

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE CAUBET

## **Sur les processus à valeurs dans le cube fondamental de Hilbert**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 5, n° 3 (1969), p. 245-254

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1969\\_\\_5\\_3\\_245\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_3_245_0)

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur les processus à valeurs dans le cube fondamental de Hilbert

par

Jean-Pierre CAUBET

Département de Mathématiques.  
Faculté des Sciences de Poitiers.

RÉSUMÉ. — Classification des trajectoires d'un tel processus selon leurs discontinuités, et application à la classification des semi-groupes sous-markoviens stationnaires définis sur un espace dénombrable.

ABSTRACT. — Classification of the paths of such processes according to their discontinuities, and application to the classification of submarkovian stationary semigroups defined on a denumerable space of states.

### I. PRÉLIMINAIRES

Soit  $X$  un espace muni d'une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{X}$ , et  $T$  un ensemble quelconque. On pose  $\Omega = X^T$ , l'élément générique de  $\Omega$  étant désigné par  $\omega = \{\omega_t, t \in T\}$ . On désigne par  $\mathcal{A}$  la  $\sigma$ -algèbre des parties de  $\Omega$  engendrée par les ensembles cylindriques finis  $C = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{\omega : \omega_{t_i} \in C_i\}$  où pour chaque indice  $i$  on a  $C_i \in \mathcal{X}$ . Enfin on suppose l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$  muni d'une probabilité  $P$ , et l'on désigne par  $\bar{\mathcal{A}}$  la complétée de  $\mathcal{A}$  par  $P$ .

On appelle condition toute application  $k : T \rightarrow \mathcal{X}$ . Pour toute condition  $k = \{k_t, t \in T\}$  et pour toute partie  $S \subset T$  on pose

$$\Omega_k^S = \{\omega : \omega_t \in k_t \quad \forall t \in S\}$$

Ainsi, dès que  $S$  est dénombrable, l'événement  $\Omega_k^S$  est dans  $\bar{\mathcal{A}}$ . Pour

toute condition  $k$ , il existe ainsi une partie dénombrable  $S \subset T$  telle que  $P(\Omega_k^S)$  soit la borne supérieure des nombres  $P(\Omega_k^{S'})$  lorsque  $S'$  parcourt les parties dénombrables de  $T$ . Dans ces conditions, on a pour tout

$$t \in T \quad P(\Omega_k^S - \Omega_k^{(t)}) = 0$$

et l'on dit que l'ensemble  $S$  détermine la condition  $k$ .

Soit maintenant  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$  une famille d'ensembles telle que  $\mathcal{X} \in \mathcal{K}$  et de plus compacte au sens séquentiel suivant : pour toute suite  $(K_n)$  d'éléments de  $\mathcal{K}$  d'intersection  $\cap K_n = \emptyset$ , il existe un entier  $m$  tel que

$$\bigcap_{n < m} K_n = \emptyset.$$

Toute condition  $k: T \rightarrow \mathcal{K}$  sera appelée une  $\mathcal{K}$ -condition.

On peut alors établir [4] [5] les résultats suivants :

LEMME 1. — Soit une suite  $(k_n)$  de  $\mathcal{K}$ -conditions déterminées respectivement par  $S_n$ . Alors l'ensemble

$$N_* = \bigcup_n \{ \Omega_{k_n}^{S_n} - \Omega_{k_n}^T \}$$

a une probabilité intérieure nulle.

PROPOSITION 1. — Soit  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$  la famille des parties  $A \subset \Omega$  pour lesquelles il existe  $A' \in \mathcal{A}$  tel que la différence symétrique  $A \Delta A'$  soit contenue dans un ensemble  $N_*$  ci-dessus. La famille  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$  constitue alors une  $\sigma$ -algèbre, et la probabilité  $P$  peut être prolongée d'une manière unique en une probabilité sur  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$  en posant  $P(A) = P(A')$ .

En particulier, à tout ensemble  $N_*$  se trouve ainsi assigné une probabilité nulle, et l'on notera aussi que pour toute  $\mathcal{K}$ -condition  $k$ , l'ensemble  $\Omega_k^T$  est dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$  puisque si  $S$  est un ensemble déterminant  $k$ ,  $\Omega_k^S - \Omega_k^T$  est un ensemble  $N_*$ , en sorte que  $P(\Omega_k^T) = P(\Omega_k^S)$ .

Soit maintenant  $X$  un espace métrisable de type dénombrable, et  $T$  un espace métrisable localement compact. Désignant par  $d$  une distance compatible avec la topologie de  $X$ , on appelle comme il est usuel diamètre d'une partie non vide  $A$  de  $X$  le nombre  $\delta(A) = \sup_{x \in A, y \in A} d(x, y)$ . Soit  $\mathcal{K}$  la famille des ensembles fermés de  $X$ , qui est donc compacte au sens ci-dessus, et désignons par  $\mathcal{F}$  une base dénombrable de  $\mathcal{K}$ . Enfin, soit  $(F_{\varepsilon, m})$  une énumération de tous les éléments de  $\mathcal{F}$  dont le diamètre est au plus égal à  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ). Pour toute partie  $S \subset T$ , nous posons

$$\Omega(\varepsilon, S) = \bigcap_{s \in S} \bigcup_{U \text{ ouvert } \ni s} \bigcup_m \{ \omega : \omega_t \in F_{\varepsilon, m} \quad \forall t \in U \}$$

L'ensemble

$$C_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \Omega(\varepsilon, \{t\})$$

est donc ainsi, quel que soit  $t \in T$ , dans la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ , en sorte que nous nous pouvons poser la définition suivante:

**DÉFINITION.** — *Sous les conditions précédentes, nous dirons que le processus  $\Omega = X^T$  est continu presque sûrement lorsque pour tout  $t \in T$  on a  $P(C_t) = 1$ .*

## II. PROCESSUS A VALEURS DANS LE CUBE FONDAMENTAL DE HILBERT CONTINUS PRESQUE SUREMENT

Nous désignerons selon l'usage par  $\Omega$  le premier nombre ordinal trans-fini de troisième classe, autrement dit le plus petit nombre ordinal indénombrable. Une même lettre désignera ainsi ce nombre ordinal et l'espace  $\Omega$  des épreuves, mais le lecteur est assuré qu'il n'en résultera en fait aucune confusion. Le but de cette section est essentiellement de montrer les trois résultats suivants:

**THÉORÈME 1.** — *Soit le cube fondamental de Hilbert  $X = [0, 1]^m$  ( $m \leq \aleph_0$ ) muni de la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{X}$  de ses parties boréliennes, et  $T$  un espace métrisable de type dénombrable et complet (polonais). Nous supposons l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$  muni d'une probabilité complète  $P$  en sorte que le processus  $\Omega = X^T$  soit continu presque sûrement.*

*Alors les trajectoires  $t \rightarrow X_t(\omega)$  ( $\omega \in \Omega$ ) sont au sens presque sûr des fonctions analytiques de première classe, ou ce qui est ici équivalent, des fonctions  $B$  mesurables de classe 1.*

A toute épreuve  $\omega \in \Omega$ , nous associons l'ensemble  $D(\omega) \subset T$  des points de discontinuité de la trajectoire  $t \rightarrow X_t(\omega)$ , puis nous désignons par  $D^\alpha(\omega)$  ( $1 \leq \alpha \leq \Omega$ ) le dérivé d'ordre  $\alpha$  de  $D(\omega) = D^0(\omega)$ . Nous définissons enfin les événements  $\Omega^\alpha = \{\omega : D^\alpha(\omega) = \emptyset\}$ .

**THÉORÈME 2.** — *Les ensembles  $\Omega^\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \Omega$ ) sont  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ -mesurables.*

Étant donné maintenant un événement  $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ , nous désignons par trace de la probabilité  $P$  sur  $A$  la probabilité  $P^A(\cdot) = P(A \cap \cdot)$  définie sur  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ . Convenant alors de dire que deux probabilités  $P'$  et  $P$  définies sur les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{A}$  sont dans la relation de dominance  $P' \subset P$

dès que: 1°  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ ; 2°  $P'(A) \leq P(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{A}'$ , le résultat suivant devient dès lors immédiat:

**THÉORÈME 3.** — *Les traces de la probabilité P sur les événements  $\Omega^\alpha$  déterminent une suite transfinie monotone non décroissante  $\{P^\alpha, 0 \leq \alpha \leq \Omega\}$  de probabilités dominées par P dont les processus associés sont ainsi continus presque sûrement. De plus, la limite  ${}_\Omega P = \lim_{\alpha \uparrow \Omega} \uparrow P^\alpha$  existe, et plus précisément il existe un plus petit nombre ordinal  $\alpha(\Omega) < \Omega$  tel que  ${}_\Omega P = P^{\alpha(\Omega)}$ , en sorte que la famille des probabilités  $P^\alpha$  définies ci-dessus sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}_X$  et distinctes est au plus dénombrable.*

Désignant alors par  $A_1$  l'ensemble des épreuves  $\omega \in \Omega$  dont les trajectoires sont des fonctions analytiques de première classe, l'événement  $\Omega$  se décompose canoniquement en la somme dénombrable

$$\Omega = (\Omega - A_1) + (A_1 - \Omega^\Omega) + (\Omega^\Omega - \Omega^{\alpha(\Omega)}) + \sum_{0 \leq \alpha \leq \alpha(\Omega)} (\Omega^{\alpha+1} - \Omega^\alpha)$$

Montrons maintenant le théorème 1, et pour cela montrons d'abord le résultat auxiliaire suivant, qui n'est qu'une transposition d'un résultat dû à J. Feldman [2]. Pour toute version du processus  $\Omega$ , c'est-à-dire pour toute application  $\mathcal{A}$ -mesurable  $Z: \Omega \rightarrow \Omega$  pour laquelle, quel que soit  $t \in T$  fixé, les variables aléatoires  $X_t$  et  $X_t \circ Z$  soient équivalentes, nous posons  $Im(Z) = \{Z(\omega), \omega \in \Omega\}$ .

**PROPOSITION 2.** — *Soit X un espace métrisable de type dénombrable, T un espace métrisable localement compact. On désigne par  $A_*$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  dont les trajectoires ont un ensemble de discontinuité  $D(\omega)$  de première catégorie. Alors pour toute version séparable Z du processus  $\Omega$ , l'ensemble  $A_* \cap Im(Z)$  est dans la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}$ .*

Supposons, sans pour cela nuire à la généralité, que l'ensemble T est compact, et soit  $S \subset T$  un ensemble dénombrable partout dense séparant la version Z. Nous désignons par  $S_{n,m}$  une énumération de toutes les parties finies de S telles que tout point de T soit distant d'au moins un point de  $S_{n,m}$  d'au plus  $\frac{1}{n}$ . D'autre part, soit

$$D_\varepsilon(\omega) = \{t: \forall \text{ l'ouvert } U \ni t, \exists r, t \in U \text{ t. q. } d[X_r(\omega), X_s(\omega)] > \varepsilon\}$$

On a  $D(\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \uparrow D_\varepsilon(\omega)$ , en sorte que pour que  $D(\omega)$  soit de première

catégorie, il faut et il suffit que chaque ensemble  $D_\varepsilon(\omega)$  soit non dense, puisque  $D_\varepsilon(\omega)$  est fermé. Et chaque ensemble  $D_\varepsilon(\omega)$  sera non dense si et seulement si, pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe un entier  $m$  tel que  $D_\varepsilon(\omega) \subset S_{n,m}^c$ . On a donc  $A_* = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \bigcap_n \bigcup_m \Omega(\varepsilon, S_{n,m})$  et comme chaque ensemble  $\Omega(\varepsilon, S_{n,m}) \cap \text{Im}(Z)$  est dans  $\overline{\mathcal{A}}$ , il en est bien finalement de même de

$$A_* \cap \text{Im}(Z).$$

Revenons alors à la démonstration du théorème 1. Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que  $X = [0, 1]$ . Le processus  $\Omega$  étant continu presque sûrement, il existe une version séparable  $Z'$  telle que pour tout  $t \in T$  l'ensemble

$$N_t = \Omega - \{ X_t \circ Z' = \lim_{s \rightarrow t} X_s \circ Z' \}$$

soit P-négligeable. Soit alors  $S \subset T$  l'ensemble dénombrable partout dense séparant  $Z'$ . La fonction aléatoire

$$Y_t = \liminf_{S \ni s \rightarrow t} X_t \circ Z'$$

est donc telle que l'application  $Z: \Omega \rightarrow \Omega$  qui associe

$$Z(\omega) = \{ Y_t(\omega), t \in T \}$$

est une version séparable du processus  $\Omega$ , d'ailleurs idempotente en ce sens que  $Z \circ Z = Z$ . Nous en déduisons que la probabilité extérieure de l'ensemble  $\text{Im}(Z)$  est égale à 1. Comme de plus, il résulte de la proposition précédente que  $A_* \cap \text{Im}(Z) = \text{Im}(Z)$  est dans  $\overline{\mathcal{A}}$ , en sorte que  $P[\text{Im}(Z)] = 1$ , et puisque  $\text{Im}(Z) \subset A_1$ , on en déduit qu'a fortiori  $P(A_1) = 1$  ce qui achève la démonstration.

Procédons maintenant à la démonstration du théorème 2, et pour cela supposons d'abord que  $T = [0, 1]$ . On a  $\Omega^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \downarrow \Omega(\varepsilon, T)$  en sorte que  $\Omega^0$  est dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ . Par transport de structure, on en déduit d'ailleurs que pour tout intervalle fermé  $T' \subset T$ , l'ensemble

$$\Omega^0(T') = \{ \omega : D(\omega) \cap T' = \emptyset \}$$

est aussi dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ . Signalons que ce résultat est déjà démontré dans [2].

Procédons maintenant par induction. Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble des fractions

binaires de  $T = [0, 1]$ . A tout  $r \in \mathcal{R}$  correspond une suite finie unique  $\{\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n\}$  de nombres réels  $\varepsilon_i = 0$  ou  $1$  telle que :

$$1^\circ r = \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i 2^{-i}; \quad 2^\circ \varepsilon_n = 1.$$

Nous dirons d'une telle fraction qu'elle est de rang  $n$ . En outre, désignons par  $T_r \subset T$  l'intervalle centré en  $r$ , de longueur  $2^{1-\text{rang}(r)}$ , fermé à gauche et de plus ouvert à droite ou fermé selon que  $\prod_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i = 0$  ou  $1$ . Il est immédiat que chaque ensemble  $\Omega^0(T_r) = \{\omega : D(\omega) \cap T_r = \emptyset\}$  est dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ .

Supposons alors que le nombre ordinal  $\alpha$  est de première espèce, en sorte qu'il possède un antécédent  $\alpha - 1$ . Nous supposons donc aussi avoir montré que  $\Omega^{\alpha-1}$  est dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ , et que plus généralement il en est de même de  $\Omega^{\alpha-1}(T_r) = \{\omega : D^{\alpha-1}(\omega) \cap T_r = \emptyset\}$  pour tout  $r \in \mathcal{R}$ . Ainsi l'ensemble  $\Omega^\alpha(n, p)$  des  $\omega \in \Omega$  qui appartiennent à tous les ensembles  $\{\Omega^{\alpha-1}(T_r); \text{rang}(r) = n\}$  sauf à  $p \leq 2^{n-1}$  d'entre eux au plus est dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ . Il en est donc encore de même de l'ensemble  $\Omega^\alpha(p) = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow \Omega^\alpha(n, p)$  constitué des  $\omega \in \Omega$  pour lesquels  $D^\alpha(\omega)$  contient au plus  $p$  points en sorte que l'ensemble  $\Omega^\alpha = \lim_{p \uparrow \infty} \uparrow \Omega^\alpha(p)$  est effectivement dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ .

Supposons maintenant le nombre ordinal  $\alpha \subset \Omega$  de seconde espèce. On observera que dans ce cas  $\Omega^\alpha = \lim_{\alpha' \uparrow \alpha} \uparrow \Omega^{\alpha'}$  en sorte que la  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ -mesurabilité de  $\Omega^\alpha$  est ici immédiate.

Pour montrer enfin la  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ -mesurabilité de l'ensemble  $\Omega^\Omega = \Omega_1$ , observons que son contraire  $\Omega_1^c$  est constitué des  $\omega \in \Omega$  pour lesquels l'ensemble parfait  $D^\Omega(\omega) = D_1(\omega)$  est non vide, ou ce qui est équivalent, pour lesquels le fermé  $D^1(\omega)$  contient un ensemble parfait non vide. Ceci nous amène à définir d'abord un criblage de l'ensemble des ensembles parfaits non vides de  $T = [0, 1]$ . Pour cela, nous munissons  $\mathcal{R}$  de la relation de pré-ordre «  $r < r'$  si et seulement si :  $1^\circ \text{rang}(r) < \text{rang}(r')$ ;  $2^\circ \varepsilon_i = \varepsilon'_i$  pour tout  $1 \leq i \leq \text{rang}(r)$  ». Soit de plus  $\varphi$  une application qui à toute fraction  $r \in \mathcal{R}$  fait correspondre soit l'intervalle fermé  $W_r$ , centré en  $r$  et de longueur  $2^{1-\text{rang}(r)}$ , ou bien exclusivement l'ensemble vide, telle que de plus :  $1^\circ \varphi(r') = \emptyset$  dès que  $\varphi(r) = \emptyset$  et  $r < r'$ ;  $2^\circ$  pour toute fraction  $r \in \mathcal{R}$  telle que  $\varphi(r) \neq \emptyset$ , il existe  $r' > r$  telle que  $\varphi(r') \neq \emptyset$ . Enfin, posons

$$P_n = \bigcup_{r: \text{rang}(r)=n} \varphi(r) \quad \text{et} \quad P = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow P_n.$$

Il résulte de sa définition même que l'ensemble  $P$  est fermé, mais il est

aisé de démontrer le résultat suivant, qui exprime que l'ensemble P est dense en lui-même :

LEMME 2. — Pour que P soit un ensemble parfait non vide, il faut et il suffit qu'en désignant par  $N(r, p)$  le nombre d'intervalles  $\varphi(r')$  non vides tels que : 1°  $r < r'$  ; 2°  $\text{rang}(r') = \text{rang}(r) + p$ , et en posant

$$N_{n,p} = \inf_{r: \text{rang}(r) = n \text{ et } \varphi(r) \neq \emptyset} N(r, p)$$

on ait pour tout entier  $n \geq 1$   $\lim_{p \uparrow \infty} N_{n,p} = \infty$ .

Soit alors  $\mathfrak{S}$  la famille des suites  $S = \{S_n, n \geq 1\}$  d'ensembles  $S_n \subset T$  telles que pour tout rang  $n \geq 1$  : 1° chaque  $S_n$  est l'une des  $2^{2^n} - 1$  réunions non vides d'intervalles de la famille  $\{W_r : \text{rang}(r) = n\}$  ; 2°  $S_{n+1} \subset S_n$  et plus précisément pour tout  $W_r \subset S_n$  ( $\text{rang}(r) = n$ ), il existe

$$W_{r'} \subset S_{n+1} \quad (\text{rang}(r') = n + 1)$$

tel que  $W_{r'} \subset W_r$ . A chaque suite  $S \in \mathfrak{S}$  nous associons une application  $\varphi_S$  qui a toute fraction  $r \in \mathcal{R}$  telle que  $\text{rang}(r) = n$  fait correspondre  $\varphi_S(r) = W_r$ , si  $W_r \subset S_n$  et  $= \emptyset$  sinon. Reprenant alors les notations du lemme précédent, à toute suite  $S \in \mathfrak{S}$  correspond une famille de nombres  $N_{n,p}(S)$  déterminés par l'application  $\varphi_S$ . Enfin, pour tout rang  $n \geq 1$ , nous munissons l'ensemble  $\mathfrak{S}$  de la relation d'équivalence  $\mathcal{R}_n$  telle que : «  $S_n \sim S'$  si et seulement si  $S_m = S'_m$  pour tout rang  $m$  tel que  $1 \leq m \leq n$  ».

A la famille  $\mathfrak{S}$ , nous associons donc la famille  $\Omega_{\mathfrak{S}}$  des suites

$$\Omega_{\mathfrak{S}} = \{\Omega_{S_n}, n \geq 1\}$$

où chaque  $\Omega_{S_n}$  est constitué des  $\omega \in \Omega$  pour lesquels  $W_r \cap D^1(\omega) \neq \emptyset$  dès que  $\text{rang}(r) = n$  et  $W_r \subset S_n$ . A chaque classe  $C_n \in \mathfrak{S}/\mathcal{R}_n$  est alors associé l'ensemble

$$\Omega(C_n) = \bigcap_{1 \leq m \leq n} \Omega_{S_m}$$

construit avec une suite arbitraire  $S \in C_n$ . Nous posons alors :

$$\Omega(n, m) = \bigcup_{p \geq 1} \bigcup_{C_{n+p} \ni S: N_{n,p}(S) \geq m} \Omega(C_{n+p})$$

L'ensemble  $\bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \Omega(n, m)$  est donc constitué des  $\omega \in \Omega$  pour lesquels  $D^1(\omega)$  contient un ensemble parfait non vide. Comme il est dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ , il en est donc de même de son contraire  $\Omega_1 = \Omega^\Omega$ , ce qui achève la démonstration dans le cas particulier où  $T = [0, 1]$ .



Le raisonnement ci-dessus s'étend dès lors immédiatement au cube fondamental de Hilbert  $[0, 1]^m$  ( $m \leq \aleph_0$ ), puis par relativisation, à tout  $G_s$  contenu dans ce cube, ce qui achève la démonstration dans le cas général où  $T$  est métrisable de type dénombrable et complet.

### III. CAS DES SEMI-GROUPES SOUS-MARKOVIENS STATIONNAIRES STANDARDS DÉFINIS SUR UN ESPACE D'ÉTAT DÉNOMBRABLE

Soit  $E$  un ensemble dénombrable non vide. Par un semi-groupe sous-markovien (resp. markovien) stationnaire standard défini sur  $E$  nous entendons une famille  $P = \{P_t, t > 0\}$  de matrices sous-markoviennes (resp. markoviennes), c'est-à-dire *t. q.* : 1°  $P_t(i, j) \geq 0$  pour tout couple  $(i, j) \in E \times E$ ; 2°  $\sum_{j \in E} P_t(i, j) \leq 1$  (resp. = 1) pour tout  $i \in E$ , cette famille satisfaisant à la relation de semi-groupe  $P_s P_t = P_{s+t}$  pour tout couple  $s, t > 0$  et à la relation de continuité  $\lim_{t \downarrow 0} P_t(i, j) = I(i, j)$ , où  $I$  désigne la matrice identité sur  $E$ .

On appellera loi d'entrée toute famille  $f = \{f_t, t > 0\}$  de mesures positives et bornées définies sur  $E$ , telle que  $f_{s+t} = f_s P_t$  lorsque  $s, t > 0$ . On observera qu'en particulier, pour tout  $i \in E$  fixé, la famille  $\{P_t(i, \cdot), t > 0\}$  constitue une telle loi de sortie. Enfin, on supposera dans la suite sans nuire à la généralité que le semi-groupe donné  $P$  est markovien, et que les lois d'entrées  $f = \{f_t, t > 0\}$  sont constituées de mesures de masse totale 1.

Supposons maintenant  $E$  plongé dans  $X = [0, 1]$  de telle sorte que  $E^1 = \{1\}$ , où nous désignons par  $E^1$  le dérivé de  $E$  dans  $X$ . Nous munissons l'espace  $\Omega = X^T$  d'une probabilité  $P$  définie à une loi d'entrée  $f$  près en posant pour tout pavé mesurable  $A = \prod_{t > 0} A_t (A_t \in \mathcal{X})$  où  $A_t \equiv X$  sauf pour un nombre fini d'instants  $t_1, \dots, t_n$ :

$$P(A) = \int_{A_{t_1}} f_{t_1}(d\omega_{t_1}) \int_{A_{t_2}} P_{t_2-t_1}(\omega_{t_1}, d\omega_{t_2}) \dots \int_{A_{t_n}} P_{t_n-t_{n-1}}(\omega_{t_{n-1}}, d\omega_{t_n})$$

où  $P_{t-s}(\omega_s, d\omega_t) = P_{t-s}(i, j)$  dès que  $i = \omega_s, j \in d\omega_t$  et 0 sinon.

Soit alors  $Z'$  une version séparable du processus  $\Omega$ . Nous savons [1] que dans ces conditions, l'ensemble  $\lim_{s \rightarrow t} (X_t \circ Z')(\omega)$  n'a au sens presque

sûr qu'un seul point dans E. Cette propriété entraîne que, S désignant un ensemble dénombrable partout dense dans T, la fonction aléatoire

$$Y_t = \liminf_{S \ni s \rightarrow t} X_s \circ Z'$$

est telle que l'application Z qui à  $\omega \in \Omega$  associe  $Z(\omega) = \{Y_t(\omega), t > 0\}$  soit en fait une version séparable du processus  $\Omega$ , idempotente et de plus semi-continue inférieurement. Ainsi, quoique le processus  $\Omega$  soit en fait seulement continu en probabilité du fait que le semi-groupe donné P est standard, nous sommes cependant ramenés à l'étude précédente.

Nous en déduisons d'abord que  $P(A_1) = 1$ . Posons alors  $\bar{E}_1 = A_1 \cap \bar{E}^T$ , où  $\bar{E}$  désigne la fermeture de E dans X. Puisque  $\bar{E}$  est fermé, l'ensemble  $\bar{E}^T$  est dans la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}_X$ , en sorte que  $\bar{E}_1 = A_1 \cap \bar{E}^T$  a une probabilité bien définie. On aura donc  $P(\bar{E}_1) = P(A_1 \cap \bar{E}^T) = 1$ . D'autre part,  $\omega \in A_1$  si et seulement si l'ensemble des discontinuités de la trajectoire  $t \rightarrow X_t(\omega)$  relativement à tout fermé de T est de première catégorie. Nous venons donc de démontrer le résultat suivant :

**THÉORÈME 4.** — *Soit  $\{P_t, t > 0\}$  un semi-groupe sous-markovien stationnaire standard défini sur un espace d'états dénombrable non vide E. Alors en désignant par  $\bar{E}$  le compactifié de E d'après Alexandrov par adjonction d'un point  $\infty$ , les trajectoires  $t \rightarrow X_t(\omega)$  ou  $\omega \in \bar{E}^T$  ( $T = ]0, \infty[$ ) ont au sens presque sûr et relativement à tout fermé de T un ensemble de discontinuité de première catégorie.*

Suivant J. Neveu [6], et étant donné deux semi-groupes P' et P définis sur les ensembles dénombrables E' et E respectivement, nous dirons que le semi-groupe P' est dominé par le semi-groupe P lorsque : 1°  $E' \subset E$ ; 2°  $P'_t(i, j) \leq P_t(i, j)$  pour tout couple  $(i, j) \in E' \times E'$  et quel que soit  $t > 0$ . Une application du théorème 3 donne alors les résultats suivants :

**THÉORÈME 5.** — *La probabilité P définie sur  $\Omega = X^T$  à une loi d'entrée près détermine par ses traces sur  $\Omega^\alpha (0 \leq \alpha \leq \Omega)$  une suite monotone non décroissante  $\{P^\alpha, 0 \leq \alpha \leq \Omega\}$  de semi-groupes sous-markoviens stationnaires standards dominés par le semi-groupe P. De plus, la limite  ${}_\Omega P = \lim_{\alpha \uparrow \Omega} P^\alpha$  existe, et plus précisément il existe un plus petit nombre ordinal  $\alpha(\Omega) < \Omega$  tel que  ${}_\Omega P = P^{\alpha(\Omega)}$ , en sorte que la famille des semi-groupes  $P^\alpha$  définis ci-dessus et distincts est au plus dénombrable. Enfin,  $P^1 = P_{\min}$ , où  $P_{\min}$  désigne le semi-groupe minimal défini par Feller.*

Le seul point restant à démontrer est que  $\alpha(\Omega) < \Omega$  avec inégalité stricte. Or pour tout  $t > 0$ , il existe un plus petit nombre ordinal  $\alpha_t < \Omega$  tel que

$P_t^\alpha(i, j) = \lim_{\alpha \uparrow \Omega} \uparrow P_t^\alpha(i, j)$  pour tout couple  $(i, j) \in E \times E$ . En faisant parcourir à  $t$  un ensemble dénombrable  $S$  partout dense dans  $T$ , on met ainsi en évidence l'existence d'un plus petit nombre ordinal  $\alpha_S < \Omega$  tel que  $P_t^\alpha(i, j) = \lim_{\alpha \uparrow \Omega} \uparrow P_t^\alpha(i, j)$  pour tout  $t \in S$  et tout couple  $(i, j) \in E \times E$ . On a donc  $\alpha_S \leq \alpha(\Omega)$ , et comme par ailleurs le semi-groupe  $P^\alpha \subset P$  est standard, on a aussi  $\alpha_S \geq \alpha(\Omega)$ , ce qui achève la démonstration.

On peut enfin identifier la suite  $\{P^\alpha, 1 \leq \alpha \leq \alpha(\Omega)\}$  à la suite transfinie construite par J. Neveu [6] à partir du semi-groupe minimal en utilisant des formes de perturbation, le semi-groupe  $P^{\alpha(\Omega)}$  étant ainsi le plus petit semi-groupe en relation de dominance absolue [6] avec le semi-groupe donné  $P$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. L. CHUNG, *Markov chains with stationary transition probabilities*. Springer, Berlin, 1960.
- [2] J. FELDMAN, On the measurability of stochastic processes in product spaces. *Pacific J. Math.*, **14**, 1962, p. 113-120.
- [3] C. KURATOWSKY, *Topologie*, vol. 1, 4<sup>e</sup> édition Warszawa, 1958.
- [4] A. MAYER, *C. R. A. S.*, **248**, 1959, p. 3106.
- [5] A. MAYER, *C. R. A. S.*, **249**, 1959, p. 2475.
- [6] J. NEVEU, *Lattice Methods. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley and Los Angeles. University of California Press, **2**, 1961, p. 341-391.

*Manuscrit reçu le 18 décembre 1968.*