcher uniformément  $\tilde{Q}_u f(x, s)$  par

$$\sum_1^n \lambda_i(s - u) Q_u \varphi_i(x)$$

qui est continu en vertu de l'hypothèse H.3.

b)  $\tilde{Q}_u$  est faiblement continu, c'est-à-dire :

$$\tilde{Q}_u f(x, s) \xrightarrow{u \rightarrow 0} f(x, s)$$

En effet  $\tilde{Q}_u f(x, s)$  est approché uniformément par

$$\sum_1^n \lambda_i(s - u) Q_u \varphi_i(x)$$

et cette expression a pour limite

$$\sum_1^n \lambda_i(s) \varphi_i(x)$$

quand  $n \rightarrow \infty$ .

c)  $\tilde{V}_\lambda \varphi \in \mathcal{C}(E \times \mathbb{R})$ .

D'après a) et b) il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue puisque E est à base dénombrable (Bourbaki, Intégration IV.4, n° 4 corollaire 1).

*Remarque.* — On peut remplacer H.3. par H'.3.

$$— \mu \underset{\mu \rightarrow \infty}{V} 1(x) \rightarrow 1$$

—  $\forall I$  compact de  $\mathbb{R}$ .  $\varphi \in C_k(E)$   $Q_u \varphi(\cdot)$  est équicontinue.

En effet pour établir c) on montre que  $\tilde{Q}_u f(\cdot, \cdot)$ ,  $u \in I$  est équicontinue.

Il suffit pour cela de le montrer pour  $\tilde{Q}_u \varphi(\cdot) \lambda(\cdot)$  où  $\varphi \in C_k(E)$ ,  $\lambda \in C_k(\mathbb{R})$ .  
Or  $\exists \eta, \exists V(x)$  voisinage de  $x$  tels que

$$|s - s'| < \eta \Rightarrow \sup_{u \in I} |\lambda(s' - u) - \lambda(s - u)| < \varepsilon \quad (\lambda \text{ uniformément continue})$$

$$x' \in V(x) \Rightarrow \sup_{u \in I} |Q_u \varphi(x') - Q_u \varphi(x)| < \varepsilon \quad (H'.3.)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sup_{u \in I} |\tilde{Q}_u[\varphi(\cdot) \lambda(\cdot)](x' s') - \tilde{Q}_u(\varphi \lambda)(x, s)| \\ \leq \sup_{u \in I} |Q_u \varphi(x') \lambda(s' - u) - Q_u \varphi(x) \lambda(s' - u)| + \sup_{u \in I} |Q_u \varphi(x) \lambda(s' - u) \\ - Q_u \varphi(x) \lambda(s - u)| \\ \leq \varepsilon \|\lambda\| + \varepsilon \|\varphi\|. \end{aligned}$$

$\tilde{Q}_u f(\cdot, \cdot)$  ( $u \in I$ ) étant équicontinue et  $f$  à support compact contenu dans  $E \times I$

$$\begin{aligned} \tilde{V}f(x', s') - \tilde{V}f(x, s) &= \int_0^x |\tilde{Q}_u f(x', s') - \tilde{Q}_u f(x, s)| du \\ &\leq K \sup_u |\tilde{Q}_u f(x', s') - \tilde{Q}_u f(x, s)| \end{aligned}$$

La proposition II.2 étant ainsi établie on peut définir le processus retourné de  $X_t$  en posant

$$\tilde{Y}_t(\omega, s) = \begin{cases} \tilde{X}_{(a-s-t)^-}(\omega, s) = \{X_{(a-s-t)^-}, a-t\} & \text{si } s+t < a \\ (\delta, \infty) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\tilde{G}_s = \{A \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\theta}_u^{-1}(A) \cap (u+s < L) = A \cap (u+s < L) \quad \forall u < L-s\}$$

$\tilde{Y}_t$  est un processus de Markov de semi-groupe de transition  ${}^v\tilde{Q}_t$  dépendant de la mesure initiale.

### § III. — PROCESSUS RETOURNÉ DE $X_t$ AU TEMPS $a$

DÉFINITION. — Nous appelons processus retourné de  $X_t$  au temps  $a$  le processus  $(\Omega, \mathcal{F}, G_t, Y_t, P_x)$  où

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_{(a-t)^-}(\omega) & \text{si } t < a \\ \delta & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$G_t = \{A \in \mathcal{F} : \exists \tilde{A} \in \tilde{G}_t \text{ tel que } \tilde{A}_0 = A\}.$$

Si  $\Pi_E$  désigne la projection de  $E \times \mathbb{R}$  sur  $E$  il est clair que

$$Y_t(\omega) = \Pi_E(\tilde{Y}_t(\omega, 0)).$$

Nous examinerons donc le processus  $\tilde{Y}_t(\omega, s)$  sur  $\tilde{\Omega}$  muni de la mesure  $P[\alpha \otimes \varepsilon_0]$ .

LEMME. — Les tribus  $G_t$  sont continues à droite, croissantes et  $Y_t$  est  $G_t$ -mesurable. Seul le 3<sup>e</sup> point demande une vérification :

$$\{\omega; Y_t(\omega) \in A\} = \{\omega, s; \tilde{Y}_t(\omega, s) \in A \times \mathbb{R}\}_0$$

d'après la remarque précédente et, comme  $\tilde{Y}_t$  est  $\tilde{G}_t$  mesurable, cet ensemble appartient à  $G_t$  par définition.

Nous munissons donc  $\tilde{\Omega}$  de  $P_{\alpha \otimes \varepsilon_0}$ , soit alors  $v$  la fonction co-excessive

$$\begin{aligned} v(x, s) &= \int \alpha(dz) \varepsilon_0(du) u(z, u; x, s) \\ &= \int \alpha(dz) p_s(z, x) 1_{s > 0}. \end{aligned}$$

$\tilde{Y}_t$  a pour semi-groupe de transition  ${}^v\tilde{Q}_t$ .

Nous posons alors :

$$\begin{aligned} {}^vR_{s-t}^s \varphi(x) &= {}^vQ_t(\varphi(\cdot)1(\cdot))(x, s) \\ {}^vS_{t+s}^t &= {}^vR_{a-t-s}^{a-t}. \end{aligned}$$

soit :

$${}^vS_{t+s}^t \varphi(x) = \frac{1}{v(x, a-t)} Q_s[\varphi(\cdot)v(\cdot, a-s-t)](x)$$

Remarque. —  ${}^vS_{t+s}^t$  est nul pour  $t+s \geq a$  car dans  ${}^vR_{a-t-s}^{a-t}$  figure  $v(x, a-t-s)$  qui est alors nul ;  ${}^vR_{s-t}^s$  est lié à  ${}^v\tilde{Q}_t$  comme  $R_{s+t}^s$  à  $\tilde{P}_t$ , il existe une propriété caractéristique des semi-groupes « espace-temps retourné », équivalente à la propriété I. 3, qui est la suivante : si  $f_{s-u} = g_{s-u}$  alors  ${}^v\tilde{Q}_u f(x, s) = {}^v\tilde{Q}_u g(x, s)$ , ce qui entraîne la propriété de semi-groupe généralisé de  ${}^vR_{s-t}^s$  :

$${}^vR_{s-t}^s \cdot {}^vR_{s-t-u}^{s-t} = {}^vR_{s-t-u}^s.$$

En effet d'une part

$${}^v\tilde{Q} f(x, s) = \frac{1}{v(x, s)} Q_u[f_{s-u}(\cdot)v_{s-u}(\cdot)](x)$$

qui entraîne la première affirmation ; d'autre part

$${}^v\mathbf{R}_{s-t}^s[{}^v\mathbf{R}_{s-t-u}^{s-t}\varphi](x) = {}^v\mathbf{R}_{s-t}^s[{}^v\tilde{\mathbf{Q}}_u(\varphi \cdot 1)(\cdot, s-t)](x)$$

soit

$${}^v\tilde{\mathbf{Q}}_t[{}^v\tilde{\mathbf{Q}}_u(\varphi \cdot 1)(\cdot, s-t)1(\cdot)](x, s);$$

comme  ${}^v\tilde{\mathbf{Q}}_u(\varphi \cdot 1)(\cdot, s-t)1(\cdot)$  et  ${}^v\mathbf{Q}_u(\varphi \cdot 1)(\cdot, \cdot)$  ont même section en  $s-t$  cette dernière expression est égale à

$${}^v\tilde{\mathbf{Q}}_{t+u}[\varphi(\cdot)1(\cdot)](x, s) = {}^v\mathbf{R}_{s-t-u}^s.$$

Cette propriété entraîne évidemment que  ${}^v\mathbf{S}_{t+s}^t$  est un semi-groupe.

**THÉORÈME III.** — *Si on munit  $\Omega$  de la probabilité  $\mathbf{P}_x$  le processus  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{G}_t, \mathbf{Y}_t, \mathbf{P}_x)$  est un processus de Markov non homogène admettant  ${}^v\mathbf{S}_{t+s}^t$  pour semi-groupe de transition.*

**LEMME.** — *Soit  $f$  une fonction bornée  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  mesurable :*

$$\int d\mathbf{P}_{\mu \otimes \varepsilon_0}(\omega, u) f(\omega, u) = \int d\mathbf{P}_{\mu}(\omega) f(\omega, 0).$$

Soit d'abord  $f(\omega, u) = h(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, u))$ .

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{P}_{\mu \otimes \varepsilon_0}(\omega, u) h(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, u)) &= \int d\mu(x) \otimes \varepsilon_0(dv) (\tilde{\mathbf{P}}_t h)(x, v) = \int d\mu(x) \tilde{\mathbf{P}}_t h(x, 0) \\ &= \int d\mu(x) \mathbf{P}_t h_t(x) = \int d\mu(x) \mathbf{E}_x h_t(\mathbf{X}_t) \\ &= \int d\mu(x) \mathbf{E}_x h(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, 0)) = \int d\mathbf{P}_{\mu}(\omega) h(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, 0)). \end{aligned}$$

Pour raisonner par récurrence montrons que la propriété est vraie pour  $f(\omega, u)$  de la forme  $h_1(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, u)) \times h_2(\tilde{\mathbf{X}}_v(\omega, u))$ . ( $t < v$ )

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{P}_{\mu \otimes \varepsilon_0}(\omega, u) \cdot f(\omega, u) &= \int d\mathbf{P}_{\mu \otimes \varepsilon_0}(\omega, u) h_1(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, u)) \tilde{\mathbf{P}}_{v-t} h_2(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, u)) \\ &= \int d\mathbf{P}_{\mu}(\omega) h_1(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, 0)) \tilde{\mathbf{P}}_{v-t} h_2(\tilde{\mathbf{X}}_t(\omega, 0)) \\ &= \int d\mathbf{P}_{\mu}(\omega) h_1(\mathbf{X}_t(\omega), t) \mathbf{E}_{\mathbf{X}_t(\omega)} (h_2)_v(\mathbf{X}_{v-t}) \end{aligned}$$

Comme  $\omega \rightsquigarrow h_1(X_t(\omega), t)$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable, cette dernière expression est égale à

$$\begin{aligned} & \int dP_\mu(\omega) h_1(X_t(\omega), t) (h_2)_v(X_t(\omega)) \\ &= \int dP_\mu(\omega) h_1(\tilde{X}_t(\omega, 0)) h_2(\tilde{X}_t(\omega, 0)) \end{aligned}$$

Le lemme est ainsi vérifié pour toutes les fonctions

$$\prod_1^n h_i(\tilde{X}_{t_i}(\omega, u))$$

donc pour toutes les fonctions de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$  (à condition d'avoir pris soin de prendre pour  $\mathcal{F}$  la tribu engendrée par les  $X_u, u \in \mathbb{R}$  complétés).

Nous démontrons alors le théorème III en utilisant la propriété de Markov pour  $\tilde{Y}$  et le fait que  $Y$  est la projection de  $\tilde{Y}$ .

Nous démontrons la propriété de Markov pour des fonctions indicatrices.

Soit donc  $A \in G_t$  et  $B \in \mathcal{E}$ , nous allons établir que :

$$\int_A 1_B(Y_{t+s})(\omega) dP_\alpha(\omega) = \int_A {}^vS_{t+s}^t 1_B(Y_t)(\omega) dP_\alpha$$

En effet :

$$\int_A 1_B(Y_{t+s}) dP_\alpha = \int 1_{\tilde{A}}(\omega, 0) 1_{B \times \mathbb{R}}(\tilde{Y}_{t+s}(\omega, 0)) dP_\alpha$$

si  $A = \tilde{A}_0$  d'après le lemme précédent cette dernière expression est égale à

$$\int_{\tilde{A}} 1_{B \times \mathbb{R}} \tilde{Y}_{t+s}(\omega, u) dP_{\mu \otimes \varepsilon_0};$$

mais  ${}^vQ_s$  étant le semi-groupe de transition de  $\tilde{Y}_t$  qui est markovien, l'expression précédente est égale à :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{A}} {}^vQ_s(1_B \times 1_R) \tilde{Y}_t(\omega, u) dP_{\mu \otimes \varepsilon_0} &= \int_{\tilde{A}} {}^vR_{a-t-s}^{a-t} 1_B(X_{(a-t)-u}) dP_{\mu \otimes \varepsilon_0} \\ &= \int_A {}^vR_{a-t-s}^{a-t} 1_B(X_{(a-t)}(\omega)) dP_\mu = \int_A {}^vS_{t+s}^t 1_B(Y_t) dP_\mu \end{aligned}$$

## § IV. — SEMI-GROUPES QUASI HOMOGÈNES

DÉFINITION. — Un semi-groupe  $Q_t^s$  est dit quasi-homogène si il existe un semi-groupe homogène  $Q_t$  et une fonction positive  $h$  tels que

$$Q_{s+t}^s \varphi(x) = Q_t \varphi(x) \cdot h(s+t)$$

pour tout  $x$ , tout  $t$  et tout  $s$ .

LEMME. —  $h(u)$  est nécessairement égal à  $1_{u < a}$  et  $Q_{s+t}^s \varphi(x) = Q_t \varphi(x) 1_{s+t < a}$ . En effet la propriété de semi-groupe entraîne que  $\forall u \geq s \quad h(u) = h(s)h(u)$  (on suppose  $Q_u^u = I$ ); alors

$$\text{si } h(u) \neq 0, h(u) = 1 \text{ et } \forall s < u \quad h(s) = 1$$

$$\text{si } h(v) = 0, \forall w > v \quad h(w) = 0.$$

THÉORÈME IV. — Soit  $\alpha$  une probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$ , si  $\alpha$  est invariante le processus retourné pour la mesure  $P_\alpha$  est quasi homogène. Si de plus  $\forall t, p_t(x, y) > 0, \xi \otimes \xi$  presque-sûrement, si  $P_t 1(x) = 1 \quad \forall t$ , la condition «  $\alpha$  est invariante » est nécessaire pour que le processus retourné soit quasi homogène.

1. Condition suffisante.

Nous montrons d'abord que si  $\alpha$  est invariante

$$v(x, s) = v(x, t) \quad \forall s, t > 0.$$

Soit  $s > t$  on peut calculer de deux façons l'expression

$$\int p_t(x, y) \xi(dy) \xi(dz) p_{s-t}(z, y);$$

d'une part, à cause de la probabilité de semi-groupe, elle est égale à

$$\int \alpha(dz) p_s(z, y);$$

d'autre part, si on remarque que

$$\int_{z \in E} \xi(dz) \alpha(dz) p_{s-t}(z, y) = \alpha P_{s-t}(dy) = \alpha(dy),$$

l'expression à évaluer est égale à

$$\int \alpha(dy) p_t(y, x).$$

Donc  $v(x, s) = v(x, t)$ . Alors

$${}^v\tilde{Q}_t(\varphi \cdot 1)(x, s) = {}^v\tilde{Q}_t(\varphi \cdot 1)(x, u) \quad \forall s \text{ et } u > 0$$

ainsi

$${}^vR_{s-t}^s \varphi(x) = {}^v\tilde{Q}_t[\varphi(\cdot)1(\cdot)](x, s) = \frac{1}{v(x, s)} Q_t(\varphi(\cdot)v(\cdot, s-t))(x) \cdot 1(s > t)$$

ne dépend pas de  $t$  pour  $t + s < a$  et est nul sinon, ce qui montre que

$${}^vS_{t+s}^t = S_t 1_{t+s < a}$$

2. Condition nécessaire.

Soit

$$v^1(x, s) = \int \alpha(dy) e^{-s} p_s(y, x)$$

et

$$h^1(x) = \int \alpha(dy) u^1(y, x) = \int_0^\infty v^1(x, s) ds.$$

Nous désignerons par  $h_u$  une densité de  $\alpha U^1 P_u$  par rapport à  $\alpha U^1$ . Les deux relations suivantes sont alors des conséquences de ces notations  $\alpha U^1 = h^1 \xi$  et  $\alpha U^1 P_u = h_u h^1 \xi$ .

Soient A et B deux boréliens et  $u$  fixé,  $u \in \mathbb{R}$ . Nous désignerons par  $\mu_s$  la loi de  $X_s$  soit  $\mu_s(A) = P_\alpha(X_s \in A)$ . Nous allons calculer de deux façons l'expression

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-s} P_\alpha(X_s \in A, X_{s+u} \in B) ds, \\ & \int_0^\infty e^{-s} P_\alpha(X_s \in A, X_{s+u} \in B) ds = \int_0^\infty e^{-s} ds \mu_s(1_A \cdot P_u 1_B) \\ & = \langle 1_A, P_u 1_B \rangle_{\alpha U^1} \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-s} P_\alpha(X_s \in A, X_{s+u} \in B) ds = \langle Q_u 1_A h_1, 1_B \rangle_\xi \tag{1}$$

On peut calculer aussi cette expression en utilisant le semi-groupe  ${}^vQ_t$  de transition du processus retourné pour la mesure  $\alpha$ . Par définition

$$Y_{a-(s+u)} = X_{(s+u)}^-$$

mais en intégrant on peut confondre la loi de  $X_{(s+u)}^-$  avec  $\mu_{s+u}$  de telle sorte que

$$P_\alpha(X_s \in A; X_{s+u} \in B) = P_\alpha(Y_{a-(s+u)} \in B; Y_{a-s} \in A) = \mu_{s+u}(1_B {}^vS_{s+u}^s 1_A).$$



L'hypothèse de quasi-homogénéité entraîne alors que cette dernière expression peut encore s'écrire

$$\left\langle 1_{\mathbf{B}}, \frac{1}{v(x, \beta)} Q_u(1_A(\cdot))v(\cdot, \beta - u) \right\rangle_{\mu_{s+u}}$$

où  $\beta > u$  et où l'expression ne dépend pas de  $\beta$ ; soit après intégration

$$\left\langle \frac{1}{v(x, \beta)} Q_u(1_A(\cdot))v(\cdot, \beta - u), 1_{\mathbf{B}} \right\rangle_{\alpha U^1 P_u}$$

Donc

$$\int_0^\infty e^{-s} P_\alpha(X_s \in A, X_{s+u} \in B) = \left\langle \frac{h_u h^1}{v(x, \beta)} Q_u(1_A(\cdot))v(\cdot, \beta - u), 1_{\mathbf{B}} \right\rangle_\xi \quad (2)$$

Donc

$$\frac{h_u(x)h^1(x)}{v(x, \beta)} \int p_u(y, x) 1_A(y) v(y, \beta - u) \xi(dy) = \int p_u(y, x) 1_A(y) h_1(y) \xi(dy) \quad \xi \text{ p. s.} \quad (3)$$

L'ensemble sur lequel cette relation n'est pas vraie dépend de  $A$ , mais comme  $E$  est supposé à base dénombrable, il existe un ensemble  $E_1$  tel que  $\xi(E_1^c) = 0$  et que la relation soit vraie sur  $E_1$  pour tous les éléments d'une base dénombrable stable par intersection d'ouverts, comme la relation (3) se conserve par limite monotone et par différence, il en résulte que (3) est vraie sur  $E_1$ . Soit  $x$  fixé,  $x \in E_1$ . Les deux membres de (3) sont des mesures sur  $E_1$  absolument continues par rapport à  $\xi$ , leurs densités sont donc presque sûrement égales :

$$\frac{h_u(x)h^1(x)}{v(x, \beta)} p_u(y, x) v(y, -u) = p_u(y, x) h_1(y) \quad \xi \text{ p. s.} \quad (4)$$

Comme  $E$  est à base dénombrable on a pu choisir  $p_s(x, y)$  universellement mesurable en ses deux arguments,  $h_1$  et  $v$  sont donc  $\xi$ -mesurables et comme  $h_u(x)$  est  $\xi$ -mesurable, les deux membres de (4) sont  $\xi \otimes \xi$  mesurables, d'après le théorème de Fubini l'ensemble sur lequel (4) n'est pas vrai est alors de mesure  $\xi \otimes \xi$ . nulle. Comme  $p_u(y, x) > 0$   $\xi \otimes \xi$  presque sûrement on peut écrire

$$\frac{h_u(x)h^1(x)}{v(x, \beta)} v(y, \beta - u) = h_1(y) \quad \xi \otimes \xi \text{ p. s.}$$

On peut remarquer que  $h_1(x) > 0$  entraîne  $v(x, \beta) > 0$ . Soit en effet  $v(x, \beta) = 0$ , par définition de  ${}^v Q_u$  le produit scalaire figurant dans (2) est

nul donc aussi celui figurant dans (1). Or si  $A = E$ , en prenant une suite  $u_n \downarrow 0$  on voit que

$$Q_{u_n} h^1(x) = \int_{u_n}^{\infty} v^1(x, s) ds = 0 \quad \xi \text{ p. s.}$$

indépendamment de  $n$  ce qui implique  $h_1(x) = 0$  p. s. Or  $h_1(x) = 0$  est de mesure  $\alpha U_1 \ll \xi$  nulle donc aussi  $v(x, \beta) = 0$ .

En conclusion nous avons mis en évidence un ensemble dont le complémentaire est de mesure  $\xi \otimes \xi$  nulle tel que  $\forall u, \forall x, \forall y$

$$\frac{h_u(x)h^1(x)}{v(x, \beta)} v(y, \beta - u) = h_1(y) \quad \text{et} \quad h_1(x) > 0 \Rightarrow v(x, \beta) > 0$$

Alors

$$\frac{v(y, \beta - u)}{v(x, \beta)} = \frac{1}{h_u(x)} \frac{h_1(y)}{h_1(x)}$$

de même

$$\frac{v(x, \beta)}{v(y, \beta + u)} = \frac{h_1(x)}{h_1(y)} \frac{1}{h_u(y)}$$

soit

$$\frac{v(y, \beta - u)}{v(y, \beta + u)} = \frac{1}{h_u(x)h_u(y)}$$

Donc  $h_u(x)$  ne dépend pas de  $x$ . Alors

$$\alpha U^1 P_u^1 1(x) = \int \alpha(dx) \int_u^{\infty} e^{-t} P_t 1(x) dt = \alpha U^1 1(x)$$

car  $P_t 1 = 1$  ce qui entraîne que  $h_u(x) = e^{-u} \xi$  p. s. donc  $\alpha U^1$  p. s. Alors  $\forall u, \alpha U^1 P_u^1 = e^{-u} \cdot \alpha U^1$ , en intégrant  $\alpha U^1 U^1 = \alpha U^1$  ou encore

$$\hat{U}^1(\alpha U^1) \cdot \xi = \hat{U}^1(\alpha) \cdot \xi$$

comme  $\alpha U^1$  est finie  $\hat{U}^1(\alpha U^1) = \hat{U}^1 \alpha$  p. s. comme ces fonctions sont co-excessives  $\hat{U}^1(\alpha \hat{U}^1) = \hat{U}^1 \alpha$ . On sait que  $\hat{U}^1 \alpha$  est fini presque-sûrement, puisque c'est la densité de  $\alpha U_1$ . et que

$$\alpha U_1(A) = \int \alpha(dx) E_x \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} 1_A(X_t) dt < 1,$$

il détermine alors  $\alpha$  donc  $\alpha = \alpha U^1$ . D'après un lemme de Nagasawa et Sato [6] une mesure  $\mu$   $\sigma$ -finie est invariante pour  $P_t$  si et seulement si elle l'est pour  $U^1$ , ceci établit donc la condition nécessaire.

## § V. — RÔLE DE L'HYPOTHÈSE DE DUALITÉ

Nous allons montrer la nécessité de l'hypothèse de dualité au sens suivant : si on sait que le processus  $Y_t$  retourné de  $X_t$  au temps de retour  $\tau$  et pour la mesure  $\alpha$  est un processus de Markov homogène, les résolvantes de ces 2 processus sont en dualité par rapport à  $\alpha U$  ( $U_p$  résolvante de  $X_t$ ).

Avant d'énoncer le théorème nous donnons deux définitions :

$$\begin{aligned}\mu_t(A) &= P_\alpha(X_{(\tau-t)^-} \in A; t < \tau < \infty) \\ \mu_{t,s}(A \times B) &= P_\alpha(X_{(\tau-t)^-} \in A; X_{(\tau-s)^-} \in B; s < t < \infty \quad t < s.\end{aligned}$$

Pour  $B$  fixé il est clair que  $\mu_{s,t}(\cdot \times B)$  est absolument continue par rapport à  $\mu_t$  nous désignerons sa densité par

$$Q'_s(\cdot, B) : \mu_{t,s}(A \times B) = \int 1_A(x) \mu_t(dx) Q'_s(x, B),$$

$Q'_s$  est définie  $\mu_t$  presque-sûrement.

Nous faisons l'hypothèse suivante :

(H) : Il existe un semi-groupe  $\{\hat{P}_t\}$  agissant sur les fonctions universellement mesurables de  $E$ , tel que  $\forall x, \forall B \quad t \rightsquigarrow \hat{P}_t(x, B)$  soit borélienne et que

$$\forall t : Q'_s(x, B) = \hat{P}_{s-t}(x, B) \mu_t \text{ p. s.}$$

On désignera par  $\hat{U}_p$  la résolvante de  $\hat{P}_t$ .

THÉORÈME V. — *Supposons  $E_x(0 < \tau < \infty) > 0$  pour tout  $x$ ; dans les hypothèses (H), les résolvantes  $U_p$  et  $\hat{U}_p$  sont en dualité par rapport à  $\alpha U$ .*

Nous utilisons un lemme de Nagasawa qu'on trouve dans (3) sous la forme suivante :

Soit  $\Phi$  une fonction borélienne positive sur  $\bar{R}_+$ , soit  $H$  une variable aléatoire positive  $\hat{\mathcal{F}}_r$  mesurable et  $f$  une fonction universellement mesurable positive sur  $E$  :

$$\int_0^\infty \Phi(t) E_\alpha \{ f(X_{(\tau-t-r)^-}) \cdot H \} dt = \langle f, E.(\Phi(\tau-r) \cdot H \cdot 1_{r < \tau < \infty}) \rangle_{\alpha U}$$

On peut dans cette expression remplacer  $X_{(\tau-t)^-}$  par  $X_{\tau-t}$ . D'après ce lemme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda u} P_\alpha(X_{(\tau-t-u)^-} \in A; X_{(\tau-t)^-} \in B) du \\ = \langle 1_A, E.(e^{-\lambda(\tau-r)} \cdot 1_B(X_{(\tau-t)^-}) 1_{t < \tau < \infty}) \rangle_{\alpha U}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} E_x \int_0^\infty 1_B(X_{\tau-t}) e^{-\lambda(\tau-t)} 1(t < \tau < \infty) dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda u} E_x(1_B(X_u) 1_{(u < \tau < \infty)}) du \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda u} E_x(1_B(X_u) E_{X_u}(0 < \tau < \infty)) du. \end{aligned}$$

Soit  $v(x) = E_x(0 < \tau < \infty)$  on obtient la relation suivante :

$$(1) \quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-\lambda u} P_\alpha(X_{(\tau-t)-} \in A; X_{(\tau-t)-} \in B) du = \left\langle 1_A; E. \int_0^\infty e^{-\lambda u} 1_B(X_u) v(X_u) du \right\rangle_{\alpha U}$$

Nous allons calculer la même expression en utilisant la définition de  $Q_{t+u}^t$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda u} du P_\alpha(X_{(\tau-t-u)-} \in A; X_{(\tau-t)-} \in B) &= \int_0^\infty e^{-\lambda u} \mu_{t,t+u}(A \times B) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda u} Q_{t+u}^t(x, A) \mu_t(dx) 1_B(x) du = \langle 1_B, \hat{U}_\lambda 1_A \rangle_{\mu_t}. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_0^\infty \mu_t(A) dt = \int_0^\infty P_\alpha(X_{(\tau-t)-} \in A; t < \tau < \infty) dt \\ &= E_\alpha \int_0^\infty 1_A(X_u) v(X_u) du. \end{aligned}$$

On obtient alors la relation suivante :

$$(2) \quad \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-\lambda u} P_\alpha(X_{(\tau-t-u)-} \in A; X_{(\tau-t)-} \in B) du = \langle 1_B, \hat{U}_\lambda 1_A \rangle_m = \langle 1_B v, \hat{U}_\lambda 1_A \rangle_{\alpha U}.$$

En comparant (1) et (2) on voit que

$$\langle 1_A, U_\lambda(1_B v) \rangle_{\alpha U} = \langle 1_B v, \hat{U}_\lambda 1_A \rangle_{\alpha U}.$$

Donc  $\forall f, g$  universellement mesurables bornées :

$$\langle f, U_\lambda(gv) \rangle_{\alpha U} = \langle gv, \hat{U}_\lambda f \rangle_{\alpha U}.$$

Si  $v(x) > 0 \quad \forall x :$

$$\langle f, U_\lambda g \rangle_{\alpha U} = \langle g, \hat{U}_\lambda f \rangle_{\alpha U},$$

ce qui établit la dualité.

*Remarque.* — Si on ne fait pas cette dernière hypothèse on obtient la relation :

$$\langle f, U_\lambda g \rangle_{\mathfrak{a}U} = \langle g, \hat{U}_\lambda f \rangle_{\mathfrak{a}U}; \quad \forall f, \forall g$$

telle que  $\{g = 0\} \subset \{v = 0\}$ .

Cette hypothèse n'est donc pas essentielle.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. MAYER, Processus de Markov non stationnaires et espaces-temps. *Ann. I. H. P.*, vol. IV, n° 3, 1968.
- [2] H. KUNITA et T. WATANABE, On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory. *J. of Math. and Mech.*, vol. XV, n° 3, 1966.
- [3] CARTIER-MEYER-WEIL, *Le retournement du temps*. Complément à l'exposé de WEIL. *Seminaire de Probabilités II. Lecture Notes*. Springer Verlag, 1968.
- [4] CAIROLI, Produits de semi-groupes de transition et produits de processus. *Publ. I. S. U. P.*, vol. XV, n° 4, 1966.
- [5] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETTOOR, *Markov processes and potential theory*. Academic Press, 1968.
- [6] M. NAGASAWA et K. SATO, Some theorems on time change and killing of Markov processes. *Kodai Math. Sem. Reports*, vol. XV, 1963, 195-219.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1969).