ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ROLAND GRUNIG

Probabilités parfaites. Théorème de Kolmogorov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 3 (1965-1966), p. 221-225
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1966__2_3_221_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. II, nº 3, 1966, p. 221-225. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Probabilités parfaites. Théorème de Kolmogorov

par

Roland GRUNIG

En 1949 Gnedenko et Kolmogorov ont introduit la notion de probabilité parfaite. Marczewski et Ryll-Nardzewski en 1953 ont consacré plusieurs articles [*3*] [*4*] [*5*] [*7*], aux probabilités compactes qui sont une particularisation des probabilités parfaites, et aux probabilités quasi compactes qui sont équivalentes aux probabilités parfaites. Nous avons choisi systématiquement l'appellation probabilité parfaite plutôt que quasi compacte bien que les principales propriétés de ces probabilités se trouvent dans [*7*]. Le but de cet article est de caractériser des espaces mesurables sur lesquels toute probabilité est parfaite et de généraliser le théorème de Kolmogorov.

1. DÉFINITION [*7*]. — Une probabilité P sur une tribu $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble Ω est parfaite si et seulement si pour toute variable aléatoire f il existe $\mathfrak{Q}$ ($\mathfrak{Q} \in \mathcal{A}$) tel que $P(\mathfrak{Q}) = 1$ et $f(\mathfrak{Q})$ est un borélien de la droite réelle.

De cette définition on déduit facilement la propriété suivante des probabilités parfaites qui est essentielle dans les démonstrations des résultats ultérieurs.

2-1. PROPOSITION. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espace mesurable et f une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$. Si la probabilité P sur $\mathcal{A}$ est parfaite, la probabilité P_f sur $\mathcal{A}'$ définie pour tout $A' \in \mathcal{A}'$ par $P_f(A') = P[f^{-1}(A')]$ est parfaite.

Démonstration. — Soient $(R, \mathcal{B})$ la droite réelle munie de sa tribu borélienne et h une application mesurable de $(\Omega', \mathcal{A}')$ dans $(R, \mathcal{B})$. L'application hof de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(R, \mathcal{B})$ est mesurable donc il existe $\mathfrak{Q} \in \mathcal{A}$, $P(\mathfrak{Q}) = 1$

tel que (hof) $(\mathcal{Q}) = B \in \mathcal{B}$. Posons $\mathcal{Q}' = f(\mathcal{Q})$. On a $h(\mathcal{Q}') = B \in \mathcal{B}$ donc l'ensemble $\mathcal{Q}'_1 = h^{-1}[h(\mathcal{Q}')] \in \mathcal{A}'$ et $h(\mathcal{Q}'_1) = h(\mathcal{Q}') \in \mathcal{B}$. D'autre part $\mathcal{Q}'_1 \supset f(\mathcal{Q})$ implique $f^{-1}(\mathcal{Q}'_1) \supset f^{-1}[f(\mathcal{Q})] \supset \mathcal{Q}$, donc $P_f(\mathcal{Q}'_1) = 1$. Ainsi pour toute application réelle mesurable h de $(\Omega', \mathcal{A}')$ dans $(R, \mathcal{B})$ il existe $\mathcal{Q}'_1 \in \mathcal{A}'$ tel que $P_f(\mathcal{Q}'_1) = 1$ et $h(\mathcal{Q}'_1) \in \mathcal{B}$. P_f est donc parfaite.

2-2. Remarques. — On déduit immédiatement de la proposition précédente deux propriétés classiques des probabilités parfaites :

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Si P est parfaite la restriction de P à toute sous-tribu de $\mathcal{A}$ est parfaite.

2. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans Ω telle que la partition associée à $\mathcal{R}$ soit composée d'ensembles mesurables. Soient i l'injection canonique de Ω dans $\Omega/\mathcal{R}$, $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ la tribu la plus fine sur $\Omega/\mathcal{R}$ rendant i mesurable, et $P_{\mathcal{R}}$ la probabilité sur $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ définie pour tout $D \in \mathcal{A}/\mathcal{R}$ par $P_{\mathcal{R}}(D) = P[i^{-1}(D)]$. Si P est parfaite sur $\mathcal{A}$, $P_{\mathcal{R}}$ est parfaite sur $\mathcal{A}/\mathcal{R}$.

3-1. Définition [9]. — Soit $\{ A_n \}$ $n = 1, 2, \ldots$ une suite de parties d'un ensemble Ω. La fonction caractéristique de la suite $\{ A_n \}$ est l'application h de Ω dans l'ensemble de Cantor, définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$h(\omega) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\omega)}{3^i}$$

où φ_i est la fonction indicatrice de l'ensemble A_i.

3-2. Théorème. — Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable où $\mathcal{A}$ est une tribu de type dénombrable. Pour que toute probabilité sur $\mathcal{A}$ soit parfaite il est nécessaire que pour toute suite $\{ A_n \}$ $n = 1, 2, \ldots$ engendrant $\mathcal{A}$, et suffisant que pour une suite $\{ A_n \}$ $n = 1,2, \ldots$ engendrant $\mathcal{A}$, l'image de Ω par la fonction caractéristique de la suite $\{ A_n \}$ soit universellement mesurable.

Démonstration. — *a)* Condition suffisante : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{A}$ étant la tribu engendrée par une suite $\{ A_n \}$ $n = 1, 2, \ldots$ de parties de Ω. La fonction caractéristique h de la suite $\{ A_n \}$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(R, \mathcal{B})$ et par hypothèse $h(\Omega)$ est universellement mesurable. Si P_h est la probabilité image de P sur $\mathcal{B}$ on a donc

$$h(\Omega) = B + N \quad \text{avec} \quad B \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad P_h^*(N) = 0$$

(P_h^* étant la probabilité extérieure associée à P_h).

Modulo un ensemble négligeable, h est un isomorphisme de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sur $(\mathrm{B}, \mathcal{B} \cap \mathrm{B}, \mathrm{P}_h)$ et, comme P_h est parfaite sur $\mathcal{B} \cap \mathrm{B}$, P est parfaite sur $\mathcal{A}$ d'après [7].

b) Condition nécessaire : Soient $\{ \mathrm{A}_n \}$ une suite de parties de Ω engendrant la tribu $\mathcal{A}$, h la fonction caractéristique de cette suite, et μ une mesure de Stieltjes-Lebesgue sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de la droite réelle.

Posons $h(\Omega) = \mathrm{Y}$. On peut supposer $\mu^*(\mathrm{Y}) > 0$. Il existe $\mathrm{F} \in \mathcal{B}$ tel que

$$\mathrm{F} \supset \mathrm{Y} \qquad \text{et} \qquad \mu(\mathrm{F}) = \mu^*(\mathrm{Y}).$$

La probabilité μ_1 trace de la mesure μ sur F est parfaite et

$$\mu_1^*(\mathrm{Y}) = \frac{\mu^*(\mathrm{Y})}{\mu(\mathrm{F})} = 1.$$

Considérons la probabilité $\mu_{1\mathrm{Y}}$ trace sur Y de la probabilité μ_1, c'est-à-dire la probabilité sur $\mathrm{Y} \cap \mathcal{B}$ définie pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ par

$$\mu_{1\mathrm{Y}}(\mathrm{Y} \cap \mathrm{B}) = \mu_1^*(\mathrm{Y} \cap \mathrm{B}) = \frac{\mu^*(\mathrm{Y} \cap \mathrm{B})}{\mu(\mathrm{F})}.$$

On sait que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $h(\mathrm{A}) \in \mathrm{Y} \cap \mathcal{B}$. On pose alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mu_{1\mathrm{Y}}[h(\mathrm{A})]$. P est une probabilité parfaite par hypothèse. D'autre part on peut considérer $\mu_{1\mathrm{Y}}$ sur Y comme la probabilité image de P car si

$$\mathrm{E} \in \mathrm{Y} \cap \mathcal{B}, \quad \mathrm{P}[h^{-1}(\mathrm{E})] = \mu_{1\mathrm{Y}}\{ h[h^{-1}(\mathrm{E})] \} = \mu_{1\mathrm{Y}}(\mathrm{E}).$$

$\mu_{1\mathrm{Y}}$ est donc une probabilité parfaite d'après la proposition 2-1. Cela entraîne d'après [8] (théorème 2) que, pour toute application mesurable f de $(\mathrm{F}, \mathrm{F} \cap \mathcal{B})$ dans $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$, $f^{-1}[f(\mathrm{Y})]$ appartient à la tribu quotient $\mathrm{F} \cap \mathcal{B}/\mathcal{R}$ complétée par rapport à la probabilité quotient $\mu_{1\mathcal{R}}$ (pour la relation d'équivalence $x_1 \mathcal{R}\, x_2 \leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$). En particulier si on prend pour f l'application identique de F dans R, on voit que Y appartient à la complétée de $\mathrm{F} \cap \mathcal{B}$ par rapport à μ_1, donc à la complétée de $\mathcal{B}$ par rapport à μ.

Remarque 1. — Ce théorème apporte une solution définitive au problème posé par Blackwell [*1*] en 1956 de savoir si tout espace mesurable parfait de type dénombrable est un espace de Lusin (au sens de Blackwell), problème auquel Sasonov avait répondu négativement par un contre-exemple [*8*].

Remarque 2. — Dans le théorème précédent on peut remplacer probabilité parfaite par probabilité compacte puisque ces notions sont équivalentes dans le cas de tribu de type dénombrable.

Remarque 3. — Du théorème précédent et du fait qu'une probabilité P sur une tribu $\mathcal{A}$ est parfaite si et seulement si sa restriction à toute sous-tribu de type dénombrable de $\mathcal{A}$ est compacte [*7*] on déduit immédiatement :

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une condition suffisante pour que toute probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ soit parfaite est que pour toute suite $\{ A_n \}$ $n = 1, 2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{A}$, l'image de Ω par la fonction caractéristique de la suite $\{ A_n \}$ soit universellement mesurable.

Remarque 4. — Du théorème 3-2 et des propriétés de la fonction caractéristique d'une suite d'ensembles on déduit immédiatement le résultat classique : toute probabilité sur la tribu borélienne d'un espace polonais éparpillé est compacte.

4-1. Définition (2). — On dit qu'un espace topologique F est un espace lusinien s'il est séparé et s'il existe un espace polonais éparpillé E et une application continue bijective de E sur F.

4-2. Proposition. — Toute probabilité sur la tribu borélienne d'un espace lusinien est compacte.

Démonstration. — Soient F un espace lusinien et P′ une probabilité sur la tribu borélienne de F. Il existe un espace polonais éparpillé E et une application continue bijective f de E sur F. Un espace polonais éparpillé étant en particulier lusinien tout borélien B de E est un sous-espace lusinien de E donc $f(B)$ est un borélien de F [*2*].

Sur la tribu borélienne de E, f étant bijective on peut poser $P(B) = P'[f(B)]$. La probabilité P est parfaite (remarque 3 précédente) et pour tout borélien-A de F on a $P[f^{-1}(A)] = P' \{f[f^{-1}(A)]\} = P'(A)$. La probabilité P′ est donc image de P par l'application mesurable f et P étant parfaite P′ est parfaite. D'autre part la tribu borélienne de F est de type dénombrable puisque f est bijective et bimesurable. La probabilité P′ est donc compacte.

5-1. Théorème de Kolmogorov. — Soit une famille de probabilités $P_{t_1 \ldots t_n}$ définies sur les produits finis $\left(\prod_{i=1}^{n} \Omega_{t_i}, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{t_i}\right)$ d'une famille quelconque $\{ (\Omega_t, \mathcal{A}_t) ; t \in T \subset R \}$ d'espaces mesurables et telle que, si $T_1 \subset T_2$ sont deux sous-ensembles finis de T la restriction de P_{T_2} à $\bigotimes_{T_1} \mathcal{A}_t$ vaut P_{T_1}. Si pour tout $t \in T$ la probabilité P est parfaite, il existe une probabilité unique sur l'espace produit $\left(\prod_{T} \Omega_t, \bigotimes_{T} \mathcal{A}_t\right)$ qui prolonge chacune des probabilités $P_{t_1 \ldots t_n}$.

Démonstration. — Dans le cas où les probabilités P_t sont compactes, ce théorème se trouve dans [*6*]. On se ramène facilement à ce cas en utilisant la propriété des probabilités parfaites rappelée dans la remarque 3-3 et en remarquant que

$$\bigotimes_T \mathcal{A}_t = \bigcup_{\mathcal{B}_t, S} (\bigotimes_{t \in S} \mathcal{B}_t),$$

la réunion étant prise lorsque $\mathcal{B}_t$ parcourt les sous-tribus de type dénombrable de $\mathcal{A}_t$ et S les parties dénombrables de T.

Cette égalité qui nous a été suggérée par M. J. Neveu résulte du fait que le deuxième membre est une tribu contenant les pavés mesurables et contenue dans $\bigotimes_T \mathcal{A}_t$. On en déduit immédiatement que toute sous-tribu de type dénombrable de $\bigotimes_T \mathcal{A}_t$ est contenue dans un produit $\bigotimes_S \mathcal{B}_s$ où S est une partie dénombrable de T et $\mathcal{B}_s$ une sous-tribu de type dénombrable de $\mathcal{A}_s$.

Remarque 1. — Il résulte de la démonstration précédente que la probabilité obtenue sur l'espace produit est parfaite, ce qui généralise le résultat de Ryll-Nardzewski dans [*7*].

Remarque 2. — Du théorème précédent et de la remarque 2-2-1 on déduit immédiatement que le théorème de Kolmogorov s'énonce aussi pour la famille $(\Omega_t, \mathcal{E}_t, P'_t)$ où $\mathcal{E}_t$ est une sous-tribu quelconque de $\mathcal{A}_t$ et P'_t la restriction de P_t à $\mathcal{E}_t$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Blackwell D., *Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium of mathematical statistics and probability.* Vol. II, 1956, p. 1-6.

[*2*] Bourbaki N., *Top. Gen.*, Chap. 9, § 6, n° 4 (il est à remarquer que les résultats de ce paragraphe restent valables si l'on supprime l'hypothèse de métrisabilité).

[*3*] Marczewski E., On compact measures. *Fund. Mat.*, t. 40, 1953, p. 113-124.

[*4*] Marczewski E. et Ryll-Nardzewski C., Projections in abstract sets. *Fund. Mat.*, t. 40, 1953, p. 160-164.

[*5*] Marczewski E. et Ryll-Nardzewski C., Remarks on the compactness and non direct products of measures. *Fund. Mat.*, t. 40, 1953, p. 165-170.

[*6*] Neveu J., *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1964, p. 78 et 79.

[*7*] Ryll-Nardzewski C., On quasi compact measures. *Fund. Mat.*, t. 40, 1953, p. 125-130.

[*8*] Sasonov V. V., *Sur les mesures parfaites.* Publications de la 6e conférence sur la théorie des probabilités et des statistiques mathématiques (en russe), Vilnus, 1960.

[*9*] Szpilrajn E., The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications. *Fund. Mat.*, t. 31, 1938, p. 207-229.

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1965).