

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HERBERT HEYER

L'analyse de Fourier non-commutative et applications à la théorie des probabilités

Annales de l'I. H. P., section B, tome 4, n° 2 (1968), p. 143-164

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1968__4_2_143_0

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'analyse de Fourier non-commutative et applications à la théorie des probabilités

par

Herbert HEYER

1. — INTRODUCTION

Chaque variable aléatoire (réelle) [v. a.] X sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ induit sur la tribu Borelienne \mathfrak{B} de la droite réelle \mathbf{R} une mesure de probabilité $\mu_X := X(P)$, la répartition de X . Étant donné sur $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ les v. a. indépendantes X_1, \dots, X_n avec les répartitions correspondantes μ_1, \dots, μ_n il est bien connu que la répartition de $Y_n := X_1 + \dots + X_n$ équivaut au produit de convolution $\nu_n := \mu_1 * \dots * \mu_n$. Pour étudier le comportement limite au sens de la convergence vague de telles suites $(\nu_n)_{n \geq 1}$ sur \mathfrak{B} on a besoin de la *fonction caractéristique* [f. c.] d'une v. a. X qui est la transformation de Fourier [TF] de la mesure induite μ_X . En détail on étudie l'application $\hat{\mu}_X$ de \mathbf{R} en \mathbf{C} définie par

$$\hat{\mu}_X(t) := \int_{\mathbf{R}} e^{itx} \mu_X(dx)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Il y a trois propriétés fondamentales de la f. c. qui seront utilisées : la correspondance entre les mesures de probabilité sur \mathfrak{B} et leurs f. c., c'est-à-dire l'application $\mu \rightarrow \hat{\mu}$ est injective, multiplicative (relativement au produit de convolution) et bicontinue (la convergence vague des suites $(\mu_n)_{n \geq 1}$ des répartitions sur \mathfrak{B} équivaut à la convergence usuelle des suites $(\hat{\mu}_n)_{n \geq 1}$ des f. c. vers une fonction limite continue).

Dans un article précédent [6] nous avons présenté la théorie de la TF des mesures de probabilité au cas d'un groupe localement compact, non-abélien

et *séparable*. Le but de ce travail (*) est la généralisation des théorèmes fondamentaux aux mesures bornées. Dans cette théorie-là les propriétés de la TF ci-dessus se généralisent naturellement. De plus la plupart de la théorie sera développée sans la condition de la séparabilité du groupe.

Jusqu'au § 5 nous nous occupons de la TF d'une mesure bornée (après avoir préparé des préliminaires).

Dans le § 6 nous allons donner le théorème de la continuité (de Paul Lévy) généralisé; sa démonstration est basée sur un article de Martin-Löf [10].

Dans la deuxième partie de notre texte (§ 7) nous discuterons des applications de la TF à la théorie des probabilités, en particulier au problème de l'équation de convolution et à la convergence des produits finis des v. a. généralisées indépendantes. Pour un groupe *compact* séparable nous allons présenter quelques propositions reliées aux suites vaguement arithmétiques et une caractérisation de la TF d'une probabilité.

Les assertions de nombreux théorèmes de cet article sont connues; les démonstrations, différentes de celles usuellement exposées, ont l'effet de montrer l'utilité pratique de la théorie de la TF, en particulier à la théorie des probabilités.

2. — RAPPEL DES NOTIONS LES PLUS IMPORTANTES DE LA THÉORIE DES MESURES SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT

Prenons un groupe localement compact (et séparé). Soit \mathcal{U}_0 l'ensemble de *représentations* U de G , unitaires et non-équivalentes, avec l'*espace de représentation* $\mathcal{H} := \mathcal{H}_U$, \mathcal{U} le sous ensemble de \mathcal{U}_0 contenant les éléments de \mathcal{U}_0 qui sont irréductibles. L'ensemble des fonctions continues sur G sera dénoté $\mathcal{C} := \mathcal{C}(G)$, les sous-ensembles des fonctions bornées et des fonctions avec support compacts seront abrégés $\mathcal{C}^b := \mathcal{C}^b(G)$ et $\mathcal{K} := \mathcal{K}(G)$. En cas que nous avons besoin des fonctions à valeurs complexes nous ajouterons l'indice \mathbf{C} . D'ailleurs nous appellerons les ensembles de mesures (réelles) bornées et de mesures de probabilité sur G comme \mathcal{M}^b et \mathcal{M} . Toutes les mesures qui se présentent sont des mesures de Radon en sens de N. Bourbaki. Elles peuvent être considérées comme mesures de Borel rég-

(*) Résumé de deux conférences données à la Faculté des Sciences de Rennes (Mathématiques) au mois d'avril 1967.

lières sur le tribu de Borel de G . Il est bien connu que \mathcal{M}^b est une algèbre de Banach après avoir introduite l'opération de convolution comme produit. \mathcal{M}^b admet certaines topologies : la *topologie de Bernoulli* (faible) \mathfrak{T}^b qui est la topologie de la convergence simple sur l'espace \mathcal{C}^b . De plus nous avons la *topologie vague* \mathfrak{T}^v qui est la topologie de la convergence simple sur \mathfrak{K} . La boule unité \mathcal{M}^1 de \mathcal{M}^b est \mathfrak{T}^v -compacte. \mathcal{M} est \mathfrak{T}^v -compact si et seulement si G est compact. L'application $(\mu, \nu) \rightarrow \mu * \nu$ de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ dans \mathcal{M} est \mathfrak{T}^v -continue, alors \mathcal{M} est un semi-groupe topologique avec la convolution comme produit.

Il y a une *involution* dans \mathcal{M}^b définie par $\mu^\sim(B) := \mu(B^{-1})$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$, c'est-à-dire : $\mu^{\sim\sim} = \mu$, $(\alpha\mu + \beta\nu)^\sim = \alpha\mu^\sim + \beta\nu^\sim$, $(\mu * \nu)^\sim = \nu^\sim * \mu^\sim$ pour $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. μ^\sim est appelé *mesure adjointe* de μ . $\mu \in \mathcal{M}^b$ est dite *symétrique* si $\mu = \mu^\sim$. Pour chaque $x \in G$ la mesure ponctuelle en x est dénotée ε_x . En particulier \mathcal{M}^b admet l'élément unité ε_e (où e est l'élément neutre de G).

Sur tout groupe localement compact il n'existe qu'une seule mesure invariante (mesure de Haar) nommée ω_G ; elle est finie (alors dans \mathcal{M}) si et seulement si G est compact. Pour chaque sous groupe compact H de G la notation ω_H signifie la mesure de Haar normée sur H .

Donné un ensemble ordonné A nous marquons par A_+ l'ensemble d'éléments a de A avec $a \geq 0$.

3. — TROIS THÉORÈMES DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

Soit \mathfrak{F} l'ensemble des fonctions continues de type positif, \mathcal{N} le sous-ensemble de fonctions $\varphi \in \mathfrak{F}$ avec $\varphi(e) = 1$.

3.1. THÉORÈME. — (i) Soit $U \in \mathcal{U}_0$ avec l'espace de représentation \mathcal{H} . Pour chaque $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$, l'application $x \rightarrow \langle U_x f, f \rangle$ de G en \mathbf{C} est un élément de \mathfrak{F} .

(ii) Pour chaque $\varphi \in \mathfrak{F}$ tel que $\varphi \neq 0$ il y a une représentation cyclique $U \in \mathcal{U}_0$ et un vecteur $f \in \mathcal{H}$ cyclique tel que

$$\varphi(x) = \langle U_x f, f \rangle \text{ pour tout } x \in G.$$

Démonstration. — Voir [11], 401.

3.2. THÉORÈME. — Soit ν une mesure sur G bornée mais éventuellement négative. Alors

$$\int_G \varphi d\nu = 0 \quad \text{pour chaque } \varphi \in \mathcal{N}$$

entraîne $\nu = 0$.

Démonstration. — Reliée au théorème 5 dans [11], 411.

3.3. Soit maintenant S un espace compact avec une mesure ζ telle que $\text{supp}(\zeta) = S$. A chaque $s \in S$ il y a un espace de Hilbert \mathcal{H}^s . Soit \mathcal{Y} une base de l'intégrale directe topologique, c'est-à-dire un ensemble

$$\{ \xi : S \rightarrow \mathcal{H}^s : \xi \text{ satisfait les conditions (1) à (4) ci-dessous } \}.$$

(1) Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{Y}$ l'application $s \rightarrow \langle \xi(s), \eta(s) \rangle$ de S en \mathbf{C} est continue et ζ -intégrable.

(2) \mathcal{Y} a la propriété de linéarité, c'est-à-dire : $\xi, \eta \in \mathcal{Y}$ implique $\alpha\xi + \beta\eta \in \mathcal{Y}$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

(3) Pour tout $\xi \in \mathcal{Y}$ et $\varphi \in C_c(S)$ l'application $\varphi\xi$ définie par $\varphi\xi(s) := \varphi(s)\xi(s)$ pour chaque $s \in S$ est un élément de \mathcal{Y} .

(4) Pour chaque $s_0 \in S$ l'ensemble $\{ \xi(s_0) : \xi \in \mathcal{Y} \} \subset \mathcal{H}^{s_0}$ est dense dans \mathcal{H}^{s_0} .

Alors nous définissons un produit scalaire dans \mathcal{Y} par

$$(\xi, \eta) := \int_S \langle \xi(s), \eta(s) \rangle \zeta(ds),$$

donc \mathcal{Y} devient un espace pré-Hilbertien. Le complétement \mathcal{H} de \mathcal{Y} est dit l'intégrale directe topologique des espaces \mathcal{H}^s relativement à la mesure ζ . Nous écrivons

$$\mathcal{H} = \int_S^\oplus \mathcal{H}^s \zeta(ds).$$

Donnons pour chaque $s \in S$ un élément $U^s \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^s)$, où $\mathcal{B}(\mathcal{H}^s)$ signifie l'ensemble d'opérateurs linéaires bornés de \mathcal{H}^s . $\mathcal{B}(\mathcal{H}^s)$ est un sous-espace linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{H}^s)$ d'opérateurs linéaires de \mathcal{H}^s . Si l'on a un opérateur $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que

- (i) $U\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$ et
- (ii) $[U\xi](s) = U^s\xi(s)$ pour tout $s \in S$,

nous appellerons U l'intégrale directe des opérateurs U^s et nous écrirons

$$U = \int_S^{\oplus} U^s \zeta(ds)$$

Nous avons besoin du

THÉORÈME. — Soit G un groupe localement compact (non nécessairement séparable) et $U \in \mathfrak{U}_0$ avec l'espace de représentation \mathfrak{H} . Alors \mathfrak{H} est l'intégrale directe topologique de la forme

$$\int_S^{\oplus} \mathfrak{H}^s \zeta(ds) \text{ tel que}$$

(i) Pour chaque $x \in G$

$$U_x = \int_S^{\oplus} U_x^s \zeta(ds)$$

(ii) Il existe dans S un ensemble N localement ζ -négligeable avec

(a) $\mathfrak{H}^s \neq \{0\}$ pour tout $s \in \mathbf{C} \setminus N$,

(b) $U^s \in \mathfrak{U}$ avec l'espace de représentation \mathfrak{H}^s .

Démonstration. — Voir [11], 526.

4. — LA TRANSFORMATION DE FOURIER D'UNE MESURE BORNÉE

Nous sommes préparés suffisamment pour introduire la notion de la TF généralisée.

4.1. DÉFINITION. — Soit $\mu \in \mathcal{M}^b$. La transformation de Fourier $\widehat{\mu}^U$ de μ est définie par la formule

$$\langle \widehat{\mu}^U f, g \rangle = \int_G \langle U_x f, g \rangle \mu(dx)$$

pour chaque $U \in \mathfrak{U}$ et tous les $f, g \in \mathfrak{H} : = \mathfrak{H}_U$.

A l'occasion il suffit d'écrire

$$\widehat{\mu}^U = \int_G U_x \mu(dx)$$

ou même :

$$\widehat{\mu} = \int_G U_x \mu(dx).$$

Alors la TF est un ensemble $\{\widehat{\mu}^U : U \in \mathfrak{U}\}$ d'opérateurs tel que l'équation ci-dessus vaut.

4.2. REMARQUE. — L'existence de l'intégrale dans 4.1. résulte de la continuité de l'application $x \rightarrow U_x f$ de G dans \mathcal{H} pour tous les $f \in \mathcal{H}$ et de l'unitarité de U_x pour chaque $x \in G$ la norme $\|\mu\|$ de μ étant finie.

4.3. La TF sur G peut être regardée comme une application

$$\mu \rightarrow \widehat{\mu} \quad \text{de} \quad \mathcal{M}^b \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

où \mathcal{H} dépend de la représentation $U \in \mathfrak{U}$ qui est fixée.

D'autre part on peut la regarder comme une application

$$U \rightarrow \widehat{\mu}^U \quad \text{de} \quad \mathfrak{U} \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}(\mathcal{H}_0),$$

où \mathcal{H}_0 signifie un espace de Hilbert qui contient les espaces de représentations \mathcal{H}_U pour chaque $U \in \mathfrak{U}$ comme des sous-espaces fermés (Il suffit de prendre \mathcal{H}_0 tel que $\dim \mathcal{H}_0 = \text{card } G$ ou $= \text{card } D$, où D est un ensemble dense dans G). Dans ce cas là μ est fixé.

D'abord nous avons l'intention d'étudier les propriétés de la TF comme une application de premier type (de \mathcal{M}^b dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$).

4.4 PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES. — Soit $\mu \in \mathcal{M}^b$.

4.4.1. $\widehat{\mu}^U \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ (pour $U \in \mathfrak{U}$).

4.4.2 $\widehat{\mu}^U$ est borné; de plus nous avons

$$\|\widehat{\mu}^U\| \leq \|\mu\| \quad \text{pour tout} \quad U \in \mathfrak{U}.$$

En fait : soit $U \in \mathfrak{U}$, $f \in \mathcal{H}$ avec $\|f\| = 1$. On calcule

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mu}^U f\|^2 &= \langle \widehat{\mu}^U f, \widehat{\mu}^U f \rangle = \int_G \langle U_x f, \widehat{\mu}^U f \rangle \mu(dx) \\ &\leq \|\mu\| \sup_{x \in G} |\langle U_x f, \widehat{\mu}^U f \rangle| \\ &\leq \|\mu\| \sup_{x \in G} (\|U_x f\| \|\widehat{\mu}^U f\|) \\ &\leq \|\mu\| \cdot \|\widehat{\mu}^U f\| \leq \|\mu\| \sup_{\substack{f \in \mathcal{H} \\ \|f\|=1}} \|\widehat{\mu}^U f\| \leq \|\mu\|^2 < \infty \end{aligned}$$

4.4.3. REMARQUE. — De 4.4.1. et 4.4.2. nous concluons que

$$\widehat{\mu}^U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (U \in \mathcal{U}).$$

4.4.4. $\widehat{\mu}^I = \|\mu\| I$, où I est l'opérateur unité sur \mathcal{H} (ou la représentation unité de G avec l'espace de représentation $\mathcal{H} = \mathbf{C}$).

4.4.5. Soit $x_0 \in G$, alors $\widehat{\varepsilon}_{x_0}^U = U_{x_0}$; en particulier

$$\widehat{\varepsilon}_e^U = U_e = I \quad (U_e \in \mathcal{U}).$$

4.4.6. $\widehat{\mu}^{\sim U} = (\widehat{\mu}^U)^*$, où l'étoile signifie l'adjoint de l'opérateur

$$\widehat{\mu}^U \quad (U \in \mathcal{U}).$$

En fait : pour tous les éléments $f, g \in \mathcal{H}$ nous avons

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mu}^{\sim U} f, g \rangle &= \int_G \langle U_x f, g \rangle \mu^{\sim}(dx) \\ &= \int_G \langle U_{x^{-1}} f, g \rangle \mu(dx) = \int_G \langle U_x^* f, g \rangle \mu(dx) \\ &= \langle (\widehat{\mu}^U)^* f, g \rangle. \end{aligned}$$

4.4.7. L'application $\mu \rightarrow \widehat{\mu}$ de \mathcal{M}^b dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est injective. En fait : supposons $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^b$ et $\widehat{\mu}_1^U = \widehat{\mu}_2^U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Alors pour tout $U \in \mathcal{U}$ il y a la relation

$$\int_G \langle U_x f, g \rangle (\mu_1 - \mu_2)(dx) = 0 \quad \text{avec} \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

Soit $\psi \in \mathcal{N}$. Par théorème 3.1. nous avons

$$\psi(x) = \langle U_x f, f \rangle \quad \text{pour un } f \in \mathcal{H} \quad (\text{tout } x \in G).$$

Nous définissons la mesure $\nu := \mu_1 - \mu_2$. Donc cette assertion tirée du théorème 3.2. fournit l'implication

$$\int_G \psi d\nu = 0 \quad \text{pour tout} \quad \psi \in \mathcal{N} \Rightarrow \nu = 0,$$

c'est-à-dire $\mu_1 = \mu_2$.

4.4.8. $\widehat{\mu}^U$ est auto-adjoint si et seulement μ est symétrique.

4.4.9. $\widehat{\mu}^U$ est normale si et seulement $\mu \sim * \mu = \mu * \mu \sim$.

4.4.10. Si μ est symétrique et si $\text{Re } T$ (ou $\text{Im } T$) signifie la partie réelle (ou la partie imaginaire) de l'opérateur T , nous avons

$$\widehat{\mu}^U = \int_G \text{Re } U_x \mu(dx).$$

4.4.11. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^b$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Alors

$$\widehat{\alpha\mu_1 + \beta\mu_2} = \alpha\widehat{\mu_1} + \beta\widehat{\mu_2}$$

Les démonstrations de 4.4.8. à 4.4.11. sont évidentes (voir [6]).

4.4.12. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^b$. Alors

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2} = \widehat{\mu_1} \cdot \widehat{\mu_2}.$$

En fait : prenons $U \in \mathcal{U}$; pour tous les $f, g \in \mathcal{F}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mu_1 * \mu_2}^U f, g \rangle &= \int_G \langle U_x f, g \rangle (\mu_1 * \mu_2)(dx) \\ &= \int_{G \times G} \langle U_{xy} f, g \rangle (\mu_1 \otimes \mu_2)(d(x, y)) \\ &= \iint_{G \times G} \langle U_x U_y f, g \rangle \mu_2(dy) \mu_1(dx) \\ &= \int_G \langle \widehat{\mu_1}^U U_y f, g \rangle \mu_2(dy) \\ &= \langle \widehat{\mu_2}^U f, (\widehat{\mu_1}^U)^* g \rangle = \langle \widehat{\mu_1}^U \widehat{\mu_2}^U f, g \rangle. \end{aligned}$$

4.5. Assemblant les propriétés 4.4.2., 4.4.6., 4.4.7. et 4.4.12. nous obtenons le *résultat* suivant :

L'application $\mu \rightarrow \widehat{\mu}$ de \mathcal{M}^b dans $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ est une injection linéaire, multiplicative et involutive.

L'image de \mathcal{M}^b par cette application sera abrégée $\widehat{\mathcal{M}}^b$.

5. — DEUX CAS SPÉCIAUX

5.1. Soit G localement compact et *abélien*, \widehat{G} l'ensemble des caractères de G (qui sont des représentations de dimension 1). \widehat{G} est localement compact, quand il est muni de la topologie de Pontrjagin. On l'appelle le groupe dual de G .

Prenons $\mu \in \mathcal{M}^b$. Alors pour tout $\chi \in \widehat{G}$

$$\widehat{\mu}^\chi = \int_G \chi(x) \mu(dx).$$

Par le théorème de Bochner (voir [12], 19) les applications $\chi \rightarrow \mu^\chi$ de \widehat{G} dans \mathbf{C} pour $\mu \in \mathcal{M}_+^b$ sont exactement les éléments de $\mathfrak{F}(\widehat{G})$.

5.2. Soit G *compact*. Nous pouvons écrire $\mathfrak{U} = \{U^{(\sigma)} : \sigma \in \Sigma\}$, où Σ signifie un ensemble d'indices. Chaque $U^{(\sigma)}$ avec l'espace de représentation \mathcal{H}_σ est de dimension finie : $\dim U^{(\sigma)} := \dim \mathcal{H}_\sigma < \infty$. Pour chaque $\sigma \in \Sigma$ nous considérons une représentation $U^{(\sigma)} \in \mathfrak{U}$ avec son espace de représentation \mathcal{H}_σ . Par la remarque précédente $d_\sigma := \dim U^{(\sigma)} < \infty$. Soit $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{d_\sigma}\}$ une base orthonormée de \mathcal{H}_σ . Comme fonctions coordonnées de $U^{(\sigma)}$ (relativement à cette base) nous regardons les fonctions $u_{jk}^{(\sigma)}$ ($i, k = 1, \dots, d_n$) définies par

$$u_{jk}^{(\sigma)}(x) := \langle U_x^{(\sigma)} \zeta_k, \zeta_j \rangle \quad \text{pour tout } x \in G.$$

Après avoir introduit la notation

$$\mathfrak{T}_\sigma(G) := \left[\left\{ u_{jk}^{(\sigma)} : j, k = 1, \dots, d_\sigma \right\} \right]$$

pour chaque $\sigma \in \Sigma$, où $[\]$ signifie l'enveloppe linéaire, nous obtenons les propriétés suivantes

- (i) $\mathfrak{T}_\sigma(G)$ est indépendant de la base $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{d_\sigma}\}$ de \mathcal{H}_σ .
- (ii) $\mathfrak{T}_\sigma(G) \subset \mathbf{C}_C(G)$.
- (iii) $\dim \mathfrak{T}_\sigma(G) = d_\sigma^2$.

L'ensemble $\mathfrak{T}(G) := \left[\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathfrak{T}_\sigma(G) \right]$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques sur G . Le théorème de Peter-Weyl dit, que $\mathfrak{T}(G)$ est uniformément dense dans $\mathbf{C}(G)$ (voir [13], 78).

Prenons donc $\mu \in \mathcal{M}^b$. Nous recevons comme TF de μ l'ensemble $\{\widehat{\mu}^{(\sigma)} : \sigma \in \Sigma\}$, où

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}^{(\sigma)} &= \int_{\mathbf{G}} \mathbf{U}_x^{(\sigma)} \mu(dx) = \left(\int_{\mathbf{G}} u_{jk}^{(\sigma)}(x) \mu(dx) \right)_{j,k=1, \dots, d_\sigma} \\ &= (\widehat{\mu}_{jk}^{(\sigma)})_{j,k=1, \dots, d_\sigma} \quad \text{pour tout } \sigma \in \Sigma.\end{aligned}$$

\mathbf{G} étant séparable (le premier axiome de dénombrabilité suffit) le système \mathcal{U} est dénombrable. Alors $\Sigma = \mathbf{N}$ et simplement

$$\widehat{\mu}^{(n)} = \int_{\mathbf{G}} \mathbf{U}_x^{(n)} \mu(dx) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Pour chaque $\mu \in \mathcal{M}$ et $\sigma \in \Sigma$ l'objet $\widehat{\mu}^{(\sigma)}$ est une $d_\sigma \times d_\sigma$ matrice avec ses coefficients dans $\mathbb{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{G})$. Il est bien clair que les valeurs propres α de l'opérateur $\widehat{\mu}^{(\sigma)}$ ont la propriété $|\alpha| \leq 1$.

La mesure de Haar normée $\omega_{\mathbf{G}}$ est caractérisée par la relation $\widehat{\omega}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{U}} = 0$ pour tout $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{U} \neq \mathbf{I}$ (Il suffit d'utiliser les relations d'orthogonalité pour les fonctions coordonnées, voir [13], 73).

6. — LE THÉORÈME DE PAUL LÉVY GÉNÉRALISÉ

Le but de ce paragraphe est une généralisation du théorème de la continuité de Lévy pour les mesures bornées sur un groupe localement compact arbitraire (Pour la forme classique du théorème voir [7], 191).

6.1. Dans \mathcal{M}^b nous introduisons les topologies suivantes : la topologie \mathfrak{C}^b définie par la famille de semi-normes

$$\mu \rightarrow |\mu(\varphi)| \quad (\varphi \in \mathfrak{C}^b)$$

et la topologie \mathfrak{C}^v définie par les semi-normes

$$\mu \rightarrow \sup_{1 \leq i \leq n} |\mu(\varphi_i)| \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathfrak{K})$$

Une troisième topologie peut être introduite par les semi-normes

$$\mu \rightarrow |\langle \widehat{\mu}^{\mathbf{U}} f, g \rangle| \quad (\mathbf{U} \in \mathcal{U}, f, g \in \mathfrak{K}).$$

Nous appellerons cette dernière topologie la *topologie de Fourier*. Elle est

définie comme la topologie de la convergence simple sur l'ensemble $\widehat{\mathcal{M}}^b$ ($\widehat{\mathcal{M}}^b$ étant muni de la convergence faible) et elle est abrégée par \mathfrak{T}^f .

Il est évident que

6.1.1. $\mathfrak{T}^f < \mathfrak{T}^b$ ($<$ = plus fine que); car l'application $x \rightarrow \langle U_x f, g \rangle$ de \mathbf{G} dans \mathbf{C} est continue et bornée pour tout $f, g \in \mathfrak{L}(U \in \mathfrak{U})$.

6.1.2. \mathfrak{T}^f est séparé; car l'application $\mu \rightarrow \widehat{\mu}$ de \mathcal{M}^b sur $\widehat{\mathcal{M}}^b$ est injective (4.4.7.).

6.2. Voilà la généralisation du théorème de Lévy :

THÉORÈME. — Soient $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite des mesures dans \mathcal{M}_+^b et $(\widehat{\mu}_n)_{n \geq 1}$ la suite correspondante des TF. Alors $(\mu_n)_{n \geq 1} \mathfrak{T}^b$ — converge vers $\mu \in \mathcal{M}_+^b$ si et seulement $(\widehat{\mu}_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers $\widehat{\mu}$ (c'est-à-dire $(\widehat{\mu}_n^U)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers $\widehat{\mu}^U$ pour tout $U \in \mathfrak{U}$).

Nous avons besoin de préparer quelques propositions auxiliaires :

6.3. LEMME. — Soit E un espace compact (séparé). Un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathbf{C}_c(E)$ est faiblement compact si et seulement \mathcal{A} est simplement compact et uniformément borné. Dans ce cas là les deux topologies s'accordent.

Démonstration. — [3], 275.

6.4. LEMME. — Soient E, F deux espaces localement compacts (séparés) et $\psi : E \times F \rightarrow \mathbf{C}$ une application bornée et séparément continue. Donnons $\mu \in \mathcal{M}^b(E)$ et $\nu \in \mathcal{M}^b(F)$. Alors l'application

$$x \rightarrow \int_F \psi(x, y) \nu(dy) \quad \left(\text{ou } y \rightarrow \int_E \psi(x, y) \mu(dx) \right)$$

de E en \mathbf{C} (ou de F en \mathbf{C}) est continue et

$$\int_E \left(\int_F \psi(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E \psi(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Démonstration. — [2], 207.

Le théorème suivant est la proposition la plus fondamentale pour la démonstration de 6.2.

6.5. THÉORÈME. — (Martin-Löf [10]). Soit G localement compact. Alors un sous-ensemble \mathcal{N} de \mathcal{M}^b est \mathcal{C}^b -compact si et seulement si \mathcal{N} est \mathcal{C}^f -compact. Dans ce cas-là $\mathcal{C}^b = \mathcal{C}^f$.

Démonstration. — (i) « \Rightarrow » est évident; car une topologie compacte ne peut être affaiblie sans perdre la propriété de la séparation.

(ii) « \Leftarrow »; soit \mathcal{N} \mathcal{C}^f -compact, c'est-à-dire tout ultrafiltre \mathfrak{f} sur \mathcal{N} \mathcal{C}^f -converge vers un $\nu \in \mathcal{N}$ qui équivaut à

$$\lim_{\mathfrak{f}} \langle \widehat{\mu}^U f, g \rangle = \langle \widehat{\nu}^U f, g \rangle \quad \text{pour tout } U \in \mathcal{U} \quad \text{et } f, g \in \mathcal{K}.$$

Nous allons démontrer que \mathfrak{f} \mathcal{C}^b -converge vers ν , c'est-à-dire que

$$\lim_{\mathfrak{f}} \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^b.$$

Soit d'abord $\varphi \in \mathcal{F}$. Par le théorème 3.1. il existe une représentation cyclique U dans \mathcal{U}_0 et, de plus, il y a un vecteur cyclique $f \in \mathcal{K}$ tel que

$$\varphi(x) = \langle U_x f, f \rangle \quad \text{pour tout } x \in G.$$

A l'aide du théorème 3.3. nous avons

$$\mathcal{K} = \int_S^{\oplus} \mathcal{K}^s \zeta(ds)$$

et

$$U_x = \int_S^{\oplus} U_x^s \zeta(ds) (y \in G),$$

où S est un espace compact, $\mathcal{K}^s \neq \{0\}$ et $U^s \in \mathcal{U}$ pour tout $s \in \mathbf{C}$ avec $N \subset S$, $\zeta(N) = 0$.

Nous pouvons choisir f dans la base de l'intégrale directe topologique. Alors il résulte

$$\varphi(x) = \int_S \langle U_x^s f^s, f^s \rangle \zeta(ds),$$

où l'application $(x, s) \rightarrow \langle U_x^s f^s, f^s \rangle$ de $G \times S$ dans \mathbf{C} est séparément continue (tout $f^s \in \mathcal{K}^s$).

De plus cette application est bornée; car la fonction

$$s \rightarrow \langle f^s, f^s \rangle = \|f^s\|^2$$

de S en \mathbf{C} est continue et alors

$$(*) \quad |\langle U_x^s f^s, f^s \rangle| \leq \langle f^s, f^s \rangle = \|f^s\|^2 \leq \sup_{s \in S} \|f^s\|^2 < \infty,$$

6.4. implique la continuité des fonctions

$$x \rightarrow \int_{\mathcal{S}} \langle U_x^s f^s, f^s \rangle \zeta(ds) \quad \text{et} \quad s \rightarrow \int_{\mathcal{S}} \langle U_x^s f^s, f^s \rangle \nu(dx),$$

en outre la validité de l'équation

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} \varphi d\mu &= \int_{\mathcal{G}} \left(\int_{\mathcal{S}} \langle U_x^s f^s, f^s \rangle \zeta(ds) \right) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathcal{S}} \left(\int_{\mathcal{G}} \langle U_x^s f^s, f^s \rangle \mu(dx) \right) \zeta(ds) \end{aligned}$$

(tout $U \in \mathcal{U}$ et $f^s \in \mathcal{H}^s$).

Puisque $I \in \mathcal{U}$ avec $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$ nous obtenons la \mathcal{C}^f -continuité de l'application $\mu \rightarrow \langle \widehat{\mu}^1, 1 \rangle = \|\mu\|$. Alors l'ensemble $\{\|\mu\| : \mu \in \mathcal{N}\}$ est compact et puis uniformément borné, donc, à l'aide de (*), la fonction ρ_μ définie par ρ_μ

$$\rho_\mu(s) := \int_{\mathcal{G}} \langle U_x^s f^s, f^s \rangle \mu(dx)$$

est uniformément bornée sur \mathcal{S} pour chaque $\mu \in \mathcal{N}$.

Choisissons un ensemble compact K de \mathcal{S} avec $K \cap \mathcal{N} = \emptyset$. L'ensemble $\mathcal{A} := \{\text{Res}_K \rho_\mu : \mu \in \mathcal{N}\}$ est un sous-ensemble simplement compact de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$. 6.3. nous dit que \mathcal{A} est faiblement compact et que les topologies s'accordent sur \mathcal{A} . Donc

$$\lim_f \int_K \rho_\mu(s) \zeta(ds) = \int_K \rho_\nu(s) \zeta(ds).$$

Le choix de l'ensemble $K \subset \mathcal{S}$ avec $\zeta(\mathcal{N}) = 0$ étant arbitraire la régularité de ζ implique :

$$\lim_f \int_{\mathcal{S}} \rho_\mu(s) \zeta(ds) = \int_{\mathcal{S}} \rho_\nu(s) \zeta(ds),$$

donc

$$\lim_f \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

Maintenant chaque $\varphi \in \mathcal{K}$ peut être approximé uniformément par des combinaisons linéaires des fonctions de \mathcal{F} , alors

$$\lim_f \mu(\varphi) = \nu(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$.

Finalement, parce que l'ensemble $\{ \|\mu\| : \mu \in \mathcal{N} \}$ est compact, nous avons

$$\lim_{\mathfrak{f}} \|\mu\| = \|\nu\|$$

et alors

$$\lim_{\mathfrak{f}} \mu(\varphi) = \nu(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^b$.

La démonstration du théorème est terminée.

Démonstration du théorème de Lévy généralisé :

(i) « \Leftarrow » évident.

(ii) « \Rightarrow », supposons $(\mu_n)_{n \geq 1}$ \mathcal{C}^f -converge vers μ pour $n \rightarrow \infty$. Alors l'ensemble $\mathcal{N} := \{ \mu, \mu_1, \mu_2, \dots \}$ est \mathcal{C}^f -compact, donc par le théorème précédent \mathcal{C}^b -compact et sur \mathcal{N} nous avons $\mathcal{C}^f = \mathcal{C}^b$. Alors \mathcal{C} est \mathcal{C}^b -compact, donc $(\mu_n)_{n \geq 1}$ \mathcal{C}^b -converge vers μ comme $n \rightarrow \infty$.

6.6. REMARQUES. — Soit G localement compact et *séparable*.

6.6.1. Soient $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite dans \mathcal{M}_+^b et $(\widehat{\mu}_n)_{n \geq 1}$ la suite correspondante dans $\widehat{\mathcal{M}}^b$.

Si $(\mu_n^U)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers un opérateur T^U sur \mathcal{H} pour tout $U \in \mathcal{U}$, alors il existe une mesure $\lambda \in \mathcal{M}_+^b$ telle que \mathcal{C}^v -lim $\mu_n = \lambda$.

Pour démontrer cela on modifie la preuve de 6.5. en simplement considérant la convergence simple de la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ sur \mathcal{F} sans spécifier l'élément limite.

6.6.2. Soient $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite dans \mathcal{M} et $(\widehat{\mu}_n)_{n \geq 1}$ la suite correspondante dans $\widehat{\mathcal{M}}$. Si $(\mu_n)_{n \geq 1}$ \mathcal{C}^b -converge vers $\mu \in \mathcal{M}$, alors $(\widehat{\mu}_n^U)_{n \geq 1}$ converge *fortement* vers $\widehat{\mu}$.

L'idée de la démonstration est d'utiliser la formule géométrique qui vaut dans chaque espace de Hilbert \mathcal{H} : Pour tout $f, g \in \mathcal{H}$ nous avons :

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle f, g \rangle.$$

7. — APPLICATIONS

7.1. Soit G un groupe localement compact quelconque. Dans [5] l'auteur donnait une caractérisation des solutions μ de l'équation de convolution $\mu = \mu * \nu$ pour $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ avec $\nu =: \varepsilon_e$ (problème de Choquet et Deny)

employant des méthodes élémentaires (*). Maintenant nous avons l'intention de présenter une démonstration d'un résultat similaire basé sur la TF, même pour des mesures dans \mathcal{M}_+^b .

THÉORÈME. — Soit $\nu \in \mathcal{M}_+^b$. Alors l'équation $\mu = \nu * \mu$ est résoluble pour $\mu \in \mathcal{M}_+^b$ si et seulement $\mu = \omega_H$, où $H = \{ \text{supp}(\nu) \}$, le plus petit sous-groupe compact contenant $\text{supp}(\nu)$.

COROLLAIRE. — Les idempotents de \mathcal{M}_+^b (ce sont les mesures $\mu \in \mathcal{M}_+^b$ telles que $\mu * \mu = \mu$) sont exactement les mesures ω_H , où H est un sous-groupe compact de G .

Démonstration. — L'idée de la démonstration est due à Loynes [8]. Nous pouvons supposer que $\|\nu\| = 1$; car la relation $\|\sigma * \varphi\| = \|\sigma\| \|\varphi\|$ pour toutes les mesures $\sigma, \varphi \in \mathcal{M}_+^b$ implique $\|\mu\| = \|\nu\| \|\mu\|$. Pour $\mu \in \mathcal{M}_+^b$ avec $\|\mu\| \neq 0$ nous obtenons le résultat.

(i) « \Leftarrow » évident; car sur les sous-groupes compacts H de G la mesure ω_H est inverse-invariante.

(ii) « \Rightarrow »; il suffit de résoudre l'équation d'opérateur

$$\widehat{\nu^U \mu^U} = \widehat{\mu^U} \quad \text{pour tout } U \in \mathcal{U}.$$

Fixons $U \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{F}$. Définissant $g := \widehat{\mu^U} f$ nous avons à résoudre l'équation $\widehat{\nu^U} g = g$, où

$$\int_G (\langle g, g \rangle - \langle U_x g, g \rangle) \nu(dx) = \langle g, g \rangle - \langle \widehat{\nu^U} g, g \rangle = 0.$$

Nous concluons $U_x g = g$ ν -presque partout. L'ensemble $\{x \in G : U_x g = g\}$ est fermé dans G . Donc $U_x \widehat{\mu^U} f = \widehat{\mu^U} f$ pour chaque $x \in \text{supp}(\nu)$. $U \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{F}$ étant choisis arbitrairement il résulte

$$\text{supp}(\nu) \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \{x : U_x \widehat{\mu^U} = \widehat{\mu^U}\} =: H,$$

où H est un sous-groupe fermé, donc localement compact de G .

Définissons pour tout $y \in H$ la mesure μ_y sur la tribu de Borel \mathcal{B} de G par $\mu_y(B) := \mu(y^{-1}B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Naturellement $\mu_y \in \mathcal{M}_+^b$ pour tout

(*) *N. D. L. R.* Ces méthodes sont cependant plus générales : le résultat vaut dans tout groupe topologique avec μ et ν t -régulières. Cf. Tortrat (ces *Annales* I-3, 1965, p. 227).

$y \in H$. Il est facile de vérifier que $\mu_y = \mu$ pour tout $y \in H$; car nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mu}_y^U h, g \rangle &= \int_G \langle U_x h, g \rangle \mu_y(dx) = \int_G \langle U_{yx} h, g \rangle \mu(dx) \\ &= \int_G \langle U_y U_x h, g \rangle \mu(dx) = \langle U_y \widehat{\mu}^U h, g \rangle = \langle \widehat{\mu}^U h, g \rangle \end{aligned}$$

pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $h, g \in \mathcal{H}$.

$\text{Res}_H \mu$ est la mesure de Haar de H . Lorsque μ est borné, H est compact dans G . Après avoir étendu μ au groupe entier par

$$\mu(B) = \mu(B \cap H) + \mu(B \setminus H)$$

pour chaque $B \in \mathcal{B}$ nous recevons $\mu(B) = \mu(B \cap H)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$; car $\mu(B \setminus H) \leq \mu(\text{supp}(v)) = 0$.

7.2. CONVERGENCE DES PRODUITS FINIS DES *v. a. GÉNÉRALISÉES*. — Il n'y a aucune difficulté à définir la notion d'une *v. a.* avec ses valeurs dans un groupe localement compact. Nous allons considérer des suites de telles *v. a. généralisées* indépendantes.

Pour le reste du paragraphe nous supposons que G est d'ailleurs *séparable*.

7.2.1. *Définition*. — Une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de *v. a. (généralisées) converge stochastiquement* vers une *v. a. X* ($\text{st-lim } X_n = X$), si pour chaque voisinage (symétrique) V de e nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n X^{-1} \in V] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[XX_n^{-1} \in V] = 1$$

$(X_n)_{n \geq 1}$ *converge presque sûrement* vers X ($\text{p. s.-lim } X_n = X$), si pour chaque voisinage V de e nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \bigcup_{i \geq n} [X_i X^{-1} \in V] = \lim_{n \rightarrow \infty} P \bigcup_{i \geq n} [X_i^{-1} X \in V] = 1$$

7.2.2. Il est facile de voir que $\text{st-lim } X_n = X$ si et seulement pour $m \geq n$ on a $\text{st-lim } X_n^{-1} X_m = E$, où E est définie par $E(\omega) = e$ pour tout $\omega \in \Omega$, c'est-à-dire pour tout voisinage V de e il y a un $\varepsilon > 0$ et un $n_0 := n_0(\varepsilon)$ avec

$$P[X_n^{-1} X_m \in V] \geq 1 - \varepsilon \quad \text{pour} \quad m \geq n > n_0(\varepsilon).$$

(*Critère de Cauchy* pour la convergence stochastique).

7.2.3. La démonstration de 7.2.2. montre en outre que chaque suite stochastiquement convergente a une sous-suite qui converge presque partout.

7.2.4. Gardons la notation de 7.2.2. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{st-lim } X_n = E$
 (2) $\mathfrak{C}^0\text{-lim } X_n = \varepsilon_e$.

Démonstration. — De 7.2.2. et 7.2.3. dans [4], pour 7.2.4. voir [6].

7.2.5 *Proposition.* — Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite des v. a. indépendantes. Formons la suite $(Y_k)_{k \geq 1}$, où $Y_k := X_1 X_2 \dots X_k$ ($k \geq 1$). Alors la convergence stochastique et la convergence presque sûrement de la suite $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont équivalentes (*).

Démonstration. — Nous donnerons une version à gauche de la preuve de Loynes dans [9].

(i) « \Leftarrow » évident; il vaut en général.

(ii) « \Rightarrow »; soit W un voisinage de e . En outre soient W_1, W_2, W_3 des voisinages de e symétriques telles que $W_3 W_3 \subset W_2, W_2 W_2 \subset W_1$ et $W_1 W_1 \subset W$. Un lemme de Paul Lévy ([7], 246) applicable aux v. a. X_1, X_2, \dots et leurs produits finis $Y_k := X_1 \dots X_k$ ($k \geq 1$) nous donne l'inégalité suivante :

$$(*) \quad P[Y_n \in \mathbf{C}W_2] \geq \inf_{1 \leq k \leq n} P[Y_k^{-1} Y_n \in W_2] P \bigcup_{k=1}^n [Y_k \in \mathbf{C}W_1]$$

(Prenez, dans le lemme,

$$A_k := [Y_k \in \mathbf{C}W_1] \quad \text{et} \quad B_k := [Y_k^{-1} Y_n \in W_2], \quad k \geq 1).$$

Nous supposons $\text{st-lim } Y_n = Y$. Par 7.2.3. il existe une suite $(Y_{n_k})_{k \geq 1}$, sous suite de $(Y_n)_{n \geq 1}$, qui converge presque sûrement : en fait

$$P[Y_{n_k}^{-1} Y \in \mathbf{C}W_3] < \frac{1}{2^k} \quad (k \geq 1)$$

et

$$P \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} [Y_{n_k}^{-1} Y \in W_3] = 1.$$

Par 7.2.2. il y a un n_0 tel que $P[Y_n^{-1} Y_m \in W_2] > \frac{1}{2}$ pour tout $m \geq n > n_0$.

(*) *N. D. L. R.* Cette proposition vaut dans tout groupe métrisable (réf. ci-dessus); des résultats plus fins sont dus à CSISZÁR (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 5, 1966, p. 279-295), GALMARINO (*id.*, 7, 1967, p. 29-42).

Choisissons k_0 tel que $n_{k_0} > n_0$ et employant (*) aux v. a. $X_{n_k+1}, \dots, X_{n_{k+1}}$ nous obtenons pour chaque $k \geq k_0$ l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{P} \bigcup_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} [Y_n^{-1} Y_n \in \mathbf{C}W_1] &\leq \mathbb{P} [Y_{n_k}^{-1} Y_{n_{k+1}} \in \mathbf{C}W_2] \\ &\leq \mathbb{P} [Y_{n_{k+1}}^{-1} Y \in \mathbf{C}W_3] + \mathbb{P} [Y_{n_k}^{-1} Y \in \mathbf{C}W_3] < \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Le lemme de Borel-Cantelli ([7], 228) entraîne presque sûrement $Y_{n_k}^{-1} Y \in W_3$ ($n_k < n \leq n_{k+1}$) pour n assez grand, donc presque sûrement $Y_n^{-1} Y \in W$ pour n assez grand, enfin le résultat.

7.2.6. Voilà la généralisation d'une proposition de Grenander ([4], 109).

PROPOSITION. — Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite des v. a. indépendantes, $(Y_k)_{k \geq 1}$ la suite des produits finis $Y_k := X_1 X_2 \dots X_k$ ($k \geq 1$), $(\mu_k)_{k \geq 1}$ la suite des répartitions correspondantes. Si pour chaque $U \in \mathfrak{U}$ et $f, g \in \mathfrak{J}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \widehat{\mu}_k^U - \mathbf{I}, f, g \rangle| < \infty,$$

alors p. s.-lim $Y_k = Y$ pour $n \rightarrow \infty$.

Démonstration. — Pour chaque $k \geq 1$ nous écrirons $\widehat{\mu}_k^U := \widehat{\mu}_k = \mathbf{I} + \Delta_k$ ($U \in \mathfrak{U}$ fixé). Considérant pour tout k, l avec $l \leq k < l$ la v. a. $Y_{k,l} := X_{k+1} \dots X_l$ nous calculons simplement

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{k,l} &= \widehat{\mu}_{k+1} \dots \widehat{\mu}_l = \prod_{i=k+1}^l (\mathbf{I} + \Delta_i) \\ &= \mathbf{I} + \sum_{i=k+1}^l \Delta_i + \sum_{k+1 \leq i < j \leq l} \Delta_i \Delta_j + \dots \end{aligned}$$

et, avec $d_i := |\langle \Delta_i, f, g \rangle|$ pour chaque $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{\mu}_{k,l} - \mathbf{I}, f, g \rangle| &\leq \sum_{i=k+1}^l d_i + \frac{1}{2!} \left(\sum_{i=k+1}^l d_i \right)^2 + \dots \\ &= \exp \left(\sum_{i=k+1}^l d_i \right) - 1 (f, g \in \mathfrak{J}). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \Delta_i, f, g \rangle| = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \widehat{\mu}_i - \mathbf{I}, f, g \rangle| < \infty,$$

alors $(\widehat{\mu}_{k,l})_{k,l \geq 1}$ converge faiblement vers $I = \widehat{\varepsilon}_e$, donc, par 6.2., \mathcal{G}^v -lim $\mu_{k,l} = \varepsilon_e$, donc $\text{st-lim } Y_{k,l} = E$ (7.2.4.), $\text{st-lim } Y_k^{-1} Y_l = E$, $\text{st-lim } Y_k = Y$ (7.2.2.), enfin p. s.-lim $Y_k = Y$ (7.2.5.).

7.3. QUELQUES RÉSULTATS DANS LE CAS D'UN GROUPE COMPACT.

7.3.1. *Définition.* — Une suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ de \mathcal{M} est dite *vaguement arithmétique*, si la suite des mesures π_n définies par

$$\pi_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$$

a une limite en sens de \mathcal{G}^v . Dans le cas d'un groupe *compact* $(\mu_n)_{n \geq 1}$ s'appelle *équidistribuée*, si $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est vaguement arithmétique avec ω_G comme mesure limite de la suite $(\pi_n)_{n \geq 1}$.

7.3.2. *Exemple.* — Soit H un sous-groupe compact de G . Alors la suite $(\omega_H^n)_{n \geq 1}$ est vaguement arithmétique (par 7.1.). Si G est compact, alors $(\omega_G^n)_{n \geq 1}$ est équidistribuée.

En général nous avons

THÉORÈME. — Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Alors la suite $(\mu^n)_{n \geq 1}$ est vaguement arithmétique.

Dans le cas d'un groupe compact elle est équidistribuée si et seulement si $\widehat{\mu}^U$ n'a pas la valeur propre $\alpha = 1$ pour aucun $U \in \mathcal{U} \setminus \{I\}$.

Démonstration. — Première assertion : à l'aide d'un théorème ergodique et de 6.2. (voir [6]). Seconde assertion : à l'aide de 6.2. et d'une caractérisation de la TF de ω_G (voir [1]). Suivant le travail de Cigler [1] nous allons prouver un théorème de convergence pour des mesures sur un groupe *compact*.

7.3.4. *Proposition.* — Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Alors $(\mu^n)_{n \geq 1}$ \mathcal{G}^v -converge si et seulement si pour chaque valeur propre α de $\widehat{\mu}^U$ ($U \in \mathcal{U} \setminus \{I\}$) on a ou $|\alpha| < 1$ ou $\alpha = 1$.

Démonstration. — Supprimée dans [1].

(i) « \Rightarrow »; sans restriction de la généralité nous pouvons supposer que $\widehat{\mu}^U$ est défini pour tout $U \in \mathcal{U}_1 := \mathcal{U} \setminus \{I\}$. Soit α une valeur propre de $\widehat{\mu}^U$ ($U \in \mathcal{U}_1$). Supposons $|\alpha| = 1$ et $\alpha \neq 1$. Alors il existe un vecteur propre $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$ tel que $\widehat{\mu}^U f = \alpha f$ et donc nous obtenons $(\widehat{\mu}^n)^U f = \alpha^n f$, mais il

n'y a de convergence faible de la suite $(\widehat{\mu}^{nU})_{n \geq 1}$ (tout $U \in \mathcal{U}_1$) que pour $\alpha = 1$ qui ne vaut pas. Le théorème 6.2. entraîne le résultat.

(ii) « \Leftarrow »; soit α une valeur propre de $\widehat{\mu}^U$ comme plus haut tel que $|\alpha| < 1$. Encore une fois il existe un vecteur propre correspondant $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$: $\widehat{\mu}^{nU}f = \alpha^n f$. Alors $(\widehat{\mu}^{nU})_{n \geq 1}$ converge fortement vers l'opérateur 0 pour tout $U \in \mathcal{U}_1$ qui appartient à la mesure ω_G . Théorème 6.2. implique la \mathcal{G}^b -convergence de la suite $(\mu^n)_{n \geq 1}$.

Un raisonnement analogue entraîne le résultat dans le cas $\alpha = 1$.

7.3.5. THÉORÈME. — Pour chaque $\mu \in \mathcal{M}$ la suite $((\mu\widetilde{\mu})^n)_{n \geq 1}$ \mathcal{G}^v -converge.

Démonstration. — Soit $U \in \mathcal{U}_1$. Nous démontrerons que l'opérateur

$$(\widehat{\mu\widetilde{\mu}})^U = \widehat{\mu}^U(\widehat{\mu\widetilde{\mu}})^U = \widehat{\mu}^U(\widehat{\mu}^U)^*$$

(4.4.6.) n'a que des valeurs propres strictement positives.

En fait : pour $(\widehat{\mu\widetilde{\mu}})^U f = \alpha f$ ($f \in \mathcal{H}$; $f \neq 0$) nous avons

$$\alpha \langle f, f \rangle = \langle \alpha f, f \rangle = \langle (\widehat{\mu\widetilde{\mu}})^U f, f \rangle = \langle \widehat{\mu}^{nU} f, \widehat{\mu}^{nU} f \rangle \geq 0.$$

Alors $0 \leq \alpha \leq 1$ pour chaque valeur propre α . La proposition 7.3.4. fournit le résultat.

7.3.6. THÉORÈME. — (Caractérisation de la TF d'une mesure de probabilité). Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite des matrices $T_n = (t_{jk}^{(n)})_{j,k=1, \dots, d_n}$, où, pour tout $n \geq 1$, $t_{jk}^{(n)} \in \mathbb{C}_\mathbb{C}(G)$ (tout $j, k = 1, \dots, d_n$). Nous renumérotions les coefficients des matrices T_n de manière à obtenir une suite $(t_k)_{k \geq 0}$. Soit, de plus, $\{U^{(n)} : n \geq 1\}$ le système \mathcal{U} de G et, comme plus haut, $\{u_k : k \geq 0\}$ le système des fonctions coordonnées correspondant renuméroté. Alors $(T_n)_{n \geq 1}$ est la TF d'une mesure de \mathcal{M} si et seulement si :

(1) $t_0 = 1$

(2)
$$\left| \sum_{k=0}^n c_k t_k \right| \leq \sup_{x \in G} \left| \sum_{k=0}^n c_k u_k(x) \right|$$

pour chaque $n \geq 1$ et tout de suite $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

Démonstration. — (i) « \Rightarrow »; supposons $(T_n)_{n \geq 1}$ est la TF d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}$. Alors $T_n = \mu^{U^{(n)}}$ pour tout $n \geq 1$ avec

$$\widehat{\mu}^{U^{(n)}} = \int U_x^{(n)} \mu(dx) = \left(\int_G u_{jk}^{(n)}(x) \mu(dx) \right)_{j,k=1, \dots, d_n}.$$

Il est bien clair que

$$t_0(x) = \int_G u_0(x) \mu(dx) = \|\mu\| = 1.$$

donc (1).

Voilà la démonstration de (2) :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n c_k t_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^n c_k \int_G u_k(x) \mu(dx) \right| \\ &= \left| \int_G \left(\sum_{k=0}^n c_k u_k(x) \right) \mu(dx) \right| \\ &\leq \int_G \left| \sum_{k=0}^n c_k u_k(x) \right| \mu(dx) \\ &\leq \sup_{x \in G} \left| \sum_{k=0}^n c_k u_k(x) \right| \end{aligned}$$

(ii) « \Leftarrow »; la démonstration est indiquée dans [4], 194. Supposons la validité des conditions (1) et (2). Nous considérons l'ensemble $\mathfrak{C}(G)$ (5.2.). Tout élément $\varphi \in \mathfrak{C}(G)$ a la forme

$$\varphi := \sum_{k=0}^n c_k u_k, \quad \text{où} \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbf{C}.$$

Définissant une forme linéaire L_0 sur $\mathfrak{C}(G)$ par

$$L_0 \varphi := \sum_{k=0}^n c_k t_k$$

nous obtenons

$$|L_0 \varphi| = \left| \sum_{k=0}^n c_k t_k \right| \leq \sup_{x \in G} \left| \sum_{k=0}^n c_k u_k(x) \right| = \|\varphi\|$$

par (2), donc $\|L_0\| \leq 1$.

Parce que $\mathfrak{C}(G)$ est uniformément dense dans $\mathbf{C}_C(G)$ (5.2.), L_0 peut être étendu à une forme linéaire L sur $\mathbf{C}_C(G)$ avec $\|L\| \leq 1$. Le théorème de

Riesz fournit alors l'existence d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_+^b$ avec $\|\mu\| \leq 1$ telle que

$$L\varphi = \int_G \varphi d\mu \text{ pour tout } \varphi \in C_c(G).$$

$t_0 = 1$ (1) étant donné nous avons $\|L\| = 1$ et donc $\mu \in \mathcal{M}$. Finalement

$$t_k = Lu_k = \int_G u_k d\mu \quad \text{pour tout } k \geq 0$$

ou

$$T_n = \int_G U_x^{(n)} \mu(dx) = \widehat{\mu}^{U^{(n)}},$$

le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. CIGLER, Folgen normierter Masse auf kompakten Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **1**, 1962, 3-13.
- [2] I. GLICKSBERG, Weak compactness and separate continuity. *Pacific J. Math.*, **11**, 1961, 205-214.
- [3] I. GLICKSBERG, Uniform boundedness for groups. *Can. J. Math.*, **14**, 1962, 269-276.
- [4] U. GRENANDER, *Probabilities on Algebraic Structures*. Almqvist et Wiksell, 1963.
- [5] H. HEYER, Factorization of probability measures on locally compact groups. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **8**, 1967, 231-258.
- [6] H. HEYER, Fourier transforms and probabilities on locally compact groups. A paraître dans *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 1968.
- [7] M. LOÈVE, *Probability theory*. 2nd edition, D. Van Nostrand, 1960.
- [8] R. M. LOYNES, Fourier transforms and probability theory on a non-commutative locally compact topological group. *Arkiv för Math.*, **5**, 1963, 37-42.
- [9] R. M. LOYNES, Products of independent random elements in a topological group. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **1**, 1963, 446-455.
- [10] MARTIN-LÖF, The continuity theorem on a locally compact group. *Theory of Prob. and its Applications*, **X**, 1965, 338-341.
- [11] M. A. NEUMARK, *Normierte Algebren*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.
- [12] W. RUDIN, *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Publishers, 1962.
- [13] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann et Cie, 1953.

Manuscrit reçu le 15 novembre 1967.

Directeur de la publication : P. GAUTHIER-VILLARS.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1600b.

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5691. 7-1968.