ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

SALAH AHMAD

Éléments aléatoires dans les espaces vectoriels topologiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 2 (1965-1966), p. 95-135
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1965__2_2_95_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. II, nº 2, 1965, p. 95-135. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Éléments aléatoires dans les espaces vectoriels topologiques

par

Salah AHMAD

CHAPITRE PREMIER

§ 1. ÉLÉMENTS ALÉATOIRES DANS UN ESPACE VECTORIEL

1. Préliminaires.

Dans tout ce travail, nous ne considérons que des espaces vectoriels réels. L'extension des résultats aux espaces vectoriels complexes ne présente aucune difficulté.

On dit qu'une partie M d'un espace vectoriel E est équilibrée, si pour tout $x \in M$, et tout $\lambda \in R$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$, on a : $\lambda x \in M$. Soit A et B, deux parties de E. On dit que A absorbe B s'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\lambda A \supset B$ pour $\lambda \geqslant \alpha$. Une partie A de E est dite absorbante, si elle absorbe toute partie réduite à un point. On dit qu'une partie B d'un espace vectoriel topologique E est bornée si elle est absorbée par tout voisinage de 0 dans E. Si M désigne une partie d'un espace topologique, nous noterons par $\overline{M}$ et $\overset{\circ}{M}$, son adhérence et son intérieur respectivement.

On dit qu'un espace vectoriel topologique est localement convexe si sa topologie est définie par une famille de semi-normes. Si E désigne un espace vectoriel localement convexe, nous désignerons par E′ son dual (l'espace de toutes les formes linéaires continues sur E), par E* son dual algébrique, par E$''$ son bidual (l'espace de toutes les formes linéaires continues sur E$'$ lorsqu'on munit ce dernier de la topologie forte : topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de E). E s'identifie en tant qu'espace sans topologie à un sous-espace de E$''$ qui s'identifie lui-même à un sous-espace de E$'^*$.

Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle x', x \rangle$, $x' \in G$, $x \in E$. C'est-à-dire :

1. — Quel que soit $x \neq 0$ dans E, il existe $x' \in G$ tel que

$$\langle x', x \rangle \neq 0.$$

2. — Quel que soit $x' \neq 0$ dans G, il existe $x \in E$ tel que

$$\langle x', x \rangle \neq 0.$$

Pour toute partie M de E, on appelle polaire de M dans G l'ensemble :

$$M^0 = \{ x' : x' \in G, \quad \langle x', x \rangle \leqslant 1 \quad \forall x \in M \}.$$

Nous désignerons par $\sigma(E, G)$ ou simplement σ, la topologie faible sur E relativement à la dualité entre E et G, par E_s l'espace E muni de la topologie faible. E_s est localement convexe séparé. Rappelons que $G = E'_s$ et $E = G'_s$.

Dans le cas où E est muni d'une topologie et $G = E'$, la topologie de E sera appelée topologie initiale. Toute topologie localement convexe séparée sur E, pour laquelle G reste le dual de E, sera appelée topologie compatible avec la dualité entre E et G. Nous désignerons par $\tau(E, G)$ la topologie la plus fine sur E compatible avec la dualité entre E et G : c'est la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties de G qui sont convexes, équilibrées et $\sigma(E, G)$-compactes. Signalons que si E et G sont deux espaces vectoriels en dualité, les ensembles bornés dans E sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la dualité entre E et G. Un espace localement convexe est dit tonnelé si tout ensemble convexe, équilibré, absorbant et fermé dans E est un voisinage de O. Tout espace localement convexe métrisable et complet (espace de Fréchet) et en particulier tout espace de Banach, est tonnelé.

Soit E un espace vectoriel localement convexe, E$''$ son bidual. Si E et E$''$ sont algébriquement identiques, nous dirons que E est semi-réflexif. Pour que E soit semi-reflexif, il faut et il suffit que pour la topologie $\sigma(E, E')$, toute partie fermée bornée de E soit compacte. On dit que E est réflexif, s'il est semi-reflexif et si la topologie initiale sur E est identique à la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E$'$. Pour que

E soit reflexif, il faut et il suffit qu'il soit tonnelé et que pour la topologie $\sigma(E, E')$, toute partie fermée et bornée de E soit compacte.

Soit E un espace vectoriel et soit $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-espaces vectoriels filtrante pour la relation $\subset$, pour chaque indice α, soit $\mathcal{T}_\alpha$ une topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de E_α, et telle que, si $E_\alpha \subset E_\beta$ la topologie induite sur E_α par $\mathcal{T}_\beta$ est moins fine que $\mathcal{T}_\alpha$. Soient φ_α l'application canonique de E_α dans E, $\mathcal{T}$ la topologie localement convexe la plus fine sur E, rendant continues les φ_α. $\mathcal{T}$ est par définition la limite inductive des topologies $\mathcal{T}_\alpha$. Si les E_α forment une suite croissante telle que $\mathcal{T}_\alpha$ soit égale à la topologie induite sur E_α par $\mathcal{T}_\beta$ pour tout $\beta > \alpha$, on dit alors que $\mathcal{T}$ est la limite inductive stricte des topologies $\mathcal{T}_\alpha$.

Dans un espace vectoriel topologique E, on dit qu'un ensemble $\mathfrak{B}$ de parties bornées est un système fondamental de parties bornées, si pour toute bornée A de E, il existe une partie $B \in \mathfrak{B}$ contenant A.

Une partie M d'un espace localement convexe E est dite totale si le sous-espace engendré par M est partout dense dans E. Pour plus de détails, consulter [*2*], [*3*] et [*4*].

Soit E un ensemble quelconque muni de la topologie $\mathcal{T}$. Nous désignerons par $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ la σ-algèbre des ensembles de Baire : c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre pour laquelle toutes les fonctions numériques continues dans E sont mesurables et par $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}}$ la σ-algèbre des ensembles de Borel : c'est-à-dire la σ-algèbre engendrée par les ouverts de $\mathcal{T}$. Dans le cas où $E = R_n$, nous désignerons par $\mathcal{B}^n$ la σ-algèbre des ensembles boréliens de R^n.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désignera toujours un espace de probabilité. Toute application $\xi : \Omega \to R$ qui est $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$-mesurable est par définition une variable aléatoire.

2. Éléments aléatoires dans un espace vectoriel.

Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle x', x \rangle$, $\mathcal{E}_G$ la σ-algèbre engendrée par la classe des sous-ensembles de la forme :

$$\{ x : x \in E, \quad \langle x', x \rangle < \alpha \}$$

lorsque α parcourt la droite réelle et x' l'espace G.

Désignons, pour toute partie A' de G, par :

$$X'_{A'} : E \to R^{A'}$$

l'application qui fait correspondre à tout $x \in E$ l'élément :

$$(\langle x', x \rangle)_{x' \in A'} \in R^{A'}.$$

Dans le cas où $A' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, on écrit X'_n au lieu de $X_{A'}$. Autrement dit, l'application $X_{A'}$ n'est autre chose que l'application projection de E (identifié à un sous-espace de R^G) dans $R^{A'}$. Il est évident que quel que soit $B \in \mathcal{B}^n$ et quelle que soit la suite finie $(x'_1, \ldots, x'_n)$ on a :

$$\overset{-1}{X'_n}(B) \in \mathcal{E}_G.$$

Les ensembles de ce genre seront appelés ensembles cylindriques de $\mathcal{E}_G$. Ils forment une algèbre $\mathcal{C}_G$ qui engendre $\mathcal{E}_G$. Notons en passant, que pour tout x, on a : $x + \mathcal{E}_G = \mathcal{E}_G$ et que si $B \in \mathcal{E}_G$, il existe une suite dénombrable S' qui dépend de B, telle que $B \in \mathcal{E}_{S'}$, où $\mathcal{E}_{S'}$ désigne la σ-algèbre engendrée par les ensembles de la forme :

$$\{ x : \langle x', x \rangle < \alpha \} \qquad x' \in S', \qquad \alpha \in R.$$

DÉFINITION 1. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité. Toute application :

$$\xi : \Omega \to E$$

qui est $\mathcal{F}$-$\mathcal{E}_G$-mesurable, est par définition un $\mathcal{E}^G$-élément aléatoire ou simplement un élément aléatoire dans E, s'il n'y a aucune confusion à craindre.

Proposition 1. — Une application ξ de Ω dans E est un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire si et seulement si $\langle x', \xi \rangle$ est une variable aléatoire, $\forall x' \in G$.

Proposition 2. — Si ξ_1, ξ_2 sont deux $\mathcal{E}_G$-éléments aléatoires, alors $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ est un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$. Autrement dit, l'espace Ξ des $\mathcal{E}_G$-éléments aléatoires forme un espace vectoriel.

La démonstration de ces deux propositions est immédiate.

Proposition 3. — Soit (ξ_n) une suite de $\mathcal{E}_G$-éléments aléatoires telle que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(\xi_n(\omega))$ converge vers $\xi(\omega) \in E$ pour la topologie faible, alors ξ est un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire.

En effet, $\forall x' \in G$, on a :

$$\{ \omega : \langle x', \xi(\omega) \rangle < \alpha \} = \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{i \geq n} \left\{ \omega : \langle x', \xi_i(\omega) \rangle < \alpha - \frac{1}{K} \right\} \in \mathcal{E}_G.$$

REMARQUE. — La proposition 3 reste valable si la topologie $\sigma(E, G)$ est remplacée par une topologie plus fine qu'elle, et en particulier par une topologie quelconque compatible avec la dualité entre E et G.

Proposition 4. — Soient E et G deux espaces vectoriels en dualité. S'il existe un sous-ensemble C de G, tel que tout élément de G soit la limite d'une sous-suite de C (pour une topologie compatible avec la dualité entre E et G), alors :

$$\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_C.$$

En effet, soit x' un élément quelconque de G et soit (x'_n) la sous-suite de C qui converge vers x'. On vérifie facilement que :

$$\{ x : \langle x', x \rangle < \alpha \} = \bigcup_{k \geqslant 1} \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{i \geqslant n} \left\{ x : \langle x'_i, x \rangle < \alpha - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{E}_C.$$

Exemples. — 1) E est le dual d'un espace métrisable et séparable G. On peut prendre pour C une suite partout dense dans G. 2) E est l'espace $\mathfrak{D}'$ des distributions qui est le dual de l'espace $\mathfrak{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans R^n, muni de la topologie habituelle. $\mathfrak{D}$ n'est pas métrisable, mais il y existe une suite qui vérifie la condition de la proposition 4 [*22*].

DÉFINITION 2. — *Éléments aléatoires négligeables et scalairement négligeables* [*6*]. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, $\xi : \Omega \to E$ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire.

a) S'il existe un $H \in \mathcal{F}$ tel que $P(H) = 1$ et $\xi(\omega) = 0$, $\forall \omega \in H$, nous dirons que ξ est négligeable.

b) Si $\forall x' \in G$ la variable aléatoire $\langle x', \xi \rangle = 0$ presque partout, nous dirons que ξ est scalairement négligeable.

Il est évident que $a \Rightarrow b$. Réciproquement, on a la proposition suivante.

Proposition 5. — S'il existe une partie dénombrable T', totale dans G pour une topologie $\mathcal{T}$ compatible avec la dualité entre G et E, alors tout $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire scalairement négligeable est négligeable.

Posons :

$$A_{x'} = \{ \omega : \langle x', \xi(\omega) \rangle = 0 \}. \qquad x' \in G$$

On a :

$$P\Big(\bigcap_{x' \in T'} A_{x'}\Big) = 1.$$

Soit maintenant $\omega \in \bigcap_{x' \in T'} A_{x'}$. T' étant totale dans $(G, \mathcal{T})$ et $\langle x', \xi(\omega) \rangle$ une application linéaire continue sur $(G, \mathcal{T})$ telle que $\langle x', \xi(\omega) \rangle = 0$ sur T', on en déduit que $\langle x', \xi(\omega) \rangle = 0$ partout dans G, d'où :

$$\bigcap_{x' \in G} A_{x'} = \bigcap_{x' \in T'} A_{x'} \in \mathcal{E}_G \qquad \text{et} \qquad P\Big(\bigcap_{x' \in G} A_{x'}\Big) = 1.$$

3. Quelques considérations topologiques.

Soit E et G deux espaces vectoriels en dualité. Il est très important de connaître les relations qui peuvent exister entre $\mathcal{E}_G$ et les topologies compatibles avec la dualité entre E et G.

Soit E un espace localement convexe séparé, E' son dual. Il y a lieu de considérer sur E plusieurs topologies compatibles avec la dualité entre E et E', notamment :

1) La topologie initiale dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les ensembles de la forme :

$$W_{\alpha,Q'} = \{ x : \sup_{x' \in Q'} | \langle x', x \rangle | \leqslant \alpha \}$$

où Q' est un sous-ensemble de E', équicontinu dans (E, $\mathcal{T}$).

2) La topologie affaiblie $\sigma(E, E')$ dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les ensembles :

$$W(x'_1, \ldots, x'_n ; \alpha) = \{ x : \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} < | x'_i, x | \leqslant \alpha \}.$$

Il y a lieu de considérer aussi d'autres topologies.

Il est évident que tout $W(x'_1, \ldots, x'_n ; \alpha)$ est un ensemble cylindrique, qui appartient donc à $\mathcal{E}_{E'}$. Mais comme $x + \mathcal{E}_{E'} = \mathcal{E}_{E'}$, on en conclut que $\mathcal{E}_{E'}$ contient une base de $\sigma(E, E')$.

Proposition 1. — Soit E un espace localement convexe séparararable, E' son dual. S'il existe une partie totale dénombrable dans E, alors $\mathcal{E}_{E'}$ contient une base de la topologie initiale $\mathcal{T}$ de E.

En effet, l'existence d'une partie totale dénombrable dans E implique que toute partie équicontinue de E' est relativement compacte et métrisable pour $\sigma(E', E)$ [*4*, p. 66, prop. 3]. Donc quelle que soit la partie équicontinue Q' de E', il existe une suite (x'_n) partout dense dans Q' pour $\sigma(E', E)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} W_{\alpha,Q'} &= \{ x : \sup_{x' \in Q'} | \langle x', x \rangle | \leqslant \alpha \} \\ &= \{ x : \sup_{i \geqslant 1} | \langle x'_i, x \rangle | \leqslant \alpha \} \in \mathcal{E}_{E'}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE. — Si E est métrisable séparable, en particulier si E est un espace de Fréchet séparable ; alors, $\mathcal{T}$ étant la topologie de E, on a :

$$\mathcal{E}_{E'} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}}.$$

En effet, d'après la proposition 1, $\mathcal{E}_{E'}$ contient une base de $\mathcal{T}$ et comme tout ouvert de $\mathcal{T}$ est réunion dénombrable d'éléments d'une base, $\mathcal{E}_{E'}$ contient tout ouvert de $\mathcal{T}$. Ce qui achève la démonstration.

Proposition 2. — Soit E le dual d'un espace vectoriel localement convexe séparable G. Alors toute partie $\sigma(E, G)$-compacte est $\mathcal{E}_G$-mesurable.

Il suffit de démontrer que si V′ est un voisinage de 0 dans G, $V'^0 \in \mathcal{E}_G$. En effet V'^0 est équicontinu [*4*, p. 64, prop. 1]. Par conséquent, il est $\sigma(E, G)$-relativement compact [*4*, p. 65, prop. 2]. Mais V'^0 est $\sigma(E, G)$-fermé [*4*, p. 52, prop. 2], donc compact et métrisable pour $\sigma(E, G)$ [*4*, p. 66, prop. 3]. D'autre part, on sait que $\mathcal{E}_G$ contient une base de $\sigma(E, G)$ [prop. 1] et que tout ensemble $\sigma(E, G)$-compact est contenu dans un V'^0 [*4*, p. 64 et 65, prop. 1 et 2], d'où $V'^0 \cap \mathcal{E}_G$ contient tous les ensembles boréliens de V'^0 [*11*, p. 221].

Or, si A′ désigne une partie dénombrable dense dans V′, on obtient :

$$V'^0 = \bigcap_{x' \in V'} \{ x : \langle x', x \rangle \leqslant 1 \} = \bigcap_{x' \in A'} \{ x : \langle x', x \rangle \leqslant 1 \} \in \mathcal{E}_G.$$

Ce qui achève la démonstration.

Soit maintenant E le dual d'un espace normé séparable G. La fonction $\| x \| = \sup_{\|x'\|=1} | \langle x', x \rangle |$ est $\mathcal{E}_G$-mesurable et toutes les boules appartiennent à $\mathcal{E}_G$, bien que E muni de la topologie forte n'est pas nécessairement séparable.

Lemme de Sazanov [*19*, p. 407]. — Soient E et G deux espaces vectoriels en dualité, $\mathcal{T}$ une topologie sur E plus fine que $\sigma(E, G)$. Si (C_n) est une sous-suite croissante de sous-ensembles $\mathcal{T}$-compacts de E et si $C = \cup C_n$, alors :

$$\mathcal{E}_G \cap C = \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \cap C.$$

La démonstration de ce lemme s'effectue facilement en remarquant que les C_n sont aussi $\sigma(E, G)$-compacts, que $\mathcal{E}_G$ contient une base de la topologie $\sigma(E, G)$ et que sur un ensemble K, toutes les topologies $\mathcal{T}$, comparables, pour lesquelles $(K, \mathcal{T})$ est compact, sont identiques.

Ce lemme permet de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3. — Soit E le dual d'un espace de Fréchet G. Si on désigne par $\mathcal{T}_c$ la topologie de la convergence uniforme dans les parties compactes de G, alors :

$$\mathcal{E}_G = \mathcal{B}_{\mathcal{T}_c} = \mathcal{B}_\sigma.$$

Si en plus G est séparable, alors on a :

$$\mathcal{E}_G = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}_c}.$$

En effet E est la réunion d'une suite croissante d'ensembles $\sigma(E, G)$-compacts et $\mathcal{T}_c$-compacts [*4*, p. 64]. Il reste à appliquer le lemme de Sazanov.

Dans le cas où G est séparable, on sait que E est la réunion d'une suite croissante (C_n) de parties $\mathcal{T}_c$-compactes et métrisables, donc :

$$\mathcal{E}_G \cap C_n = \mathcal{B}_{\mathcal{T}_c} \cap C_n = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}_c} \cap C_n$$

d'où, si $A \in \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}_c}$, on obtient pour tout n :

$$A \cap C_n = A_n \cap C_n \qquad \text{pour un} \qquad A_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}_c} = \mathcal{E}_G.$$

Mais il est facile de vérifier que :

$$A = \bigcup_{i \geqslant 1} \bigcap_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{E}_G.$$

Ce qui achève la démonstration.

4. Loi d'un élément aléatoire dans E.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité et $\xi : \Omega \to E$ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire. Désignons par m la mesure $P\xi^{-1}$ définie sur $(E, \mathcal{E}_G)$ de la manière suivante :

$$m(A) = P(\xi^{-1}(A)) \qquad \forall A \in \mathcal{E}_G.$$

Nous dirons que m et $\mathcal{E}_G$ déterminent la loi de ξ.

DÉFINITION 1. — *Indépendance stochastique.* — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, $(\xi_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de $\mathcal{E}_G$-éléments aléatoires dans E. Soient I_1, I_2 deux parties quelconques de I, $\mathcal{F}_{I_i}$ $(i = 1, 2)$ la σ-algèbre engendrée par

$$\bigcup_{\iota \in I_i} \xi^{-1}(\mathcal{E}_G).$$

Nous dirons que $(\xi_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de $\mathcal{E}_G$-éléments aléatoires indépendants, si $\mathcal{F}_{I_1}$ et $\mathcal{F}_{I_2}$ sont indépendantes chaque fois que $I_1 \cap I_2 = \varnothing$.

DÉFINITION 2. — Soit (ξ_i) une suite d'éléments aléatoires dans un espace localement convexe. On dit que (ξ_i) est stationnaire si :

$$(\xi_i, \ldots, \xi_m) \quad \text{et} \quad (\xi_{i+p}, \ldots, \xi_{m+p})$$

ont la même loi $\forall i$, m et p.

§ 2. ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE D'UN ÉLÉMENT ALÉATOIRE

DÉFINITION 1. — Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, et ξ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire dans E. Nous dirons que ξ est scalairement intégrable, si $\forall x' \in G$, $E\langle x', \xi\rangle$ existe [*6*].

L'application :

$$I_\xi : G \to R$$

qui fait correspondre à tout $x' \in G$ la valeur $E\langle x', \xi\rangle$, est par définition l'intégrale de ξ. I_ξ est une forme linéaire sur G, donc $I_\xi \in G^*$. Si $I_\xi \in E$ (identifié à un sous-espace de G), nous dirons que I_ξ est l'espérance mathématique de ξ et nous la noterons $E(\xi)$. $E(\xi)$ est donc, le seul élément de E, s'il existe, qui vérifie la relation suivante :

$$\langle x', E\xi\rangle = E\langle x', \xi\rangle \qquad \forall x' \in G.$$

Cette définition coïncide avec celle de Mourier [*15*] dans le cas où E est un espace de Banach et $G = E'$. En effet, dans ces deux cas, les deux définitions coïncident avec celle de l'intégrale de Pettis.

Proposition 1. — Si $E\xi_1$, $E\xi_2$ existent, alors $E(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)$ existe $\forall\alpha_1, \alpha_2 \in R$, et est égale à $\alpha_1 E\xi_1 + \alpha_2 E\xi_2$.

En effet $\forall x' \in G$, $E\langle x', \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2\rangle$ existe et est égale à $\alpha_1 E\langle x', \xi_1\rangle + \alpha_2 E\langle x', \xi_2\rangle$. L'application :

$$x' \to E\langle x', \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2\rangle$$

est donc la somme des deux applications $\alpha_1 E\xi_1$, $\alpha_2 E\xi_2$ qui appartiennent toutes deux à E, donc elle appartient elle-même à E. Ce qui achève la démonstration.

Nous allons démontrer une proposition qui permet, dans plusieurs cas, de se ramener, dans l'étude de l'espérance mathématique d'un élément aléatoire dans un espace vectoriel, à l'étude d'un élément aléatoire dans R .

Proposition 2. — Soit E et G deux espaces vectoriels en dualité, $x_0 \in G$, et H′ une base algébrique de G. Une condition nécessaire et suffisante pour que $x_0 \in E$, est l'existence d'une partie $K \subset E$, compacte pour la topologie $\sigma(E, G)$ et telle que :

$$X'_A(x_0) = (\langle x', x_0\rangle)_{x' \in A'} \in X'_{A'}(K)(\subset R^{A'})$$

quelle que soit la partie finie A′ de H′.

La condition est nécessaire. En effet, il suffit de prendre pour K l'ensemble formé du seul élément x_0.

La condition est suffisante. En effet, soit K une partie de E qui est $\sigma(E, G)$-compacte de E, qui vérifie la condition de la proposition, et H' une base algébrique de G. Désignons pour toute partie finie A' de H', par $C_{A'}$, l'ensemble :

$$C_{A'} = K \cap \{ x : \langle x', x \rangle = \langle x', x_0 \rangle \quad \forall x' \in A' \}.$$

Il est évident que $C_{A'}$ est un sous-ensemble de E, qui est non vide et $\sigma(E, G)$-fermé (par hypothèse).

Soit $A'_1, \ldots, A'_n$ un nombre fini quelconque de parties finies de H', et soit $A' = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A'$. Il est évident que :

$$\varnothing \neq C_{A'} = C_{A'_1} \cap \ldots \cap C_{A'_n}.$$

Les $C_{A'}$ forment donc une famille de fermés dans le compact K, telle qu'un nombre fini d'éléments de cette famille admet une intersection non vide. Par conséquent, leur intersection est elle-même non vide. Soit x un élément de E qui appartient à cette intersection. On a :

$$\langle x', x \rangle = \langle x', x_0 \rangle \qquad \forall x' \in H'.$$

Donc $x = x_0$. Ce qui achève la démonstration.

Proposition 3. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, $\xi : \Omega \to E$ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire dans E qui est scalairement intégrable, I_ξ l'intégrale de ξ, et H' une base algébrique de G. Une condition nécessaire et suffisante pour que $E\xi$ existe est l'existence d'une partie K de E compacte pour la topologie $\sigma(E, G)$, et telle que :

$$X'_{A'}(I_\xi) = (E \langle x', \xi \rangle)_{x' \in A'} \in X'_{A'}(K) \quad (\subset R^{A'})$$

quelle que soit la partie finie A' de H'.

En effet, la condition de la proposition signifie que $I_\xi \in E$ (proposition 2). Ce qui achève la démonstration.

REMARQUES. — 1) Soit P une mesure positive bornée, qui n'est pas nécessairement une probabilité et ξ une application $\mathcal{F}$-$\mathcal{E}_G$-mesurable. Si I_ξ désigne l'intégrale de ξ (définie de la même manière que l'intégrale d'un élément aléatoire) et si :

$$X'_{A'}(I_\xi) = \left(\int \langle x', \xi \rangle \, dP \right)_{x' \in A'} \in X'_{A'}(K)$$

(K étant un sous-ensemble de $E\sigma(E, G)$-compact) quelle que soit la partie finie A′ de H′, alors $I_\xi \in E$.

2) Soit $(x'_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments de G, et soit $(a_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de nombres réels, qui a le même ensemble d'indices, alors on peut démontrer, en procédant comme pour la démonstration de la proposition 2, qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $x_0 \in E$ tel que $\langle x'_\iota, x_0 \rangle = a_\iota \forall x'_\iota$, est l'existence d'un ensemble $\sigma(E, G)$-compact K de E, tel que l'on ait, pour toute partie finie I_1 de I :

$$(a_\iota)_{\iota \in I_1} \in X'_{A'}(K)$$

où A′ est la sous-famille $(x'_\iota)_{\iota \in I_1}$.

Proposition 4. — Si ξ est un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire tel que ξ appartient presque certainement à une partie K de E, convexe et faiblement compacte alors $E\xi$ existe et appartient à K.

En effet, quelle que soit la suite $(x'_1, ..., x'_n)$ d'éléments de G, $X'_n(\xi)$ appartient p. c. au sous-ensemble convexe et compact $X'_n(K)$ de R^n. ξ est donc scalairement intégrable et

$$EX'_n(\xi) = (E \langle x'_i, \xi \rangle)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in X'(K).$$

Il ne reste qu'à appliquer la proposition 3.

Cette proposition généralise le fait bien connu qu'un point aléatoire dans R^n essentiellement borné admet une espérance mathématique. Cette proposition peut être démontrée directement [*6*].

REMARQUE. — Si P est une mesure positive bornée, et si ξ est une application $\mathcal{F}$-$\mathcal{E}_G$-mesurable telle que $\xi(\Omega)$ soit contenue dans un ensemble convexe et $\sigma(E, G)$-compact K de E, alors :

$$I_\xi \in P(\Omega)K.$$

Proposition 5. — Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels, en dualité, ξ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire laplacien qui détermine sur $\mathcal{E}_G$ la mesure de probabilité m et m^* la mesure extérieure induite par m sur l'ensemble des parties de E. S'il existe une suite croissante (C_n) de parties convexes et compactes dans E (pour une topologie compatible avec la dualité entre E et G) telle que : $m^*(\cup C_n) = 1$, alors $E\xi$ existe.

En effet l'existence d'une suite (C_n) vérifiant les conditions de la proposition implique que pour tout $\alpha : 0 < \alpha < 1$, il existe un n tel que :

$$(1) \qquad m\left[\overset{-1}{X'_{A'}}(X'_{A'},(C_n))\right] \geqslant \alpha$$

pour toute partie finie A′ de G (chap. II).

Prenons $\alpha > 1/2$ et considérons l'élément aléatoire laplacien :

$$X'_{A'}(\xi) \in R^{A'}.$$

On a d'après (1) :

$$\text{prob. } [X'_{A'}(\xi) \in X'_{A'}(C_n)] = m\left[\overset{-1}{X'_{A'}}(X'_{A'}(C_n))\right] > 1/2.$$

En remarquant que $X'_{A'}(C_n)$ est convexe et compacte dans $R^{A'}$, la démonstration s'achève en appliquant successivement le lemme suivant et la proposition 3.

Lemme. — Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un point aléatoire laplacien dans R^n. Si K est une partie convexe fermée dans R^n pour laquelle on a :

$$\text{prob. } [X \in K] > 1/2$$

alors $EX \in K$.

En effet, le point EX est le point central de la distribution de X dans R^n, c'est-à-dire que si π est un hyperplan passant par EX, il y a une probabilité égale à 1/2 pour que X soit au-delà de π.

Supposons que $EX \notin K$. Il existerait alors un hyperplan qui sépare strictement EX et K [*3*, p. 73], ce qui impliquerait que :

$$\text{prob. } [X \in K] \leqslant 1/2$$

d'où une contradiction. Ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Si ξ est scalairement intégrable, et est tel que pour toute partie finie A′ de G, le point $EX'_{A'}(\xi)$ est un point central de la distribution de $X'_{A'}(\xi)$, alors la proposition 5 reste valable même si ξ n'était pas laplacien.

Exemples. — 1) E est un espace de Fréchet séparable. En effet dans ce cas toute mesure positive bornée est portée par la réunion d'une suite de parties compactes [*11*, p. 40] et comme E est complet, on peut supposer les C_n convexes [*3*, p. 81].

2) E est un espace semi-réflexif avec m fortement tendue (chap. II).

3) E est un espace vectoriel, limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach réflexifs E_n.

En effet E est réflexif [*4*, p. 95, exerc. 17], et il admet un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés [*4*, p. 5], donc $\sigma(E, E')$-compacts.

4) E est le dual d'un espace de Fréchet G, muni de la topologie $\sigma(E, G)$. Dans ce cas, E est la réunion d'une suite croissante de parties convexes et $\sigma(E, G)$-compactes.

5) E est un espace de Banach réflexif. Ce n'est qu'un cas spécial du 4.

Cependant, dans les deux derniers cas, on peut généraliser la proposition 4, comme on va le voir dans la suite.

La proposition 2 donne lieu à quelques applications algébriques et topologiques. A titre d'exemple, nous allons démontrer une proposition qui généralise un théorème dû à Hahn [*13*, p. 23] et donner une démonstration simple du théorème de Mackey [*4*, p. 68].

Proposition 6. — Soit E un espace vectoriel localement convexe semi-réflexif, E' son dual et $(x'_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments de E', et $(a_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de nombres réels qui a le même ensemble d'indices. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $x \in E$, tel que $\langle x'_\iota, x \rangle = a_\iota$ pour tout ι, est l'existence d'un ensemble borné B dans E tel que l'on ait :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \right| \leqslant M = \sup_{x \in B} \left| \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x'_i, x \right\rangle \right|$$

pour toute sous-famille finie $(x'_1, \ldots, x'_n)$ de la famille $(x'_\iota)_{\iota \in I}$ et tout

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n.$$

La condition est nécessaire (évident).

La condition est suffisante. En effet, on ne restreint pas la généralité si on suppose B fermé, convexe et équilibré [*4*, p. 5], c'est-à-dire $\sigma(E, E')$-compact [*4*, p. 88].

Soit $(x'_1, \ldots, x'_n)$ une suite finie d'éléments de $(x'_\iota)_{\iota \in I}$, B étant équilibré, convexe et $\sigma(E, E')$-compact, son image par l'application linéaire continue $\sum_{i=1}^{n} \alpha x'$ dans R est l'intervalle fermé : $[-M, M]$, ce qui implique d'après les conditions de la proposition, que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in [-M, M]$$

par conséquent, il existe au moins un $x \in \mathrm{B}$, tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x'_i, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \qquad \forall \alpha \in \mathrm{R}^n.$$

Ce qui veut dire que tout hyperplan dans R^n qui passe par $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ rencontre $\mathrm{X}'_n(\mathrm{B})$. $\mathrm{X}'_n(\mathrm{B})$ étant convexe et compact dans R^n, cela revient à dire que :

$$(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathrm{X}'_n(\mathrm{B}).$$

Il suffit pour achever la démonstration d'appliquer la remarque 2 sur la proposition 3.

Remarques. — 1) Si E est le dual d'un espace tonnelé G, la proposition 6 reste vraie. En effet, dans un tel espace tout ensemble borné pour $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ est faiblement compact [*4*, p. 65].

2) Dans le cas d'un espace de Banach réflexif, la condition de la proposition 6 devient :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \right| \leqslant \mathrm{M} \, \| \Sigma \alpha_i x'_i \|$$

où M est un nombre positif.

3) Si E est un espace localement convexe quelconque, et si on remplace borné par compact, la proposition 6 reste valable.

Théorème de Mackey. — Soit E et G deux espaces vectoriels en dualité. Pour qu'une topologie localement convexe séparée $\mathcal{T}$ sur G soit compatible avec la dualité entre G et E, il faut et il suffit que $\mathcal{T}$ soit identique à une $\mathfrak{S}$-topologie, où $\mathfrak{S}$ est un recouvrement de E formé de parties convexes, équilibrées et compactes pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{G})$.

Soit $\mathfrak{S} = (\mathrm{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ une famille de sous-ensemble de E compacts, convexes et équilibrés, qui forme un recouvrement de E. $(\mathrm{B}_\alpha^0)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ forme un système fondamental de voisinages de O pour la $\mathfrak{S}$-topologie (topologie de la convergence uniforme sur les B_α). Soit x une application linéaire sur G, continue pour la $\mathfrak{S}$-topologie. Démontrons que $x \in \mathrm{E}$. Par hypothèse il existe un B_α^0 tel que $\langle x', x \rangle \leqslant 1, \forall x' \in \mathrm{B}_\alpha^0$. B_α^0 étant absorbant, $\mathrm{X}'_{\mathrm{A}'}(x) \in \mathrm{X}'_{\mathrm{A}'}(\mathrm{B}_\alpha)$ pour toutes les parties finies A′ de G, d'où $x \in \mathrm{B}_\alpha$ d'après la proposition 1.

La nécessité des conditions s'effectue comme d'habitude.

Proposition 7. — Soit E le dual d'un espace métrisable, tonnelé et séparable G et ξ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E\xi$ existe.

En effet, il existe une suite croissante (B_n) d'ensembles $\sigma(E, G)$-compacts et convexes [*3*, p. 66], qui forment un système fondamental d'ensembles bornés dans E. Les B_n sont en plus $\mathcal{E}_G$-mesurables [§ 1, 3].

Soit (ξ_n) une suite de $\mathcal{E}_G$-éléments aléatoires définis de la manière suivante :

$$\xi_n(\omega) = \xi(\omega) \quad \text{si} \quad \xi(\omega) \in B_n \quad \text{et} \quad \xi_n(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \xi(\omega) \notin B_n.$$

Il est évident que $E\xi_n$ existe pour tout n (proposition 4). Soit I_ξ l'intégrale de ξ et $x' \in G$. Il est facile de vérifier que :

$$\langle x', E\xi_n \rangle = E\langle x', \xi_n \rangle = \int_{\xi^{-1}(B_n)} \langle x', \xi \rangle \, dP \to E\langle x', \xi \rangle = \langle x', I_\xi \rangle$$

d'où $\cup \{ E\xi_n \}$ est faiblement borné, donc relativement compact et $I_\xi \in E$. Ce qui achève la démonstration.

Soit maintenant E le dual d'un espace localement convexe G, et ξ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire. Soit H un sous-espace de G, H^0 le sous-espace de E orthogonal à H. H et E/H^0 sont mis en dualité par la forme bilinéaire canonique :

$$\langle x', \dot{x} \rangle = \langle x', x \rangle \quad \text{où} \quad x' \in H, \dot{x} \in E/H^0 \quad \text{et} \quad x \in \dot{x}.$$

En plus la topologie $\sigma(H, E/H^0)$ est identique à la topologie induite sur H par la topologie $\sigma(G, E)$ [*4*, p. 54]. On peut donc identifier (algébriquement) E/H^0 à un sous-espace du dual M de H considéré comme sous-espace topologique de G. Soit $\mathcal{E}_H$ la σ-algèbre engendrée par les ensembles cylindriques de M, relativement à la dualité entre M et H, et soit

$$\xi_H : \Omega \to M$$

l'application qui fait correspondre à chaque ω la classe $\dot{\xi}(\omega) \in E/H^0$ ($\subset M$) de $\xi(\omega)$ suivant la relation d'équivalence déterminée par H^0 dans E. Il est évident que :

$$\{ \omega : \langle x', \xi_H(\omega) \rangle < \alpha \} = \{ \omega : \langle x', \xi(\omega) \rangle < \alpha \}, \ \forall x' \in H$$

d'où la conclusion que ξ_H est un $\mathcal{E}_H$-élément aléatoire dans M. D'autre part, si ξ est scalairement intégrable, on a :

$$\int \langle x', \xi_H \rangle \, dP = \int \langle x', \xi \rangle \, dP \qquad \forall x' \in H$$

ce qui implique que ξ_H est lui-même scalairement intégrable.

Désignons par $\mathcal{H}$ un ensemble de sous-espaces de G possédant la propriété suivante :

(P) Pour qu'un élément x de G^* appartient à E, il faut et il suffit que sa restriction à tout $H \in \mathcal{H}$ soit continue.

Proposition 8. — Soit E le dual d'un espace localement convexe G et ξ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire, et $\mathcal{H}$ un ensemble de sous-espaces de G possédant la propriété (P). Pour que $E\xi$ existe, il faut et il suffit que $E\xi_H$ existe pour tout $H \in \mathcal{H}$.

La condition est nécessaire : Supposons en effet que $E\xi$ existe, et soit $H \in \mathcal{H}$. Nous avons vu ci-dessus que ξ_H est scalairement intégrable. Désignons par θ_H la classe d'équivalence de $E\xi$ suivant H^0 et par I_{ξ_H} l'intégrale de ξ_H. On vérifie directement que pour tout $x' \in H$, on a :

$$\langle x', \theta_H \rangle = \langle x', E\xi \rangle = E\langle x', \xi \rangle = E\langle x', \xi_H \rangle = \langle x', I_{\xi_H} \rangle$$

ce qui implique que :

$$I_{\xi_H} = \theta_H \in E/H^0 \subset M.$$

La condition est suffisante : en effet, soit I_ξ, l'intégrale de ξ et supposons que $E\xi_H$ existe $\forall H \in \mathcal{H}$. Dans ces conditions, pour tout $x' \in H$, on a :

$$\langle x', E\xi_H \rangle = \int \langle x', \xi_H \rangle dP = \int \langle x', \xi \rangle dP = \langle x', I_\xi \rangle$$

mais comme $E\xi_H$ est continue dans H (considéré comme sous-espace topologique de G), on en conclut que I_ξ est continue dans H, ce qui achève la démonstration.

Proposition 9. — Soit E le dual d'un espace vectoriel localement convexe G, ξ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire scalairement intégrable. Si $\mathcal{H} = (G_\alpha)$ est une famille de sous-espaces de G qui possède la propriété (P) et est telle que pour tout α, G_α soit métrisable, et tonnelé, alors $E\xi$ existe.

En effet, d'après la proposition 7, $E\xi_{G_\alpha}$ existe quel que soit α donc $E\xi$ existe d'après la proposition 8.

Corollaire 1. — Soit E le dual d'un espace vectoriel G qui est la limite inductive d'une famille (G_α) d'espaces métrisables, séparables et tonnelés. Si ξ est un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E\xi$ existe.

Corollaire 2. — Soit E le dual d'un espace vectoriel G qui est la limite inductive d'une famille (G_α) d'espaces de Fréchet et ξ un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E\xi$ existe.

Soit I_ξ l'intégrale de ξ. Il suffit de démontrer que pour tout α, la restriction de I_ξ à G_α est continue [3, p. 62]. et pour démontrer cela, il suffit de démontrer que la restriction de I_ξ à tout sous-espace fermé et séparable (donc tonnelé) de G est continue. Ce qui achève la démonstration.

Exemples. — 1) Soit E l'espace des mesures de Radon sur un espace localement compact T. Si on considère la dualité entre E et l'espace $G = \mathcal{K}(T)$: espace des fonctions numériques continues dans T et à support compact, et si ξ désigne un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E\xi$ existe.

En effet E est le dual de $G = \mathcal{K}(T)$ considéré comme limite inductive des espaces de Banach $\mathcal{K}(K)$: espace des fonctions continues à support contenu dans le compact $K \subset T$, muni de la topologie de la convergence uniforme [5].

2) Soit $E = \mathcal{D}'$ l'espace des distributions de Schwartz. Si on considère la dualité entre E et l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions numériques indéfiniment dérivables dans R^n à support compact. Si ξ est un $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$-élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E\xi$ existe.

En effet $E = \mathcal{D}'$ est le dual de l'espace $\mathcal{D}$ qui est la limite inductive d'une famille d'espaces de Frechet séparables [21].

Proposition 10. — Soit E un espace de Fréchet séparable dont la topologie est définie par une suite croissante (p_i) de semi-normes et ξ un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire. Si $Ep_i(\xi)$ existe pour tout i, alors $E\xi$ existe.

En effet, soit $x' \in E'$. Comme x' est continue, il doit y exister une semi-norme $p \in (p_i)$ et un nombre positif a tels que :

$$|\langle x', x \rangle| \leqslant ap(x) \qquad \forall x \in E$$

d'où $|\langle x', \xi \rangle| \leqslant ap(\xi)$. Mais comme $Ep(\xi)$ existe, $E\langle x', \xi \rangle$ existe. D'autre part, ξ appartient presque certainement à une suite croissante (C_n) d'ensembles compacts [11, p. 40], qui sont $\mathcal{E}_{E'}$-mesurables (§ 1, 3, prop. 2). Définissons maintenant une suite d'éléments aléatoires (ξ_n) de la manière suivante :

$$\xi_1 = \xi \quad \text{si} \quad \xi \in C_1 \qquad \text{et} \quad \xi_1 = 0 \quad \text{si} \quad \xi \notin C_1$$
$$\xi_n = \xi \quad \text{si} \quad \xi \in C_n - C_{n-1} \quad \text{et} \quad \xi_n = 0 \quad \text{si} \quad \xi \notin C_n - C_{n-1}.$$

On obtient successivement :

1. $$p_i\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} p_i(\xi_k) \leqslant p_i(\xi) \qquad \forall_i.$$

2. — En passant, si nécessaire à une sous-suite de la suite $\theta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, et en appliquant la méthode du diagonale, on peut supposer que :

$$\mathrm{E}p_i(\theta_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}p_i(\xi_k) \rightarrow \mathrm{E}p(\xi) \qquad \forall_i.$$

3. — Comme $\xi_n \in C_n$ p. c., $\mathrm{E}(\xi_n)$ existe [prop. 4].

4. — La suite $h_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\xi_k$ forme une suite de Cauchy. En effet, pour $m \geqslant n$, on a :

$$\begin{aligned} p_i(h_m - h_n) &= p_i(\mathrm{E}\xi_{n+1} + \dots + \mathrm{E}\xi_m) \leqslant \mathrm{E}p_i(\xi_{n+1} + \dots + \xi_m) \\ &= \mathrm{E}p_i(\xi_{n+1}) + \dots + \mathrm{E}p(\xi_m) \rightarrow 0 \text{ (d'après 2).} \end{aligned}$$

5. — h_n tend vers un élément x_0 de E.

6. — $\langle x', x_0 \rangle = \mathrm{E}\langle x', \xi \rangle \; \forall x'$. En effet

$$\langle x', x_0 \rangle = \lim \langle x', h_n \rangle = \lim \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\langle x', \xi_k \rangle = \mathrm{E}\langle x', \xi \rangle.$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1 (Mourier). — Si ξ est un élément aléatoire dans un espace de Banach séparable, tel que $\mathrm{E}\,\|\xi\|$ existe, alors $\mathrm{E}\xi$ existe.

COROLLAIRE 2. — Soient E un espace de Fréchet séparable, E′ son dual ξ un $\mathcal{E}_{\mathrm{E}'}$-élément aléatoire tel que ξ appartient presque certainement à un ensemble borné de E, alors $\mathrm{E}\xi$ existe.

Il est en effet évident que ξ est scalairement intégrable. D'autre part, soit (p_i) une suite croissante de semi-normes qui détermine la topologie de E. Pour tout i, $p_i(\xi)$ est une v. a. essentiellement bornée. Donc $\mathrm{E}p_i(\xi)$ existe. Il reste à appliquer la proposition 10.

§ 3 LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES

Nous nous proposons d'étudier ce problème dans les cas suivants :

1. — E est un espace de Fréchet séparable.

2. — E est le dual d'une limite inductive d'espaces de Fréchet séparables.

Proposition 1. — Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité, E un espace localement convexe, $\mathcal{T}$ sa topologie initiale, E′ son dual, T′ une partie totale dans E′ pour $\sigma(E', E)$ et (ξ_n) une suite de $\mathcal{E}_{E'}$-éléments aléatoires. Pour que ξ_n converge (pour $\mathcal{G}$) p. c. vers un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire ξ, il faut et il suffit qu'il existe un $H \in \mathcal{F}$ tel que $P(H) = 1$ et tel que pour tout $\omega \in H$, et tout $x' \in T'$, $\bigcup_{i \geqslant 1} \{ \xi(\omega) \}$ soit $\mathcal{G}$-relativement compact et $\langle x', \xi_i(\omega) \rangle$ converge.

Les conditions sont nécessaires : en effet, si (x_n) converge dans E, $\bigcup_{i \geqslant 1} \{ x_i \}$ est $\mathcal{G}$-relativement compact et (x_n) converge faiblement.

Les conditions sont suffisantes : en effet, soit $\omega \in H$. $\bigcup_{i \geqslant 1} \{ \xi_i(\omega) \}$ étant $\mathcal{G}$-relativement compact, il est $\sigma(E, E')$-relativement compact et par conséquent la suite $(\xi_i(\omega))$ a au moins un point adhérant $\xi(\omega)$, pour $\sigma(E, E')$. $\forall x'$, le point $\langle x', \xi(\omega) \rangle$ est donc adhérant à la suite $(\langle x', \xi_i(\omega) \rangle)$. Mais comme $\forall x' \in T'$, $\langle x', \xi_i(\omega) \rangle$ converge, on obtient :

$$\langle x', \xi(\omega) \rangle = \lim \langle x', \xi_i(\omega) \rangle \qquad \forall x' \in T'.$$

Supposons maintenant que $\xi_i(\omega)$ ne converge pas faiblement vers $\xi(\omega)$. Il existerait donc une sous-suite $\left(\xi_{i_k}(\omega)\right)$ telle que $\xi(\omega)$ ne lui soit pas adhérent. $\bigcup_{k \geqslant 1} \{ \xi_{i_k}(\omega) \}$ étant un sous-ensemble d'un ensemble faiblement relativement compact, il existe au moins un point $\xi'(\omega) \in E$ qui est faiblement adhérant à la suite $\left(\xi_{i_k}(\omega)\right)$. Par conséquent $\forall x' \in T'$, $\langle x', \xi'(\omega) \rangle$ doit être adhérant à $\left(\langle x', \xi_{i_k}(\omega) \rangle\right)$, mais cette suite est convergente (comme sous-suite d'une suite convergente), ce qui implique que pour tout $x' \in T'$, on a :

$$\langle x', \xi'(\omega) \rangle = \lim_k \langle x', \xi_{i_k}(\omega) \rangle = \lim_i \langle x', \xi_i(\omega) \rangle = \langle x', \xi(\omega) \rangle.$$

Comme T′ est totale pour $\sigma(E', E)$, on en conclut que :

$$\xi'(\omega) = \xi(\omega)$$

ce qui est absurde ; d'où $(\xi_i(\omega))$ converge bien faiblement vers $\xi(\omega)$. Mais $\bigcup_{i \geqslant 1} \{ \xi_i(\omega) \}$ étant relativement compact pour $\mathcal{G}$, $(\xi_i(\omega))$ converge aussi vers $\xi(\omega)$ pour $\mathcal{G}$.

Achevons la définition de ξ, en posant $\xi(\omega) = 0 \ \forall \omega \notin H$; et démontrons que ξ est un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire. Soit $\xi'_i : \Omega \to E$ définie de la manière suivante :

$$\xi'_i(\omega) = \xi_i(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \in H \quad \text{et} \quad \xi'_i(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega \notin H.$$

Il est évident que ξ'_i est un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire. D'autre part, $\xi'_i(\omega)$ converge vers $\xi(\omega)$ quel que soit ω, ce qui prouve bien que ξ est un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire [§ 1, 2, prop. 3].

REMARQUE. — O. Hans a démontré une proposition analogue, dans le cas d'un espace de Banach ainsi que dans le cas de l'espace des distributions de Schwartz [*12*].

Proposition 2. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, E un espace de Fréchet séparable dont la topologie est définie par une suite croissante de semi-normes (p_i) et (ξ_i) une suite stationnaire de $\mathcal{E}_{E'}$-éléments aléatoires. Alors, si $\forall i$, $Ep_i(\xi_1)$ existe, il existe un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire ξ_0 tel que :

$$1/n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \to \xi_0$$

pour la topologie de E p. c.

1. — E étant métrisable séparable, il existe dans E' une partie T' dense partout pour la topologie $\sigma(E', E)$ [*4*, p. 66]. $E\xi$ existe [§ 2, prop. 10]; on a donc d'après le théorème bien connu de Birkoff : $1/n \sum_{i=1}^{n} \langle x', \xi \rangle$ converge p. c. pour une x' donnée; mais comme T' est dénombrable, il existe un $H_0 \in \mathcal{F}$ tel que $P(H_0) = 1$ et tel que : $1/n \sum_{i=1}^{n} \langle x', \xi(\omega) \rangle$ converge $\forall x' \in T'$ et $\forall \omega \in H_0$.

2. — Les ξ_i étant tous de même loi, et E métrisable et séparable, on peut trouver une suite croissante (C_k) de sous-ensembles compacts de E, telle que $\xi_i \in \bigcup_{k \geqslant 1} C_k$ p. c. $\forall i$ [*11*, p. 40]. D'autre part, E étant complet, on ne restreint pas la généralité si on suppose que les C_k sont équilibrés et convexes [*3*, p. 81 et *4*, p. 5]. Par conséquent, pour tout n, on a aussi :

$$L_n = 1/n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \in \bigcup_{k \geqslant 1} C_k \quad \text{p. c.}$$

Définissons deux suites d'éléments aléatoires de la façon suivante :

$$\xi_i^k(\omega) = \xi_i(\omega) \quad \text{si} \quad \xi_i(\omega) \in C_k \quad \text{et} \quad \xi_i^k(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \xi_i(\omega) \notin C_k$$

$$R_i^k(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \xi_i(\omega) \in C_k \quad \text{et} \quad R_i^k(\omega) = \xi_i\omega) \quad \text{si} \quad \xi_i(\omega) \notin C_k.$$

Désignons $1/n \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k$ et $1/n \sum_{i=1}^{n} \mathrm{R}_i^k$ par z_n^k et t_n^k respectivement. Il est évident que :

$$\mathrm{L}_n = z_n^k + t_n^k.$$

a) C_k étant compact, $\bigcup_{n \geqslant 1} \{ z_n^k \}$ est donc relativement compact. D'autre part, pour un k donné, les ξ_i^k sont de même loi et forment une suite stationnaire. Mais comme $\xi_i^k \in \mathrm{C}_k$, $\mathrm{E}\xi_i^k$ existe [§ 2, prop. 4] et $\langle x', z_n^k \rangle$ converge p. c., pour tout $x' \in \mathrm{T}'$. Il existe donc [prop. 1] un $\mathrm{H}^k \in \mathcal{F}$ tel que la suite $z_n^k(\omega)$ soit une suite de Cauchy, $\forall \omega \in \mathrm{H}^k$.

b) On a :

$$p(t_n^k) \leqslant 1/n \sum_{i=1}^{n} p(\mathrm{R}_i^k) \qquad \forall p \in (p_i).$$

Mais comme $\mathrm{E}p(\xi_i) < \infty$, $\mathrm{E}p(\mathrm{R}_i^k) < \infty$ et il existe donc une variable aléatoire h_p^k et un ensemble $\mathrm{H}_p^k \in \mathcal{F}$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{H}_p^k) = 1$ et

$$1/n \sum_{i=1}^{n} p(\mathrm{R}_i^k(\omega)) \to h_p^k(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathrm{H}_p^k$$

avec $\mathrm{E}(h_p^k) \leqslant \mathrm{E}p(\mathrm{R}_i^k)$ [lemme de Fatou]. Mais comme $\mathrm{E}p(\xi_i)$ existe, on peut pour toute suite (a_m) de nombres positifs telle que $\Sigma a_m < \infty$, trouver une suite (k_m) d'entiers positifs telle que :

$$\int_{\Omega - \xi_i^{-1}(\mathrm{C}_{k_m})} p(\xi_i) d\mathrm{P} = \int p\left(\mathrm{R}_i^{k_m}\right) d\mathrm{P} \leqslant a_m$$

ce qui implique que $h_p^{k_m} \to 0$ p. c. [théorème de Borel Cantelli]. Il existe donc un ensemble $\mathrm{H}^p \in \mathcal{F}$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{H}^p) = 1$ et $h_p^{k_m}(\omega) \to 0$ pour tout $\omega \in \mathrm{H}^p$. Désignons par H l'ensemble

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \cap \bigcap_{k \geqslant 1} \mathrm{H}^k \cap \bigcap_{\substack{k \geqslant 1 \\ i \geqslant 1}} \mathrm{H}_{p_i}^k \cap \bigcap_{i \geqslant 1} \mathrm{H}^{p_i}.$$

On a évidemment $\mathrm{H} \in \mathcal{F}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{H}) = 1$. Soit $\omega \in \mathrm{H}$, $p \in (p_i)$ et ε un nombre positif donné. On a :

$$h_p^{k_m}(\omega) \underset{m}{\to} 0 \qquad \text{et} \qquad 1/n \sum_{i=1}^{n} p(\mathrm{R}_i^{k_m}(\omega)) \underset{n}{\to} h_p^{k_m}(\omega)$$

on peut trouver donc, un $m_0 > 0$, tel que :

$$h_p^{km_0}(\omega) \leqslant \varepsilon/8$$

et un n_0 tel que :

$$\left| 1/n \sum_{i=1}^{n} p(\mathrm{R}_i^{km_0}(\omega)) - h_p^{km_0}(\omega) \right| \leqslant \varepsilon/8 \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

ce qui implique :

$$p(t_n^{km_0}(\omega)) \leqslant 1/n \sum_{i=1}^{n} p(\mathrm{R}_i^{km_0}(\omega)) \leqslant \varepsilon/4 \qquad \forall n \geqslant n_0$$

m_0 étant ainsi choisi, la suite $z_n^{km_0}(\omega)$ est une suite de Cauchy et il existe un n_1 tel que :

$$p\left(z_n^{km_0}(\omega) - z_m^{km^0}(\omega)\right) \leqslant \varepsilon/2 \qquad \forall n, m \geqslant n_1.$$

Revenons maintenant à la suite (L_n). On a :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{L}_n(\omega) - \mathrm{L}_m(\omega)) &= p\left(z_n^{km_0}(\omega) + t_n^{km_0}(\omega) - z_m^{km_0}(\omega) - t_m^{km_0}(\omega)\right) \\ &\leqslant p\left(z_n^{km_0}(\omega) - z_m^{km_0}(\omega)\right) + p\left(t_n^{km_0}(\omega)\right) + p\left(t_m^{km_0}(\omega)\right) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall n, m \geqslant \sup(n_0, n_1)$. Ce qui prouve que $(\mathrm{L}_n(\omega))$ est une suite de Cauchy Ce qui achève la démonstration.

Soit G la limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet. Tout espace de Fréchet étant tonnelé, G est lui-même tonnelé [*4*, p. 2]. Dans le dual faible de G, toute partie bornée est faiblement relativement compacte [*4*, p. 65].

Proposition 3. — Soit E le dual d'un espace G qui est la limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet, et qui est séparable, (ξ_n) une suite stationnaire de $\mathcal{E}_G$-éléments aléatoires scalairement intégrables, et telle que $\bigcup_{n \geqslant 1} \{ \mathrm{L}_n \} = \bigcup_{n \geqslant 1} \left\{ 1/n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right\}$ soit p. c. $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{G})$-borné. Dans ces conditions, L_n converge faiblement p. c. vers un élément aléatoire ξ.

En effet, soit (x'_n) une suite dense dans G. Comme $\bigcup_{n \geqslant 1} \{ \mathrm{L}_n \}$ est p. c.

borné, il existe un $H \in \mathcal{F}$ tel que $P(H) = 1$, et tel que pour tout $\omega \in H$, il existe un ensemble B_ω qui est $\sigma(E, G)$-borné contenant $\bigcup_{n \geqslant 1} \{ L_n(\omega) \}$. Ce qui implique que $\bigcup_{n \geqslant 1} L_n$ est faiblement relativement compact. D'autre part $\langle x'_i, L_n \rangle$ converge p. c. d'après le théorème de Birkoff, ce qui achève la démonstration, d'après la proposition 1.

Proposition 4. — Si on suppose en plus, dans la proposition 3, que les ξ_n sont indépendants, alors $E\xi_n$ existe et $\xi = E\xi_n$ p. c.

En effet, $\langle x', L^n \rangle$ converge pour tout $x' \in G$, vers $E(\langle x', \xi_n \rangle)$ p. c. d'une part et vers $\langle x', \xi \rangle$ d'autre part. Ce qui implique que :

$$\xi = E(\xi_n) \text{ p. c.}$$

Ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE II

§ 1. PROBABILITÉS TENDUES

E. Mourier [*15*], afin de généraliser le théorème de Bochner concernant les fonctions caractéristiques dans le cas d'un espace de Banach séparable, a introduit la notion d'élément aléatoire proprement dit : soit ξ un élément aléatoire dans un espace de Banach E, m la mesure sur $\mathcal{E}_{E'}$ déterminée par ξ. S'il existe une suite d'ensembles $e_k \mathcal{E}_{E'}$-mesurables bornés, tendant vers E et telle que $\lim m(e_k) = 1$, alors ξ est appelé élément aléatoire proprement dit.

Nous verrons que tout élément aléatoire dans un espace de Banach séparable est proprement dit. Cependant si E est un espace de Banach non séparable, les boules ne sont pas $\mathcal{E}_{E'}$-mesurables et par conséquent les $\mathcal{E}_{E'}$-éléments aléatoires ne sont pas proprement dits. Ils ne le sont pas *a fortiori*, dans le cas d'un espace localement convexe, qui ne possède pas un système fondamental d'ensembles bornés.

Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité et $\mathcal{L}_G$ l'algèbre des ensembles cylindriques (relativement à la dualité entre E et G). Afin de généraliser le théorème de Bochner, plus précisément le problème de prolongement d'une probabilité généralisée [définition 1] sur $\mathcal{L}_G$ en une probabilité sur $\mathcal{E}_G$, nous introduisant la notion de probabilité généralisée fortement tendue, faiblement tendue et tendue. Ces notions sont inspirées des travaux de Le Cam [*7*], Prohorov [*18*] et Getoor [*10*].

Désignons par $\mathcal{L}_A$, la sous-algèbre de $\mathcal{L}_G$ définie par la partie finie A′ de G. C'est-à-dire :

$$\mathcal{L}_{A'} = \overset{-1}{X'_{A'}}(\mathcal{B}^{A'}).$$

DÉFINITION 1. — Soit m une fonction d'ensemble sur $\mathcal{L}_G$ dont la restriction à tout $\mathcal{L}_{A'}$ est une probabilité. Nous dirons que m est une probabilité généralisée.

DÉFINITION 2. — Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité et m une probabilité généralisée définie sur $\mathcal{L}_G$.

1) Nous dirons que m est une probabilité généralisée fortement tendue, si pour tout $\alpha : 0 < \alpha < 1$, il existe une partie bornée B_α qui peut dépendre de α, telle que pour toute partie finie A′ de G on a :

$$m\left[\overset{-1}{X'_{A'}}(\overline{X'_{A'}(B_\alpha)})\right] \geqslant \alpha. \tag{1}$$

2) Nous dirons que m est une probabilité généralisée tendue si pour tout $\alpha : 0 < \alpha < 1$, et quelle que soit la suite $S' = (x'_n)$ d'éléments de G, il existe une partie $B_{\alpha,S'}$ qui peut dépendre de α et de S′, telle que :

$$m\left[\overset{-1}{X'_n}(\overline{X'_n(B_{\alpha,S'})})\right] \geqslant \alpha \qquad \forall n. \tag{2}$$

3) Nous dirons que m est faiblement tendue, si pour tout $\alpha : 0 < \alpha < 1$, et quelle que soit la partie finie A′ de G, il existe une partir bornée $B_{\alpha,A'}$ qui peut dépendre de α et de A′, telle que :

$$m\left[\overset{-1}{X'_{A'}}(\overline{X'_{A'}(B_{\alpha,A'})})\right] \geqslant \alpha. \tag{3}$$

Si m est une probabilité sur $\mathcal{E}_G$, elle détermine la loi d'un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire. Nous dirons que cet élément aléatoire est fortement tendu, tendu ou faiblement tendu, suivant que la restriction de m à $\mathcal{L}_G$ vérifie (1), (2) ou (3) respectivement.

Proposition 1. — Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_G$, alors m est faiblement tendue.

En effet, soit A′ une partie libre finie de G, A'^0 le sous-espace de E orthogonal à A′ et $E_{A'}$ un supplément algébrique de A'^0 dans E. $E_{A'}$ est de dimension finie [*2*, p. 48]. Comme par hypothèse, l'image de m par $X'_{A'}$

dans $R^{A'}$ est une mesure de probabilité, il existe pour tout α : $0 < \alpha < 1$ une partie mesurable bornée K_α dans $R^{A'}$ telle que :

$$m\left[\overset{-1}{X'_{A'}}(K_\alpha)\right] \geqslant \alpha.$$

Soit $B_\alpha = E_{A'} \cap \overset{-1}{X'_{A'}}(K_\alpha)$. Il est évident que B_α est bornée dans $E_{A'}$ ($X'_{A'}$ est une isomorphisme de $E_{A'}$ sur $R^{A'}$) et par conséquent dans E muni de la topologie faible, et on a :

$$m\left[\overset{-1}{X'_{A'}}(X'_{A'}(B_\alpha))\right] = m\left[\overset{1-}{X'_{A'}}(K_\alpha)\right] \geqslant \alpha.$$

Ce qui achève la démonstration.

Proposition 2. — Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, m une probabilité sur $\mathcal{E}_G$ et m la mesure extérieure induite par m sur l'ensemble des parties de E. S'il existe une suite (B_n) de parties de E bornée (pour les topologies compatibles avec la dualité entre E et G) telle que :

$$m^* (\cup B_n) = 1, \tag{4}$$

alors m est fortement tendue.

Si $B_n \in \mathcal{E}_G$ pour tout n, la condition (4) devient $m(\cup B_n) = 1$ et la proposition devient évidente. Supposons que les B_n n'appartiennent pas toutes à $\mathcal{E}_G$ et qu'elles forment une suite croissante (ce qui ne restreint pas d'ailleurs la généralité), B_n tend alors vers $\cup B_n$, et

$$m^*(B_n) \rightarrow m^* (\cup B_n) = 1. \tag{5}$$

[*11*, p. 53]. Soit maintenant α : $0 < \alpha < 1$. Il existe d'après (5) un m_α tel que $m^*(B_n) \geqslant \alpha$ pour tout $n \geqslant n_\alpha$. Ce qui implique :

$$m\left[\overset{-1}{X'_{A'}}\overline{(X'_{A'}(B_{n_\alpha}))}\right] \geqslant m^*(B_{n_\alpha}) \geqslant \alpha,$$

quelle que soit la partie finie A′ de G. Ce qui achève la démonstration.

Exemples. — 1) E est un espace normé. On peut prendre pour la suite (B_n), une suite croissante de boules de centre O dont la réunion est égale à E.

2) Soit E un espace vectoriel topologique, limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach E_n. Comme il existe un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés pour tout E_n, il existe pour E lui-même un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés [*4* p. 12].

3) E est un espace de Fréchet séparable. Si $\mathcal{T}$ désigne la topologie de E,

on a $\mathcal{E}_{E'} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}}$ (chap. premier), d'autre part, toute mesure bornée positive sur $\mathcal{E}_{E'}$ est portée par la réunion d'une suite de parties compactes [*11*, p. 40].

4) E est le dual d'un espace localement convexe métrisable G. Si la suite décroissante (U_n) forme un système fondamental de voisinages de O dans G, la suite des polaires (U_n^0) dans E forme une suite d'ensembles bornés dont a réunion est E.

Remarque. — Dans les quatre exemples ci-dessus, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) m est une probabilité sur $\mathcal{E}_G(\mathcal{E}_{E'})$ fortement tendue.
b) m est tendue.
c) m est faiblement tendue.

Nous allons démontrer maintenant quelques propositions concernant le prolongement d'une probabilité généralisée.

Proposition 3. — Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_G$. S'il existe dans E un système fondamental d'ensembles bornés qui sont $\sigma(E, G)$-compacts, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) m est complètement additive (donc prolongeable d'une seule manière en une probabilité sur $\mathcal{E}_G$).
b) m est fortement tendue.
c) m est tendue.

En effet, d'après la proposition 1, on a : *a)* $\Rightarrow$ *b)* et évidemment *b)* $\Rightarrow$ *c)*. Démontrons que *c)* $\Rightarrow$ *a)*. Soit (C_n) une suite décroissante d'ensembles cylindriques telle que :

$$m(C_n) \to a > 0.$$

Nous allons démontrer que $\cap C_n \neq \varnothing$.

On ne restreint pas la généralité si on suppose qu'il existe une suite (x'_n) d'éléments de G, formant un système linéairement indépendant et telle que :

$$C_n = \overset{-1}{X'_n}(K_n),$$

où X'_n désigne l'application $(x'_1, ..., x'_n)$ et K_n un ensemble fermé de R^n. m étant tendue, à $\alpha : 1 - a < \alpha < 1$ et (x'_n), correspond une partie B de E $\sigma(E, G)$-compacte telle que :

$$m\left[\overset{-1}{X'_n}(X'_n(B))\right] \geqslant \alpha \qquad \forall n.$$

Comme $m(C_n) \geqslant a$, quel que soit n, on obtient successivement :

$$C_n \cap \overset{-1}{X'_n}(X'_n(B)) \neq \varnothing .$$

$$\varnothing \neq X'_n\left[C_n \cap \overset{-1}{X'_n}(X'_n(B))\right] \subset X'_n(C_n) \cap X'_n(B).$$

L'image réciproque de $X'_n(C_n)$ par X'_n, étant l'ensemble cylindrique C_n lui-même, on en conclut que :

$$C_n \cap B \neq \varnothing \qquad \forall_n.$$

B étant $\sigma(E, G)$-compacte et les C_n faiblement fermées (comme images réciproques des fermés K_n par les applications $\sigma(E, G)$-continues X'_n), on en conclut que :

$$(\cap C_n) \cap B \neq \varnothing .$$

Ce qui achève la démonstration.

Exemples. — 1) E est un espace de Banach réflexif (comparer avec [*10*] et [*11*]).

2) E est le dual d'un espace localement convexe métrisable G muni de la topologie $\sigma(E, G)$.

3) E est un espace vectoriel topologique limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach réflexifs E_n.

En effet, E est réflexif et admet un système dénombrable fondamental d'ensembles bornés (donc $\sigma(E, E')$-compacts).

Proposition 4. — Soit E un espace localement convexe semi-réflexif et m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition suffisante pour que m soit prolongeable, d'une seule manière, en une probabilité sur $\mathcal{E}_{E'}$, est que m soit tendue.

En effet, soit C_n une suite décroissante d'ensembles cylindriques telle que :

$$m(C_n) \rightarrow a \neq 0.$$

Nous allons démontrer que $\cap C_n \neq \varnothing$. Comme pour la proposition 3, on peut considérer, sans restreindre la généralité, qu'il existe une suite (x'_n) d'éléments de G formant un système linéairement indépendant et telle que :

$$C_n = \overset{-1}{X'_n}(K_n)$$

où X'_n désigne l'application $(x'_1, ..., x'_n)$ et K_n un ensemble fermé de R^n. m étant tendue, à $\alpha : 1 - a < \alpha < 1$ et à (x'_n), correspond une partie B de E borné et $\sigma(E, E')$-fermée, donc $\sigma(E, E')$-compacte (E est semi-réflexif) telle que :

$$m\left[\overset{-1}{X'_n}(X'_n(B))\right] \geqslant \alpha \qquad \forall n.$$

En procédant comme pour la proposition 3, on obtient :

$$\cap C_n \neq \varnothing.$$

Nous allons généraliser la proposition 3 dans le cas d'un espace de Fréchet réflexif.

Soit E un espace de Fréchet, E' son dual fort, H un sous-espace fermé de E' engendré par une suite d'éléments de E' et H^0 le sous-espace de E orthogonal à H. Les espaces E/H^0 et H sont mis en dualité par la forme bilinéaire canonique :

$$\langle x', \dot{x} \rangle = \langle x', x \rangle \quad \text{avec} \quad x' \in H, \qquad \dot{x} \in E/H^0, \quad \text{et} \quad \dot{x} \in x.$$

Désignons par φ l'application canonique de E sur E/H^0 et considérons la σ-algèbre $\mathcal{E}_H$ engendrée par les sous-ensembles de E/H^0, qui sont de la forme :

$$\{\dot{x} : \langle x', \dot{x} \rangle < \alpha\}, \qquad x' \in H, \qquad \dot{x} \in E/H^0, \quad \text{et} \quad \alpha \in R.$$

φ est $\mathcal{E}_{E'}$-$\mathcal{E}_H$-mesurable. En effet

$$\overset{-1}{\varphi}\{\dot{x} : \langle x', \dot{x} \rangle < \alpha\} = \{x : \langle x', x \rangle < \alpha\} \in \mathcal{E}_{E'}.$$

Dans la suite, nous considérerons E/H^0, comme muni de la topologie quotient par H^0 de la topologie initiale de E. Cette topologie est rappelons-le, compatible avec la dualité entre E/H^0 et H. Ajoutons que si E est réflexif, et si H est séparable, E/H^0 est un espace de Fréchet réflexif et séparable.

Proposition 5. — Soit E un espace de Fréchet réflexif, E' son dual et m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que m puisse être prolongée en une probabilité sur $\mathcal{E}_{E'}$ est qu'elle soit tendue.

La condition est suffisante, d'après la proposition 4.

La condition est nécessaire : en effet, soit S' une suite d'éléments de E'. Désignons par H le sous-espace fermé engendré par S' et par H^0 le sous-espace de E orthogonal à H. Nous avons vu que l'application $\varphi : E \to E/H^0$ est $\mathcal{E}_{E'}$-$\mathcal{E}_H$-mesurable. Désignons par μ la mesure $m\overset{-1}{\varphi}$ sur $\mathcal{E}_H$. E/H^0 étant un espace de Fréchet séparable, la mesure μ est donc portée par la réunion dénombrable d'une suite d'ensembles compacts et $\mathcal{E}_H$-mesurables. Par conséquent, pour tout $\alpha > 0$, il existe un ensemble compact K dans E/H^0 tel que pour toute partie finie A′ de H on ait :

$$\mu\left[\overset{-1}{X}'_{A'}(X'_{A'}(K))\right] \geqslant 1 - \alpha. \tag{1}$$

E/H^0 étant complet, on peut sans restreindre la généralité, supposer K convexe et équilibré. H étant d'autre part séparable, il est réflexif. On sait aussi que $\tau(H, E/H^0)$ est plus fine que la topologie de H (comme sous-espace de E) [*4*, exerc. 5-*b* p. 79], mais H étant réflexif, ces deux topologies sont identiques [*4*, p. 70]. K est donc l'image par φ d'un ensemble convexe équilibré $\sigma(E, E')$-compact C dans E [*4*, p. 79, exerc. 5-*b*]. On a alors :

$$\overset{-1}{X}'_{A'}(X'_{A'}(C)) \supset \overset{-1}{\varphi}(\overset{-1}{X}'_{A'}(X'_{A'}(K)))$$

d'où :

$$m\left[\overset{-1}{X}'_{A'}(X'_{A'}(C))\right] \geqslant m\,\overset{-1}{\varphi}\left[\overset{-1}{X}'_{A'}(X'_{A'}(K))\right] = \mu\left[\overset{-1}{X}'_{A'}(X'_{A'}(K))\right] \geqslant 1 - \alpha$$

pour toute partie finie d'éléments de S′. Ce qui achève la démonstration.

Proposition 6. — Soit E le dual algébrique d'un espace vectoriel G, muni de la topologie $\sigma(E, G)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) m est une probabilité généralisée sur $\mathfrak{L}_G$.
b) m est complètement additive.
c) m est tendue.

En effet E muni de la topologie $\sigma(E, G)$ est isomorphe à un espace produit R^I [*4*, p. 60], et on peut identifier G à la somme directe algébrique $R^{(I)}$. D'après le théorème de Kolmogorof, toute probabilité généralisée sur l'algèbre des ensembles cylindriques d'un espace produit est complètement additive, donc *a)* $\Rightarrow$ *b)*. D'autre part, tout ensemble borné dans R^I est relativement compact. Donc si m est tendue, on peut démontrer que *c)* $\Rightarrow$ *b)*, en procédant comme on a procédé pour la démonstration des propositions 3 et 4. Reste à démontrer que *b)* $\Rightarrow$ *c)*.

Soit (x'_i) une suite dénombrable dans G. On peut supposer sans restreindre la généralité que les x'_i sont des applications projections, c'est-à-dire que $\langle x'_i, x \rangle = pr_i(x)$ sur un facteur R_i. Désignons par N l'ensemble des entiers positifs et identifions R^I à $R^N \times R^{I-N}$. Il est évident que pour tout α : $0 < \alpha < 1$, il existe un compact $K^\alpha \subset R^N$ tel que :

$$m(K_\alpha \times R^{I-N}) \geqslant \alpha.$$

Soit $B = K^{\alpha} \times (a_\iota)_{\iota \in I-N}$, où $(a_\iota)_{\iota \in I-N}$ est un élément quelconque de R^{I-N}, on vérifie facilement que :

$$\overset{-1}{X'_n}(X'_n(B)) \supset K_\alpha \times R^{I-N} \qquad \forall n$$

et par conséquent :

$$m\left[\overset{-1}{X'_n}(X'_n(B))\right] \geqslant \alpha \qquad \forall n.$$

Ce qui achève la démonstration.

Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels et m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_G$. Soit $x'_1, ..., x'_n$, n éléments quelconques de G. Désignons par m^n l'image de m dans R^n par l'application $X'_n = (x'_1, ..., x'_n)$.

DÉFINITION 3. — Soit (m_k) une suite de probabilités généralisées sur $\mathcal{L}_G$. Nous dirons que les m_k sont uniformément tendues, si pour tout $t : 0 < t < 1$ et toute suite (x'_n) d'éléments de G, il existe un ensemble borné B (pour les topologies compatibles avec la dualité entre E et G) tel que l'on ait pour tout k et n :

$$m^n_k(X'_n(B)) \geqslant 1 - t. \tag{1}$$

DÉFINITION 4. — Nous dirons que m_k converge faiblement vers la probabilité généralisée m, si pour tout n les mesures m^n_k convergent faiblement vers m^n.

Proposition 7. — Si E est semi-réflexif avec $G = E'$ et si les m_k sont uniformément tendues et convergent faiblement vers m alors m est tendue (donc prolongeable en une probabilité sur $\mathcal{E}_{E'}$).

En effet, soit (x'_n) une suite quelconque d'éléments de G. Pour tout t : $0 < t < 1$, il existe par hypothèse une partie bornée qui vérifie (1) de la définition 3. Mais comme m_k converge faiblement vers m, on a pour tout n :

$$1 - t \leqslant m^n_k(X'_n(B)) \underset{k}{\rightarrow} m^n(X'_n(B)).$$

Ce qui achève la démonstration.

REMARQUES. — 1) Dans les exemples 1, 2, de la proposition 3, si m est tendue, alors m est prolongeable d'une seule manière sur $\mathcal{B}_c$ (la σ-algèbre des ensembles de Baire relativement à la topologie de la convergence uniforme dans les parties compactes dans G pour sa topologie initiale [chap. premier, § 1, 3, prop. 3]).

2) Soit E, G, deux espaces vectoriels en dualité, m une probabilité généralisée. $\langle x', x \rangle$ peut être considérée comme une variable aléatoire qui suit la loi $x'(m)$ (image de m dans R par l'application x'). S'il existe un élément x dans E tel que :

$$\langle x', x \rangle = \int t d(x'(m)) \qquad t \in \mathrm{R}$$

on peut penser à appeler x espérance mathématique généralisée. La proposition 3 du chapitre premier, § 2, sur l'existence de l'espérance mathématique reste valable dans ce cas.

3) Soit E un espace localement convexe et soit m une probabilité généralisée sur $\mathfrak{L}_{E'}$. Supposons qu'à chaque a : $0 < a < 1$ correspond une partie compacte K de E, telle que :

$$m\left[\overset{-1}{\mathrm{X}}{}'_{\mathrm{A}'}(\mathrm{X}'_{\mathrm{A}'}(\mathrm{K}))\right] \geqslant a$$

pour toute partie finie dans E'. m est évidemment fortement tendue, mais elle est tendue aux sens de Le Cam-Prohorov [*7*, *18*].

§ 2. CARACTÉRISTIQUE D'UN ÉLÉMENT ALÉATOIRE DANS UN ESPACE VECTORIEL

La caractéristique d'un élément aléatoire dans un espace vectoriel localement convexe a été introduite pour la première fois par A. N. Kolmogorof [*14*] dans le cas d'un espace de Banach. Parmi les travaux concernant ce sujet, signalons en premier lieu les travaux de Mourier [*15*, *16*, *17*], de Fortet [*8*], ainsi que les travaux de Le Cam [7] et Prohorov [*18*].

Définition 1. — Soit G un espace vectoriel localement convexe, $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{C}$. Nous dirons que φ est définie positive si quels que soient la suite finie $(x'_1, \ldots, x'_n)$ d'éléments de G et les nombres complexes $t_1, \ldots, t_n$, on a :

$$\sum_{j,k} \varphi(x_j - x_k) t_j t_k \geqslant 0.$$

Définition 2. — Soient E un espace localement convexe, E' son dual topologique et $\xi : \Omega \to \mathrm{E}$ un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire. L'application $\varphi : \mathrm{E}' \to \mathrm{C}$ définie par :

$$\varphi(x') = \mathrm{E}_e{}^{i\langle x', \xi \rangle}$$

est par définition la caractéristique de l'élément aléatoire.

Il est évident que $\varphi(x')$ est une fonction définie positive telle que $\varphi(0)=1$. Elle est continue dans tout sous-espace de dimension finie de E (muni de l'unique topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel) et elle détermine la loi de ξ sur $\mathcal{E}_{E'}$ [15].

Réciproquement, soit φ : $E' \to C$ une application de E' dans C, qui possède les propriétés suivantes :

a) $\varphi(0) = 1$.
b) $\varphi(x')$ est définie positive.
c) $\varphi(x')$ est continue dans tout sous-espace de E', de dimension finie.

Si $(x'_1, ..., x'_n)$ est une suite finie libre d'éléments de E', il est évident d'après les hypothèses faites sur φ, que la fonction :

$$\Psi(u_1, \ldots, u_n) = \varphi(u_1 x'_1, \ldots, u_n x'_n)$$

est une fonction caractéristique d'un élément aléatoire dans R^n, d'après le théorème classique de Bochner.

Soit $F_n(x'_1, t_1 ; ... ; x'_n, t_n)$ la fonction de répartition déterminée par Ψ. Il est facile de vérifier que les F_n vérifient les conditions habituelles de consistance :

1) Les F_n sont des fonctions symétriques en (x'_i, t_i).

2) $F_{n+1}(x'_1, t_1 ; \ldots ; x'_n, t_n ; x'_{n+1}, \infty) = F_n(x'_1, t_1 ; \ldots ; x'_n, t_n)$.

Soit m^n la mesure de probabilité déterminée par $F_n(x'_1, t_1 ; ... ; x'_n, t_n)$ sur $\mathcal{B}^n$ (σ-algèbre des ensembles boréliens de R^n) et soit m la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{L}_{E'}$, de la manière suivante :

Si D est un ensemble cylindrique défini par $(x'_1, ..., x'_n)$ et l'ensemble $D' \in \mathcal{B}^n$, c'est-à-dire si :

$$D = \overset{-1}{X'_n}(D')$$

on pose :

$$m(D) = m^n(D').$$

On peut vérifier facilement que :

1) $m(E) = 1$.
2) $m(D) \geqslant 0$.
3) Pour toute partie finie A' dans G, la restriction de m à $\mathcal{L}_{A'}$, est une probabilité. Ce qui implique que m est additive sur $\mathcal{L}_{E'}$ et qu'elle est par conséquent, une probabilité généralisée.

Dans quelles conditions, m est prolongeable en une probabilité sur $\mathcal{E}_{E'}$? E. Mourier a démontré le théorème suivant :

THÉORÈME (Mourier). — Soit E un espace de Banach séparable et réflexif, $\varphi(x')$ une application de E′ dans le corps des complexes qui est définie positive, continue dans E et telle que $\varphi(0) = 1$, alors φ est une caractéristique d'un élément aléatoire dans E, si et seulement si, elle satisfait à une certaine condition C [*15*].

Si m désigne la probabilité généralisée déterminée par φ, la condition C est équivalente à dire que m est fortement tendue.

Getoor [*10*] a repris le problème, dans le cas d'un espace de Banach réflexif, mais non nécessairement séparable. La famille des distributions F_n déterminées par $\varphi(x')$ détermine un processus stochastique. Getoor démontre que ce processus admet en général une représentation dans le dual algébrique de E′. E étant un sous-espace de E′*, Getoor donne une condition nécessaire et suffisante pour que ce processus admette une représentation dans E lui-même.

THÉORÈME (Getoor). — Soit E un espace de Banach réflexif et $\varphi(x')$ une fonction définie positive sur E′. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire, est que :

1) φ soit continue sur tout sous-espace de dimension finie de E′.

2) Pour tout sous-espace séparable E'_1 de E′ et pour tout a, $b > 0$, il existe q (E'_1, a, b), tel que l'on ait, pour toute partie finie $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans E'_1 avec $\| x'_i \| \leqslant q$:

$$\int_{-b}^{b} \cdots \int_{-b}^{b} dF_n(x'_1, t_1 ; \ldots ; x'_n, t_n) \geqslant a.$$

Badrikian [*1*] a traité le même problème que Getoor, en utilisant une méthode différente, et modifie apparemment la condition C. En effet, la condition C et celle de Badrikian sont, l'une comme l'autre, équivalentes à dire que la probabilité généralisée déterminée par φ est fortement tendue.

En appliquant la proposition 3 de § 1, on obtient les trois propositions suivantes :

Proposition 1. — Soit E un espace de Banach réflexif, $\varphi : E' \to C$ une fonction définie positive et continue dans tout sous-espace de dimension finie de E′ et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre des ensembles cylindriques $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire est que m soit tendue.

Proposition 2. — Soit E le dual d'un espace métrisable G, $\varphi : G \to C$ une fonction définie positive continue dans tout sous-espace de dimension finie de G, et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre des ensembles cylindriques $\mathfrak{L}_G$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire est que m soit tendue.

Proposition 3. — Soit E un espace vectoriel topologique limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach réflexifs (E_n). $\varphi : E' \to C$ une fonction définie positive continue dans tout sous-espace de dimension finie de E' et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre des ensembles cylindriques $\mathfrak{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire, est que m soit tendue.

Par application de la proposition 4 de § 1, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4. — Soit E un espace localement convexe et semi-réflexif, $\varphi : E' \to C$ une fonction définie positive et continue dans tout sous-espace de dimension finie de E' et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ, sur l'algèbre des ensembles cylindriques $\mathfrak{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire, est que m soit tendue.

Par application de la proposition 5 de § 1, on obtient la proposition.

Proposition 5. — Soit E un espace de Fréchet réflexif et $\varphi : E' \to C$, une fonction définie positive, qui est continue dans tout sous-espace de dimension finie de E', et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre $\mathfrak{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{E}_{E'}$-élément aléatoire, est que m soit tendue.

Par application de la proposition 6 de § 1, on obtient la proposition :

Proposition 6. — Soit E le dual algébrique d'un espace vectoriel G. Considérons la dualité entre E et G. Si $\varphi : G \to C$ est une application définie positive, continue sur tout sous-espace de dimension finie de G, et telle que $\varphi(0) = 1$, alors φ est la caractéristique d'un $\mathcal{E}_G$-élément aléatoire.

Exemple. — Soit E le dual algébrique $\mathfrak{D}^*$ de l'espace $\mathfrak{D}$ des fonctions infiniment dérivables, et à support compact. Considérons la dualité entre $\mathfrak{D}^*$ et $\mathfrak{D}$. Alors toute fonction $\varphi : \mathfrak{D} \to C$ qui est définie positive, et continue sur tout sous-espace de dimension finie de G, et telle que $\varphi(0) = 1$, est la caractéristique d'un $\mathcal{E}$ -élément aléatoire [*9*].

REMARQUE. — La proposition 6 montre que le processus stochastique déterminé par une $\varphi : G \to C$ qui est définie positive, continue sur tout sous-espace de dimension finie de G, et telle que $\varphi(0) = 1$, admet une représentation dans le dual algébrique de G.

L'image d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel, par une application de la forme $X'_{A'}$ est souvent incommode. Cependant, dans le cas d'un espace de Hilbert séparable, les méthodes de ce chapitre sont facilement applicables. A titre d'exemple, nous allons démontrer un théorème démontré déjà par Sazanov [*20*], en appliquant la proposition 2.

Proposition 7. — Soit E un espace de Hilbert séparable, (x'_i) une base orthonormée dans E. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi : E \to C$ soit la caractéristique d'un $\mathcal{E}_E$-élément aléatoire ξ tel que, $E \| \xi \|^2 < \infty$, est que φ soit :

a) définie positive et $\varphi(0) = 1$,

b) continue pour la topologie de E,

c) $\sum a_n^2 < \infty$ avec $a_n = \int \alpha^2 dF_n(\alpha)$

où $F_n(\alpha)$ est la fonction de répartition déterminée par $\varphi(ux_n)$.

Les conditions sont évidemment nécessaires.

Les conditions suffisantes : Soit m^n la probabilité généralisée déterminée par $\Psi(u_1, \ldots, u_n) = \varphi(u_1x_1 + \ldots + u_nx_n)$. Soit $\alpha : 0 < \alpha < 1$ et soit b un nombre déterminé par $\alpha > 1/b$. Si B désigne la boule dans E de centre O et de rayon $r = \sqrt{b\Sigma a_i^2}$. On obtient successivement :

$$X'_n(B) = \left\{ t : t = (t_1, \ldots, t_n) \in R^n, \sum_{1=1}^{n} t_i^2 \leqslant r^2 \right\}$$

$$m^n X'_n(B) = m^n \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \leqslant r^2 \right\} \geqslant 1 - \frac{\sum a_i^2}{b \sum a_i^2} = 1 - 1/b \geqslant 1 - \alpha.$$

Ce qui implique que m est fortement tendue, d'où notre assertion.

Le Cam a démontré une proposition qui peut être utilisée pour prouver qu'une fonction φ est la caractéristique d'un élément aléatoire tendu au sens de Le Cam [§ 1, remarque 3].

Nous allons démontrer une proposition semblable, qui peut être utilisée pour prouver qu'une fonction φ est la caractéristique d'un élément aléatoire au sens de § 1, définition 2. La démonstration s'effectue en modifiant légèrement la démonstration du théorème de Le Cam donné dans [*18*].

DÉFINITION 3. — Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, A′ une partie de G. Toute expression de la forme :

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\langle x'_k\,;\,x\rangle}$$

où c_k est un nombre complexe quelconque, $x'_k \in \mathrm{A}'$ et $x \in \mathrm{E}$, est par définition un A′-polynôme trigonométrique.

Proposition 8. — Soit E un espace localement convexe semi-réflexif, E′ son dual et $\varphi : \mathrm{E}' \to \mathrm{C}$ une application continue dans tout sous-espace de dimension finie de E′, et telle que $\varphi(0) = 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un élément aléatoire tendu est que :

Pour toute suite S′ d'éléments de E′, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie B dans E, bornée (donc $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$-compacte) et un nombre $\delta > 0$, tel que les inégalités

$$\sup_{x \in \mathrm{E}} |\, q(x) \,| \leqslant 1 \tag{1}$$

$$\sup_{x \in \mathrm{B}} |\, q(x) \,| < \delta. \tag{2}$$

implique $|\, \Sigma c_k \varphi(x'_k) \,| < \varepsilon$ pour tout S′-polynôme trigonométrique.

Les conditions sont nécessaires : si φ est la caractéristique d'un élément aléatoire tendu, alors $\forall \mathrm{S}' \subset \mathrm{E}'$ et $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$, il existe une partie bornée (donc $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$-compacte) B, telle que

$$m\left[\overset{-1}{\mathrm{X}'_n}(\mathrm{X}'_n(\mathrm{B}))\right] \geqslant 1 - \varepsilon/2 \qquad \forall n$$

où X'_n est l'application définie par les n premiers éléments de S′ et m la probabilité déterminée par φ sur $\mathcal{E}_{\mathrm{E}'}$. Soit $\delta = \varepsilon/2$ et $q(x)$ un S′-polynôme trigonométrique déterminé par les n premiers éléments de S′ — ce qui ne restreint pas la généralité — et désignons par $\tilde{\mathrm{B}}$ l'ensemble cylindrique :

$$\overset{-1}{\mathrm{X}'_n}(\mathrm{X}'_n(\mathrm{B})).$$

Si $q(x)$ satisfait aux conditions (1) et (2) de la proposition, pour B et $\delta=\varepsilon/2$, on obtient :

$$| \Sigma c_k \varphi(x'_k) | \leqslant \int_{\tilde{B}} | q(x) | \, dm + \int_{E-\tilde{B}} | q(x)/dm$$

mais :

$$\sup_{x \in \tilde{B}} | q(x) | = \sup_{x \in B} | q(x) | < \varepsilon/2$$

et

$$\int_{E-\tilde{B}} | q(x) | \, dm \leqslant \int_{E-\tilde{B}} dm < \delta = \varepsilon/2.$$

Ce qui implique que :

$$| \Sigma c_k \varphi(x'_k) | < \varepsilon.$$

Les conditions sont suffisantes : la démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme de Prohorov [*18*]. — Soit Q une mesure de probabilité sur R^n. Si le compact K est tel que pour tout polynôme trigonométrique :

$$q(a) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i(t_k, a_k)} \qquad (t_k), (a_k) \in R^n$$

les inégalités :

$$\sup_{a \in R^n} | q(a) | \leqslant 1$$

$$\sup_{a \in K} | q(a) | \leqslant \delta$$

impliquent l'inégalité :

$$\left| \int q(a) dQ \right| < \varepsilon$$

alors :

$$Q(K) > 1 - \varepsilon.$$

Démonstration. — Soit S′ une suite d'éléments de E′ et $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$ et soit B et δ, la partie bornée de E′ et le nombre positif correspondant à S′ et ε et pour lesquels les conditions de la proposition sont vérifiées. Désignons par m^n l'image de la probabilité généralisée m déterminée par φ sur $\mathcal{L}_{E'}$, par l'application X'_n déterminée par les n premiers éléments de S′. Les conditions de la proposition impliquent que tout polynôme trigonométrique dans R^n vérifie les conditions du lemme de Prohorov, pour $Q = m^n$ et $K = X'_n(B)$, ce qui implique :

$$m^n(X'_n(B)) \geqslant 1 - \varepsilon$$

mais

$$1 - \varepsilon \leqslant m^n(X'_n(B)) = m\left[\overset{-1}{X'_n}(X'_n(B))\right]$$

donc m est tendue. Ce qui achève la démonstration.

Aux propositions 1, 2, 3, 5, 6, correspondent des propositions analogues à la proposition 8, et dont la démonstration s'effectue comme ci-dessus avec de légères modifications.

Nous allons démontrer une autre proposition qui permet dans plusieurs cas, de reconnaître si une application $\varphi(x')$ est une caractéristique.

Soit E un espace vectoriel localement convexe et E′ son dual muni d'une topologie $\mathcal{T}$ compatible avec la dualité entre E′ et E. Soit $\| x \|_{V'} = \sup_{x' \in V'} | \langle x', x \rangle |$, où V′ est un voisinage de O pour $\mathcal{T}$.

Proposition 9. — Soit E un espace réflexif séparable, $(\varphi_n(x'))$ une suite de caractéristiques, m_n la mesure de probabilité déterminée par $\varphi_n(x')$ sur $\mathcal{E}_{E'}$. S'il existe un V′, un $a > 0$ et $s > 0$, tels que l'on ait pour tout n :

$$\int \| x \|^a_{V'} \, dm_n = s^a_n < s^a$$

et si $\varphi_n(x')$ converge vers $\varphi(x')$ et φ_n converge vers φ uniformément dans un voisinage de O dans E'_n quel que soit le sous-espace de dimension finie E'_n de E′, alors φ est une caractéristique.

En effet dans ces conditions, φ est définie positive et $\varphi(0) = 1$. D'autre part $\Psi_n (u_1, \ldots, u_n) = \varphi_n(u_1 x'_1 + \ldots + u_n x'_n)$ converge vers

$$\Psi(u_1, \ldots, u_n) = \varphi(u_1 x'_1 + \ldots + u_n x'_n),$$

uniformément dans un voisinage de O dans R^n. $\Psi(u_1, \ldots, u_n)$ est donc bien la caractéristique d'un élément aléatoire X^n dans R^n. Si on désigne par X^n_k l'élément aléatoire dans R^n que détermine $\varphi_{k'}$, X^n_k converge en loi vers X^n. Ce qui implique que φ est continue dans tout sous-espace à dimension finie de E′. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre $\mathcal{L}_{E'}$ des ensembles cylindriques de E. Désignons par B_r le sous-ensemble de E déterminé par $\| x \|_{V'} \leqslant r$. B_r est borné, $\sigma(E, G)$-fermé donc $\sigma(E, G)$-compact et $\mathcal{E}_{E'}$-mesurable. On a donc

$$m_n(B_r) \geqslant 1 - s^a/r^a. \tag{1}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné et choisissons r de manière que $s^a/r^a \leqslant \varepsilon$. Il est évident d'après (1) que pour $X'_j = (x'_1, ..., x'_j) \subset G$ quelconque, on a :

$$m\left[\overset{-1}{X'_j}(X'_j(B_r))\right] \geqslant \lim m_n(B_r) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Ce qui prouve que m est fortement tendue. Ce qui achève la démonstration.

REMARQUES. — 1) Cette proposition est particulièrement applicable dans le cas d'un espace de Banach.

2) Si E, au lieu d'être un espace réflexif, est le dual d'un espace tonnelé, la proposition 9 reste valable. Elle est particulièrement applicable dans le cas où E est le dual d'un espace de Fréchet.

3) Soit E un espace réflexif non séparable, E' son dual fort, H un sous-espace séparable fermé de E' et E/H^0 le quotient de E par H^0 (sous-espace de E orthogonal à H). Désignons par $\mathcal{C}_H$ l'algèbre des ensembles cylindriques de E/H^0 et par $\mathcal{E}_H$ la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}_H$ (relativement à la dualité entre E/H^0 et H). Soit (φ_n) une suite de caractéristiques définies sur E'. Leurs restrictions sur H sont aussi des caractéristiques qui déterminent des mesures de probabilité sur $\mathcal{E}_H$.

Si ces restrictions vérifient (pour E/H^0 et H) les conditions de la proposition 9, quel que soit H, alors φ est une caractéristique.

Nous allons terminer ce chapitre par la proposition suivante :

Proposition 10. — Soit E un espace vectoriel localement convexe qui possède un système fondamental de parties bornées et $\mathcal{E}_{E'}$-mesurables, $\varphi(x')$ la caractéristique d'une mesure de probabilité m définie sur $\mathcal{E}_{E'}$, alors $\varphi(x')$ est uniformément continue dans E' muni de la topologie forte.

Il faut démontrer que pour $a > 0$, il existe un $t > 0$ et un ensemble borné B de E tel que :

$$| \varphi(x'_1) - \varphi(x'_2) | \leqslant a$$

pourvu que :

$$\sup_{x \in B} | \langle x'_1 - x'_2, x \rangle | \leqslant t. \tag{1}$$

Or d'après la proposition 1, § 1, pour tout $a > 0$, on peut trouver un ensemble borné $B_a \in \mathcal{E}_{E'}$ tel que $m(B_a) \geqslant 1 - a/3$.

Soit $t > 0$ tel que :

$$| 1 - e^{i\langle y', x \rangle} | \leqslant a/3 \quad \text{lorsque} \quad \sup_{x \in B_a} | \langle y', x \rangle | \leqslant t. \tag{2}$$

Soit maintenant x'_1, x'_2 deux éléments de E qui vérifie (1) pour B_a. On obtient :

$$| \varphi(x'_1) - \varphi(x'_2) | = \left| \int e^{i\langle x'_1, x\rangle} dm - \int e^{i\langle x'_2, x\rangle} dm \right|$$
$$\leqslant \int \left| e^{i\langle x'_1, x\rangle}(1 - e^{i\langle y', x\rangle}) \right| dm \quad (y' = x'_2 - x'_1).$$

Mais :

$$\int \left| e^{i\langle x'_1, x\rangle}(1 - e^{i\langle y', x\rangle}) \right| dm = \int_{B_a} \left| 1 - e^{i\langle y', x\rangle} \right| dm$$
$$+ \int_{B'_a} \left| 1 - e^{i\langle y', x\rangle} \right| dm$$

le deuxième terme du second membre est inférieur à $2a/3$, car :

$$1 \, | - e^{i\langle y', x\rangle} | \leqslant 2 \quad \text{et} \quad m(E - B_a) \leqslant a/3.$$

Quant au premier terme, il est inférieur à $a/3$ d'après (2). Ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. Badrikian, Résultats relatifs aux éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach réflexif non séparable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 246, 1985, p. 882-884.

[*2*] N. Bourbaki, Éléments de mathématique. Livre II. Algèbre, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, N° 1236, Hermann et Cie, Paris, 1955.

[*3*] N. Bourbaki, Éléments de mathématique. Livre V. Espaces vectoriels topologiques, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, N° 1189, Hermann et Cie, Paris, 1952.

[*4*] N. Bourbaki, Éléments de mathématique. Livre V. Espaces vectoriels topologiques. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, N° 1229, Hermann et Cie, Paris, 1955.

[*5*] N. Bourbaki, Éléments de mathématique. Livre VI. Intégration, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, N° 1175, Hermann et Cie, Paris, 1952.

[*6*] N. Bourbaki, Éléments de mathématique. Livre VI. Intégration, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, N° 1281, Hermann et Cie, Paris, 1959.

[*7*] Le Cam, Convergence in distribution of stochastics processes, *Univ. California Publ. Statist.*, t. 2, 1957, n° 11, p. 207-236.

[*8*] R. Fortet, *Normalverteilte Zufallselemente in Banachschen Raumen*, Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik in Berlin, Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956, p. 29-35.

[*9*] M. L. M. Gelfand, Generalised Random Processes, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, t. 100, 1955, p. 853-856.

[*10*] Getoor, On characteristic function of Banach space-valued random variable, *Pacific J. Math.*, t. 7, 1957, p. 885-897.

[*11*] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York, Van Norstand, 1950.

[*12*] O. Hans, *Transactions of the first Prague Conference*, 1956.

[*13*] E. HILLE, Functional Analysis and semi-groupe, *Amer. Math. Soc. Colloq. Pub.*, Vol. 31, 1948, New York.

[*14*] A. KOLMOGOROV, La transformation de Laplace dans les espaces linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 200, 1935, p. 1717-1718.

[*15*] E. MOURIER, Thèse.

[*16*] E. MOURIER, Éléments aléatoires dans un espace de Banach. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 13, 1953, p. 161-224.

[*17*] E. MOURIER, L-random elements and L-random elements in Banach spaces. *Proceedings of the third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, t. 2, 1956, p. 231-242.

[*17 bis*] PETTIS, On Integration in Vector Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 44, 1938.

[*18*] Yu. PROHOROV, The convergence of random processes and limit theorem in the theory of probability, *Teor. Veroyatnost i Primenen*, t. 10, 1956, p. 177-238.

[*19*] Yu. PROHOROV, The method of characteristic Functions, *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, t. 2, 1960, p. 403-419.

[*20*] V. SASANOV, On characteristic functionals, *Teor. Veroyatnost i Primenen*, t. 3, 1958, p. 201-205.

[*21*] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann et Cie, Paris, 1951.

[*22*] K. WINKELBAUER, *Czechosl. Mathem. Journ.*, t. 6, 1956, p. 517-521.