ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PH. PICARD

Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 2 (1965-1966), p. 151-172

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1965__2_2_151_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 2, 1965, p. 151-172.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie

par

Ph. PICARD

RÉSUMÉ. — Le présent travail a pour objet l'étude de l'évolution de l'effectif d'une population limitée (c'est-à-dire, d'une variable aléatoire entière dans un intervalle fermé) associée à un processus de naissance et de décès. Dans le cas général, un système de polynômes orthogonaux peut être utilisé pour l'étude de ce processus de naissance et de décès. Lorsque les probabilités de transition sont des polynômes du deuxième degré par rapport à l'effectif de la population, on peut faire usage de la fonction génératrice de cet effectif, et l'exprimer à l'aide des polynômes de Heun.

SUMMARY. — The present work has for object the study of the evolution of the limitated population size (that is to say, of an integer random variable in a closed interval) associated with a birth-and-death process. In the general case, a system of orthogonal polynomials can be used for the study of the birth-and-death process. When the transition probabilities are polynomials of degree two concerning the population size, the generating function of the size may be used, and expressed with the Heun polynomials.

I. — INTRODUCTION

Le modèle déterministe le plus simple que l'on puisse construire, pour représenter l'évolution d'une population démographique, est celui dans lequel le taux de croissance est constant. Ce modèle est régi par la loi de Malthus. Cependant, les premières études démographiques du XIX[e] siècle ont rapidement exclu la généralité de cette loi, et limité sa validité à une courte période de temps. Il n'est en fait pas acceptable de confondre une possibilité physiologique d'accroissement avec une tendance effective de la population. Plutôt qu'une évolution de celle-ci, indépendamment des ressources, ce qui conduirait à une situation apocalyptique, on doit admettre une interaction continuelle entre le groupe d'êtres vivants et son milieu; et la limitation des subsistances, par la compétition qu'elle entraîne, est un puissant facteur pour l'adaptation de la population à son habitat.

C'est pour tenir compte de ce fait, que l'on est amené à introduire à la place du taux constant de croissance malthusienne, une fonction $\lambda(N)$ de l'effectif N, fonction qui devra être décroissante dès que N sera assez grand. $N(t)$ sera alors donné par l'équation différentielle :

$$\frac{dN}{dt} = \lambda(N).N. \tag{1}$$

La première approximation consiste naturellement à prendre λ du premier degré en N, en posant $\lambda(N) = \alpha - \beta N$ ainsi que Pearl et Verhulst l'ont fait, l'effectif $N(t)$ suivant alors la loi logistique qui porte le nom de ces deux auteurs :

$$N(t) = N(0) \frac{\alpha e^{\alpha t}}{\alpha + N(0)\beta(e^{\alpha t} - 1)}. \tag{2}$$

La relative simplicité de cette dernière explique qu'elle ait joui d'une certaine faveur dans la représentation de phénomènes auto-freinés, liés à la croissance économique ou à la théorie de la lutte pour la vie. En 1939, une première formulation stochastique en a été donnée par W. Feller, à l'aide d'un processus de naissance pur dans lequel la probabilité de naissance d'un nouvel individu, pendant l'intervalle de temps Δt, lorsque la population en compte déjà n est égale à :

$$(n\alpha - n^2\beta)\Delta t + o(\Delta t) \qquad \alpha/\beta \text{ entier positif.}$$

W. Feller après avoir montré qu'un tel processus s'étudiait sans difficulté, l'a généralisé sous forme d'un processus de naissance et décès pur, dans lequel les corrections de Pearl-Verhulst interviennent pour limiter et les naissances, et les décès. Ce dernier modèle, qui a été examiné également par D. Kendall, est d'un abord analytique plus ardu..

Dans le présent mémoire, nous nous limiterons à cet aspect purement démographique et reprendrons le modèle de W. Feller avec les hypothèses les plus générales possibles.

II. — Considérons une aléatoire $N(t)$, assujettie à ne prendre que les valeurs entières allant de N_1 à N_2 ($0 \leqslant N_1 < N_2$) et dont toutes les probabilités infinitésimales de transition pendant l'intervalle de temps Δt sont d'ordre $o(\Delta t)$ excepté les suivantes :

$$\begin{cases} P\big(N(t+\Delta t) = n+1/N(t) = n\big) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t) \\ P\big(N(t+\Delta t) = n-1/N(t) = n\big) = \mu_n \Delta t + o(\Delta t) \\ P\big(N(t+\Delta t) = n \quad /N(t) = n\big) = 1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

avec

$$\mu_n > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_n > 0 \quad \text{pour} \quad n \in]N_1, N_2[$$

et

$$\lambda_{N_2} = 0 \qquad \mu_{N_1} = 0.$$

Les $p_n(t)$, probabilités *a priori* pour que $N(t)$ soit égale à n à l'instant t, seront données par le système différentiel

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{dp_{N_1}}{dt} = -\lambda_{N_1} p_{N_1}(t) + \mu_{N_1+1} \cdot p_{N_1+1}(t) \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \lambda_{i-1} \cdot p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_i(t) + \mu_{i+1} \cdot p_{i+1}(t) \quad N_1 < i < N_2 \\ \dfrac{dp_{N_2}}{dt} = \lambda_{N_2-1} p_{N_2-1}(t) - \mu_{N_2} p_{N_2}(t) \end{cases}$$

auquel on adjoint, comme conditions initiales, la donnée des $p_i(0)$.

On écrira aussi matriciellement ce système sous la forme

$$\text{(I')} \qquad \frac{dP}{dt} = AP(t)$$

$P(t)$ étant la matrice colonne des $p_i(t)$ rangés selon les indices croissants et A une matrice carrée d'ordre $N_2 - N_1 + 1$.

Processus stationnaires.

On remarque que la somme des termes d'une colonne quelconque de A est toujours nulle. Cette matrice admet donc la valeur propre $\rho = 0$ et par suite le système (I) possède une solution stationnaire. Les p_i sont déterminés à un facteur multiplicatif près et se calculent facilement de proche en proche, à partir de p_{N_1} supposé connu. Ils sont donnés par la formule :

$$\text{(1)} \qquad p_i = \frac{\lambda_{N_1} \cdot \lambda_{N_1+1} \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_{N_1+1} \cdot \mu_{N_1+2} \cdots \mu_i} p_{N_1} \qquad N_1 < i \leqslant N_2$$

et par suite sont tous positifs si p_{N_1} l'est. On détermine p_{N_1} en posant la condition $\sum_i p_i = 1$ et on obtiendra ainsi une et une seule distribution de probabilité stationnaire. On remarque que, dans le cas particulier (qui sera repris en détail ultérieurement) où les λ_i et μ_i sont des polynômes en i de degré deux, (1) prend la forme d'un coefficient de série hypergéométrique. La fonction génératrice de la distribution stationnaire s'exprime donc sans peine et le calcul des premiers moments devient facile.

Étude du système (I).

Ainsi que W. Feller l'a signalé, si $\mu_n = 0$ les équations (I) peuvent se résoudre de proche en proche. Nous ne nous arrêterons donc pas à ce cas particulier et aborderons directement le cas généıal.

L'étude de (I) ne présente aucune difficulté théorique. Sous la forme (I'), on constate que toutes les solutions de ce système sont données par

$$\text{(2)} \qquad P(t) = e^{At}C$$

C étant une matrice colonne arbitraire à $N_2 - N_1 + 1$ éléments. L'utilisation des conditions initiales entraîne $P(0) = C$. Le système (I) admet donc une et une seule solution satisfaisant aux conditions initiales posées

$$\text{(3)} \qquad P(t) = e^{At}P(0).$$

Une autre méthode d'étude sera la suivante. Recherchons les solutions de (I), si elles existent, qui admettent une transformée de Laplace par rapport à t

$$\text{(4)} \qquad q_i(s) = \mathfrak{L}\{p_i(t)\} \qquad s \geqslant s_0$$

les $q_i(s)$ étant alors donnés par

$$\text{(5)} \qquad sq_i - p_i(0) = \lambda_{i-1}q_{i-1} - (\lambda_i + \mu_i)q_i + \mu_{i+1}q_{i+1} \qquad N_1 \leqslant i \leqslant N_2$$

cette équation n'étant valable pour $i = N_1$ et $i = N_2$, qu'à la condition d'annuler les termes non définis λ_{N_1-1} et μ_{N_2+1}. On pourra mettre (5) sous la forme

$$\text{(6)} \qquad q_i = b'_i + \sum_j b_{ij} \cdot q_j \qquad N_1 \leqslant i \leqslant N_2$$

avec $b_i = \dfrac{p_i(0)}{s + \lambda_i + \mu_i}$ et tous les b_{ij} étant nuls, sauf $b_{i,i-1}$ et $b_{i,i+1}$. Comme nous l'avons montré dans une précédente étude (voir bibliographie), il est possible de résoudre par itération le système (6) en exprimant les $q_i(s)$ sous la forme

$$(7) \quad q_i = b'_i + \sum_j b_{ij} b'_j + \sum_{j_1 j_2} b_{ij_1} . b_{j_1 j_2} . b'_{j_2} + \sum_{j_1 j_2 j_3} b_{ij_1} . b_{j_1 j_2} . b_{j_2 j_3} . b'_{j_3} + \dots$$

la convergence de ce développement étant assurée à condition de réaliser

$$\sum_j | b_{ij} | = \frac{\lambda_{i-1} + \mu_{i+1}}{| s + \lambda_i + \mu_i |} \leqslant \varepsilon < 1$$

ce qui peut toujours être obtenu, en vertu de $s \geqslant s_0$, par un choix convenable de s_0.

D'autre part :

$$b'_i = p_i(0) . \mathfrak{L} \left\{ e^{-(\lambda_i + \mu_i)t} \right\} \qquad \beta_{i,\, i-1} = \lambda_{i-1}$$

$$b_{ij} = \beta_{ij} . \mathfrak{L} \left\{ e^{-(\lambda_i + \mu_i)t} \right\} \qquad \beta_{i,\, i+1} = \mu_{i+1}$$

et par suite la série (7) s'écrit :

$$(8) \qquad q_i(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{L} \left\{ u_{i_r}(t) \right\}$$

avec

$$(9) \quad u_{i_r}(t) = \sum_{j_1 j_2 \dots j_r} \beta_{ij_1} . \beta_{j_1 j_2} \dots \beta_{j_{r-1} j_r} \\ . p_{j_r}(0) \left\{ e^{-(\lambda_i + \mu_i)t} * e^{-(\lambda_{j_1} + \mu_{j_1})t} * \dots * e^{-(\lambda_{j_r} + \mu_{j_r})t} \right\}.$$

Mais les termes de la somme ci-dessus sont tous positifs et par suite $\sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{L} \left\{ | u_{i_r}(t) | \right\}$ converge puisque cette série n'est autre que la série (7).

On en déduit que

$$q_i(s) = \mathfrak{L} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} u_{i_r}(t) \right\}$$

ce qui entraîne pour le système (I) l'existence de la solution

$$(10) \qquad p_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_{i_r}(t).$$

Le système (I) possède donc une et une seule solution satisfaisant aux conditions initiales posées et susceptible d'une transformée de Laplace. Cette solution s'identifie donc avec celle donnée par la formule (3).

Il convient de remarquer que (3) (ou (10)) n'ont de signification physique que si les $p_i(t)$ sont des probabilités. Mais la positivité des $p_i(t)$ est en évidence sous la forme (10), et on tire des équations (I) par addition membres à membres

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=N_1}^{N_2} p_i(t) = 0$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{i=N_1}^{N_2} p_i(t) = \sum_{i=N_1}^{N_2} p_i(0) = 1.$$

III. — ÉTUDE DU SPECTRE DE A

On peut améliorer considérablement l'expression des $p_i(t)$ par une étude plus poussée de la matrice A. Soit $r_0, r_1, \ldots, r_{N_2-N_1}$ les composantes d'un vecteur propre de A, associé à la valeur propre ρ. Elles sont données par :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \rho r_0 = -\lambda_{N_1} r_0 + \mu_{N_1+1} r_1 \\ \rho r_i = \lambda_{N_1+i-1} r_{i-1} - (\lambda_{N_1+i} + \mu_{N_1+i}) r_i + \mu_{N_1+i+1} \cdot r_{i+1} \\ \rho r_{N_2-N_1} = \lambda_{N_2-1} r_{N_2-N_1-1} - \mu_{N_2} \cdot r_{N_2-N_1}. \end{cases}$$

Nous substituerons momentanément à (II) le système (II').

$$\text{(II')} \qquad \begin{cases} r_{-1} = 0 \qquad r_0 = 1 \\ \rho r_i = \alpha_{i-1} r_{i-1} - \beta_i r_i + \gamma_{i+1} r_{i+1} \qquad i \geqslant 0 \end{cases}$$

dans lequel :

$$\alpha_{i-1} = \lambda_{N_1+i-1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1$$

$$\beta_i = \lambda_{N_1+i} + \mu_{N_1+i} \qquad 0 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1$$

$$\gamma_{i+1} = \mu_{N_1+i+1} \qquad 0 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1 - 1,$$

Ces paramètres étant définis de façon arbitraire pour les autres valeurs de l'indice, avec la restriction que les α_i et γ_i seront pris positifs.

On remarque que (II') permet la détermination de proche en proche de tous les r_i d'indice positif, de façon unique, et que ceux-ci apparaissent par rapport au paramètre ρ, comme des polynômes dont le degré est égal à leur indice. Nous les noterons dorénavant r_0, $r_1(\rho)$, $r_2(\rho)$, ..., $r_i(\rho)$.

Il est possible de déterminer au moins une fonction de poids $\psi(\rho)$, croissante, par rapport à laquelle les polynômes $r_i(\rho)$ formeront une famille orthogonale (c'est-à-dire qu'à un facteur près, les polynômes de Tchebicheff au sens large de $\psi(\rho)$, seront les $r_i(\rho)$).

Si on suppose en effet l'existence de $\psi(\rho)$, ses moments

$$c_i = \int_R \rho^i d\psi(\rho) \tag{11}$$

seront tous déterminés de façon unique par la seule condition :

$$\int_R r_0(\rho) r_i(\rho) d\psi(\rho) = \int_R r_i(\rho) d\psi(\rho) = 0.$$

Une fois cette condition réalisée on en déduira à l'aide de (II′) que

$$\int_R \rho r_i(\rho) d\psi(\rho) = 0$$

et de proche en proche, plus généralement que

$$\int_R \rho^k r_i(\rho) d\psi(\rho) = 0 \qquad k < i$$

ce qui entraîne finalement :

$$\int_R r_j(\rho) r_i(\rho) d\psi(\rho) = 0. \qquad j < i$$

Il suffit donc de montrer que le problème de Hamburger pour les moments est résoluble avec les valeurs (11) trouvées pour les c_n. Ce résultat a été établi par J. Favard dans un cas plus particulier, mais auquel nous pouvons nous ramener. Il suffit de poser :

$$r_i = \frac{\varphi_i}{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_i}$$

pour pouvoir remplacer (II′) par (II″) :

$$\text{(II″)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{-1} = 0 & \varphi_0 = 1 \\ \rho\varphi_i = \alpha_{i-1}\gamma_i\varphi_{i-1} - \beta_i\varphi_i + \varphi_{i+1} & \qquad i \geqslant 0 \end{array} \right.$$

qui est le cas étudié par J. Favard sous la condition $\alpha_{i-1}\gamma_i > 0$, ici naturellement réalisée avec le choix que nous avons fait pour les α_i et γ_i.

L'existence d'une fonction $\psi(\rho)$ orthogonalisant la famille $\varphi_i(\rho)$ étant ainsi assurée, cette fonction conviendra également pour la famille $r_i(\rho)$ en vertu de :

$$\int_R r_j(\rho)r_i(\rho)d\psi(\rho) = \frac{1}{\prod_1^i \gamma_n \prod_1^j \gamma_m} \int_R \varphi_j(\rho)\varphi_i(\rho)d\psi(\rho) = 0 \qquad i \neq j$$

Naturellement, non seulement, il est possible que le problème des moments admette plusieurs solutions, mais encore les c_n peuvent être modifiés par changement des α_i, β_i, γ_i qui sont largement arbitraires. On peut aussi chercher à donner à $\psi(\rho)$ un support compact en se contentant d'orthogonaliser les premiers polynômes de la suite $r_i(\rho)$; mais ceci ne sera pas utilisé dans la suite, seule l'existence de $\psi(\rho)$ étant réclamée (1).

Des propriétés des familles orthogonales de polynômes on déduit maintenant que les $N_2 - N_1 + 1$ zéros de $r_{N_2-N_1+1}(\rho)$ sont réels et distincts; on les notera en les rangeant par ordre décroissant $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{N_2-N_1}$. Si alors dans (II') on remplace ρ par l'une de ces valeurs, on constate que, pour $0 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1$, les équations obtenues ne sont autres que celles figurant dans (II). Il s'ensuit que :

ρ_ν *est valeur propre de* A *associée au vecteur propre*

$$\{ r_0, r_1(\rho_\nu), r_2(\rho_\nu), \ldots, r_{N_2-N_1}(\rho_\nu) \}^* \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant N_2 - N_1.$$

Les $N_2 - N_1 + 1$ valeurs propres de A sont donc *réelles et distinctes* et on peut *diagonaliser* cette matrice. Il est même possible de faire usage d'une matrice modale orthogonale. On connaît en effet pour les polynômes orthogonaux $r_i(\rho)$ la formule (voir Szego, p. 42) dans laquelle les k_i sont des constantes.

$$\sum_{i=0}^{N_2-N_1} r_i(x).r_i(y) = \frac{k_{N_2-N_1}}{k_{N_2-N_1+1}} \cdot \frac{r_{N_2-N_1+1}(x).r_{N_2-N_1}(y) - r_{N_2-N_1}(x)r_{N_2-N_1+1}(y)}{x-y}$$

qui donne lorsque l'on remplace x et y par des zéros de $r_{N_2-N_1+1}(\rho)$

$$(13) \qquad \sum_{i=0}^{N_2-N_1} r_i(\rho_\nu).r_i(\rho_\tau) = 0 \qquad \tau \neq \nu$$

(1) On trouvera une utilisation intéressante de telles familles de polynômes, pour l'étude systématique des processus de naissance et décès, dans des cas plus généraux que ceux que nous considérons dans Karlin S. and J. McGrégor : The classification of Birth and Death Processes. Voir aussi leur récente étude sur les polynômes de Hahn.

$$(14) \qquad \sum_{i=0}^{N_2-N_1} r_i^2(\rho_\nu) = \frac{k_{N_2-N_1}}{k_{N_2-N_1+1}} \cdot r'_{N_2-N_1+1}(\rho_\nu) . r_{N_2-N_1}(\rho_\nu).$$

Il suffira donc de déterminer des coefficients b_ν tels que

$$\sum_{i=0}^{N_2-N_1} \{ b_\nu r_i(\rho_\nu) \}^2 = b_\nu^2 \sum_{i=0}^{N_2-N_1} r_i^2(\rho_\nu) = 1$$

pour que la matrice modale $M = \| m_{ij} \|$ qui permet de diagonaliser A soit orthogonale. On a alors :

$$(15) \qquad m_{ij} = b_j r_i(\rho_j) \qquad 0 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1 \qquad 0 \leqslant j \leqslant N_2 - N_1.$$

Ceci étant, on pourra mettre A sous la forme

$$A = MRM^*$$

R étant une matrice diagonale dans laquelle les valeurs propres sont rangées suivant leurs indices croissants. On en déduit

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i\,!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{MR^iM^*t^i}{i\,!} = M \left\{ \sum_i \frac{(Rt)^i}{i\,!} \right\} M^* = Me^{Rt}M^*$$

ce qui permet de remplacer (3) par :

$$(16) \qquad P(t) = Me^{Rt}M^*P(0).$$

Les $p_i(t)$ apparaissent ainsi sous forme d'une somme finie d'exponentielles en t, et comme ils sont tous bornés pour $t > 0$, ces exponentielles doivent avoir un argument négatif, ce qui revient à dire que les valeurs propres de A sont non positives (ce résultat peut d'ailleurs s'établir directement à l'aide des polynômes $r_i(\rho)$).

On a déjà noté la présence de la valeur propre $\rho_0 = 0$, toutes les autres sont donc strictement négatives et les $p_i(t)$ tendent asymptotiquement vers les $p_i(\infty) = p_i$ qui correspondent à la distribution stationnaire étudiée plus haut. La rapidité de cette tendance sera caractérisée par $e^{\rho_1 t}$, ρ_1 étant la valeur propre négative la plus grande.

IV. — Dans les paragraphes précédents, on a ramené l'étude de tout processus logistique à la construction d'une famille de polynômes orthogonaux. Réciproquement, toute famille de polynômes orthogonaux $r_i(\rho)$ satisfait à une relation liant trois polynômes consécutifs et que l'on peut mettre sous la forme :

$$(17) \qquad \rho r_i = \alpha_{i-1} r_{i-1} - \beta_i r_i + \lambda_{i+1} r_{i+1} \qquad i \geqslant 0 \quad r_{-1} = 0.$$

Cette relation n'entraînera le système (II) et par suite les $r_i(\rho)$ ne seront associés à un processus logistique, que si les α, β, γ satisfont aux conditions suivantes :

$$(18) \qquad \begin{cases} \alpha_i > 0 & 0 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1 - 1 \\ \gamma_i > 0 & 1 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1 \end{cases}$$

$$(19) \qquad \begin{cases} \beta_0 = \alpha_0 & \\ \beta_i = \alpha_i + \gamma_i & 1 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1 - 1 \\ \beta_{N_2-N_1} = \gamma_{N_2-N_1}. & \end{cases}$$

Dans certains cas, les coefficients de (17) pourront être non positifs (à condition de respecter cependant (18)), alors que dans l'étude de (II'), tous les α et γ avaient été supposés positifs. Ce fait sera sans importance, car cette dernière hypothèse n'avait été posée que par commodité, et que par ailleurs, une modification de α_{i-1}, β_i, γ_{i+1}, pour $i > N_2 - N_1$ n'altère pas les $N_2 - N_1 + 2$ premiers polynômes, qui interviennent seuls dans notre étude.

Il n'y a aucune raison pour qu'une famille arbitraire de polynômes orthogonaux satisfasse à (18) et (19), mais on peut cependant rechercher si elle ne serait pas liée de façon simple, à une autre famille de polynômes qui serait, elle, associée à un processus logistique.

Soit donc la famille arbitraire $T_i(x)$ donnée par :

$$(20) \qquad T_{i+1}(x) = (A_{i+1}x + B_{i+1})T_i(x) - C_{i+1}T_{i-1}(x) \qquad T_{-1} = 0$$

et posons :

$$r_i(\rho) = v_i T_i(K\rho + h)$$

v_i, K et h étant des constantes.

La famille $r_i(\rho)$ sera donnée par :

$$(21) \qquad \frac{r_{i+1}(\rho)}{v_{i+1}} = (A_{i+1}(K\rho + h) + B_{i+1})\frac{r_i(\rho)}{v_i} - \frac{C_{i+1}r_{i-1}}{v_{i-1}} \qquad r_{-1} = 0$$

relation qui, si les $A_i \neq 0$, se met sous la forme (17) en posant :

$$(22) \quad \alpha_{i-1} = \frac{C_{i+1}v_i}{KA_{i+1}v_{i-1}} \quad \beta_i = \frac{h}{K} + \frac{B_{i+1}}{KA_{i+1}} \quad \gamma_{i+1} = \frac{1}{KA_{i+1}} \cdot \frac{v_i}{v_{i+1}}.$$

La deuxième condition (19) s'écrit :

$$\frac{h}{K} + \frac{B_{i+1}}{KA_{i+1}} = \frac{C_{i+2}}{KA_{i+2}} \cdot \frac{v_{i+1}}{v_i} + \frac{1}{KA_i} \cdot \frac{v_{i-1}}{vi} \qquad 1 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1 - 1$$

et les deux autres conditions (19) se mettent sous la même forme, à condition de poser

$$v_{-1} = v_{N_2-N_1+1} = 0.$$

Finalement si l'on pose $v_i = w_i . A_{i+1}$, les w_i seront donnés par :

$$(23) \qquad \begin{cases} w_{i-1} - (hA_{i+1} + B_{i+1})w_i + C_{i+2}w_{i+1} = 0 & 0 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1 \\ w_{-1} = w_{N_2-N_1+1} = 0. \end{cases}$$

Le raisonnement fait précédemment, montre que, dans la mesure où pour les valeurs considérées de l'indice i, A_i reste non nul et C_i *positif*, le système ci-dessus détermine les w_i sous forme d'une famille orthogonale de polynômes en h. On choisira h de façon à annuler $w_{N_2-N_1+1}(h)$. On remarque alors que $r_{N_2-N_1+1}(\rho) = 0$ quel que soit ρ; mais ρ n'en sera pas moins déterminé lorsque pour ramener (II') à (II), il faudra annuler le premier membre de (21) pour $i = N_2 - N_1$. On prendra donc ρ tel que

$$T_{N_2-N_1+1}(K\rho + h) = 0.$$

Il reste à satisfaire aux inégalités (18) qu'on peut écrire ici :

$$\frac{C_{i+1}}{KA_i}\frac{w_i}{w_{i-1}} > 0 \qquad \frac{1}{KA_{i+1}} \cdot \frac{w_{i-1}}{w_i} > 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant N_2 - N_1 .$$

Si A_i est non seulement non nul, mais encore de *signe déterminé* pour les valeurs de i en jeu, on peut satisfaire à ces conditions de deux manières différentes. Supposons par exemple $A_{i+1} > 0$. Si on prend $K > 0$, il suffira de donner aux $w_i(h)$ le même signe quel que soit $i \in [0, N_2 - N_1]$, ce qu'on réalisera en prenant pour *h le plus grand des zéros* de $w_{N_2-N_1+1}(h)$.

Si $K < 0$ on prendra au contraire pour h le plus petit de ces zéros.

On auıait des résultats analogues avec $A_{i+1} < 0$.

Application. — Les calculs ci-dessus s'appliquent sans peine à plusieurs familles classiques de polynômes. Par exemple, avec les polynômes de Gegenbauer $T_i(x) = C_i^\nu(x)$ il vient

$$A_{i+1} = 2\frac{i+\nu}{i+1} \qquad B_{i+1} = 0 \qquad C_{i+1} = \frac{i+2\nu-1}{i+1}$$

et en posant

$$w_i = (i+1)s_i$$

le système (23) s'écrit :

$$(24) \qquad \begin{cases} is_{i-1} - 2h(i+\nu)s_i + (2\nu+i)s_{i+1} = 0 \\ s_{N_2-N_1+1} = 0 \qquad s_{-1} \text{ arbitraire.} \end{cases}$$

Dans le cas particulier où 2ν *est un entier positif*, on vérifie que la première relation (24) sera satisfaite par la famille

$$s_i = C^{(1-\nu)}_{2\nu+i-1}(h). \tag{25}$$

Il est clair que les zéros de s_0 sont aussi zéros de s_1, puis de s_2... et par suite en annulant $s_{N_2-N_1+1}$, il faudra prendre soin de ne pas utiliser une valeur de h annulant les polynômes d'indice inférieur. En prenant comme on l'a indiqué le plus grand ou le plus petit des zéros de $s_{N_2-N_1+1}$ ceci sera sûrement réalisé.

Il s'ensuit que les polynômes

$$r_i(\rho) = 2(i+\nu)C^{1-\nu}_{2\nu+i-1}(h).C^{\nu}_i(K\rho + h)$$

sont associés au processus logistique défini par

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_{N_1+i-1} &= \alpha_{i-1} = \frac{i+2\nu-1}{2K(i+\nu-1)} \cdot \frac{C^{(1-\nu)}_{2\nu+i-1}(h)}{C^{(1-\nu)}_{2\nu+i-2}(h)} \\ \mu_{N_1+i+1} &= \gamma_{i+1} = \frac{(i+1)}{2K(i+\nu+1)} \cdot \frac{C^{(1-\nu)}_{2\nu+i-1}(h)}{C^{(1-\nu)}_{2\nu+i}} \end{aligned}\right. \tag{26}$$

En particulier si $\nu = \frac{1}{2}$, on retrouve les polynômes de Legendre.

V. — Étudions maintenant de façon exhaustive le cas où λ_n et μ_n sont *des trinômes du second degré en n*.

On posera :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_n &= a_2 n(n-1) + a_1 n + a_0 \\ \mu_n &= b_2 n(n-1) + b_1 n + b_0 \end{aligned}\right.$$

et on formera la fonction génératrice des $p_n(t)$

$$\Phi(s, t) = \sum_{i=N_1}^{N_2} p_i(t) s^i$$

qui devra satisfaire à

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= s \sum_{N_1+1}^{N_2} \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) s^{n-1} - \sum_{N_1}^{N_2} (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) s^n + \frac{1}{s} \sum_{N_1}^{N_2-1} \mu_{n+1} p_{n+1}(t) . s^{n+1} \\ &= s \sum_i a_i s^i \frac{\partial^i \Phi}{\partial s} - \sum_i (a_i + b_i) s^i \frac{\partial^i \Phi}{\partial s^i} + \frac{1}{s} \sum_i b_i s^i \frac{\partial^i \Phi}{\partial s^i} \end{aligned}$$

c'est-à-dire à

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (s-1) \sum_i s^{i-1}(a_i s - b_i) \frac{\partial^i \Phi}{\partial s^i}}$$

Cette équation (III) se réduit au premier ordre lorsque λ_n et μ_n sont du premier degré. Ce fait a déjà été signalé par B. J. Prendiville lequel a formé alors l'intégrale générale de (III) et a obtenu explicitement la solution satisfaisant aux conditions initiales posées.

Nous bornerons donc notre étude au cas a_2 et b_2 non nuls simultanément.

Étude des premiers moments.

On peut déduire de (III) que la fonction caractéristique des $p_i(t)$

$$\chi(x, t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} p_n(t) e^{nx}$$

satisfait à

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \{ a_2(e^x - 1) + b_2(e^{-x} - 1) \} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$
$$+ \{ (a_1 - a_2)(e^x - 1) + (b_1 - b_2)(e^{-x} - 1) \} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \{ a_0(e^x - 1) + b_0(e^x - 1) \} \chi$$

et de cette équation aux dérivées partielles, on peut tirer une infinité d'équations différentielles portant sur les divers moments de l'aléatoire N(t).

Cependant ces équations ne pouvant en général pas être résolues indépendamment les unes des autres, ne donnent pas en termes finis les moments cherchés. Leur utilisation ne semble donc pas préférable au calcul direct à partir de (10). Cependant *lorsque* $a_2 = b_2$ les deux premières équations différentielles se réduisent à

$$\begin{cases} m_1'(t) = (a_0 - b_0)m_0 + (a_1 - b_1)m_1 \\ \dfrac{m_2'(t)}{2} = (a_0 - b_0)m_1 + (a_1 - b_1)m_2 + \dfrac{a_0 + b_0}{2} m_0 + \dfrac{a_1 + b_1 - 2a_2}{2} m_1 + a_2 m_2 \end{cases}$$

qui donnent immédiatement $m_1(t)$ et $m_2(t)$.

On peut se demander si ce cas particulier est physiquement acceptable, puisque précisément les premiers processus logistiques introduits par W. Feller et D. Kendall, l'ont été avec a_2 et b_2 de signes opposés (mais il est vrai avec $a_0 = b_0 = 0$). La condition $a_2 = b_2$ est en tout cas compatible avec les relations posées sur λ_n et μ_n et on obtient les deux types de processus suivants :

$a_2 = b_2 > 0$, les deux zéros de μ_n étant inférieurs aux deux zéros de λ_n. λ_n et μ_n sont alors monotones sur $[N_1, N_2]$.

$a_2 = b_2 < 0$, N_1 étant entre les deux zéros de λ_n, N_2 entre les deux zéros de μ_n. Dans ce cas, λ_n et μ_n ne sont plus nécessairement monotones sur $[N_1, N_2]$ et peuvent présenter un maximum sur cet intervalle.

On verra dans la suite les avantages analytiques certains présentés par ces deux cas particuliers.

Étude de l'équation (III).

C'est une équation parabolique dont nous allons rechercher les solutions élémentaires de la forme $e^{\rho t}f(s)$. Il résulte en effet de l'étude théorique générale que la solution cherchée doit être une combinaison finie de telles solutions élémentaires. $f(s)$ sera donnée par

$$(27)\quad s^2(s-1)(a_2s-b_2)f''+s(s-1)(a_1s-b_1)f'+\{(s-1)(a_0s-b_0)-\rho s\}f=0.$$

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque a_2 et b_2 sont différents et qu'aucun d'eux n'est nul, cette équation présente quatre singularités régulières 0, 1, $\frac{b_2}{a_2}$, ∞. C'est une équation de Fuchs généralisant celle de Lamé et qui a été étudiée par Heun.

Les équations déterminantes au voisinage de 0 et de ∞ (respectivement) seront :

$$b_2r(r-1) + b_1r + b_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_r = 0$$
$$a_2r(r+1) - a_1r + a_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_{-r} = 0.$$

Ce qui donne pour les couples de valeurs caractéristiques correspondants

$$\left(N_1\,;\,\frac{b_0}{b_2N_1}\right) \quad \text{et} \quad \left(-N_2\,;\,\frac{-a_0}{a_2N_2}\right).$$

Aux points 1 et $\frac{b_2}{a_2}$ ces couples seront $(0;\,1)$ et $\left(0;\;1+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2b_2}\right)$.

Pour mettre (27) sous forme canonique, il suffit d'assurer qu'aux trois points singuliers à distance finie, l'une des valeurs caractéristiques soit nulle, ce qu'on réalise en posant

$$(28)\qquad f(s) = s^{N_1}g(s).$$

Le diagramme de l'équation est alors

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \frac{0}{0} & ; & \frac{1}{0} & ; & \frac{b_2/a_2}{0} & ; & \frac{\infty}{N_1 - N_2} \\ \frac{b_0}{b_2 N_1} - N_1 & ; & 1 & ; & 1 + \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_1}{a_2} & ; & N_1 - \frac{a_0}{a_2 N_2} \end{array}\right\}$$

$g(s)$ est donc donnée par

(29) $$s(s-1)(a_2 s - b_2)g'' + (s-1)\{(2N_1 a_2 + a_1)s - (2N_1 b_2 + b_1)\}g' + \{\lambda_{N_1}(s-1) - \rho\}g = 0$$

ou, sous la forme canonique de Heun

(29') $$s(s-1)(s-a)g'' + (s-1)((\alpha+\beta+1)s - a\gamma)g' + \alpha\beta(s-q)g = 0$$

à condition de poser

(30) $$\boxed{\begin{array}{c} \alpha = N_1 - N_2 \quad \beta = N_1 - \frac{a_0}{a_2 N_2} \quad \gamma = 1 + N_1 - \frac{b_0}{b_2 N_1} \quad \delta = 0 \\ a = \frac{b_2}{a_2} \qquad q = 1 + \frac{\rho}{\lambda_{N_1}} \end{array}}$$

L'équation (29) admet une solution analytique au voisinage de l'origine qui est la *fonction hypergéométrique généralisée de Heun* $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; s)$ et on remarque d'autre part que :

N_1 et $\frac{b_0}{b_2 N_1}$ étant les deux zéros du trinôme μ_n, la condition $\mu_n > 0$ pour $n \in [N_1, N_2]$ entraîne que :

si $b_2 > 0$, $n \in]N_1, N_2]$ ne doit pas être compris entre les deux zéros et par suite

$$\frac{b_0}{b_2 N_1} \leqslant N_1$$

si $b_2 < 0$, $n \in]N_1, N_2]$ doit être compris entre les deux zéros du trinôme et par suite

$$N_2 < \frac{b_0}{b_2 N_1}.$$

Il s'ensuit que $\frac{b_0}{b_2 N_1} - N_1$ est $\leqslant 0$ ou bien $> N_2 - N_1$. Au voisinage de l'origine, (29) n'admet donc en général pour solutions analytiques que les multiples de la fonction F de Heun. Exceptionnellement, si $\frac{b_0}{b_2 N_1} - N_1$ est un entier positif, il peut exister une autre solution analytique au voisinage de zéro et linéairement indépendante de F, mais cette solution présentera à l'origine un zéro d'ordre $> N_2 - N_1$. Or nous recherchons pour l'équation (29) des solutions $g(s)$ qui doivent être des polynômes de degré au plus égal à $N_2 - N_1$. $g(s)$ s'exprime donc nécessairement à l'aide de la fonction F de Heun, qui ne se réduira à un polynôme que si q prend certaines valeurs caractéristiques correspondant aux diverses valeurs propres ρ_ν.

On en déduit pour l'équation (III) les solutions élémentaires suivantes :

$$e^{\rho_\nu t}.s^{N_1}.F\left(a,\, 1+\frac{\rho_\nu}{\lambda_{N_1}}\,;\, \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, 0\,;\, s\right) \quad \nu = 0, 1, \ldots, N_2 - N_1. \tag{31}$$

La solution de (III) qui se réduit pour $t = 0$ à une fonction donnée $\Phi(s, 0)$ s'exprimera en combinaison linéaire de ces fonctions élémentaires à condition de choisir des multiplicateurs B_ν tels que :

$$\Phi(s, 0) = \sum_{\nu=0}^{N_2-N_1} B_\nu s^{N_1} F\left(a,\, 1+\frac{\rho_\nu}{\lambda_{N_1}}\,;\, \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, 0\,;\, s\right). \tag{32}$$

Les B_ν peuvent se déterminer de la façon suivante.

Si $\nu = 0$, $\rho_0 = 0$. L'équation (29′) est simplifiable par $(s - 1)$ et elle se réduit alors à une équation hypergéométrique. Les paramètres α, β, γ deviennent les paramètres correspondants de Gauss et il suffit de ramener le point singulier $a = \dfrac{b_2}{a_2}$ en 1 pour mettre l'équation sous forme canonique. Il s'ensuit que

$$F(a, 1\,;\, \alpha, \beta, \gamma, 0\,;\, s) = F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{s}{a}\right).$$

Comme cette fonction donne (à une constante multiplicative près) toutes les solutions stationnaires de (III), on aura

$$\Phi(s, +\infty) = B_0 s^{N_1} F(\alpha, \beta, \gamma, s/a)$$

et en faisant $s = 1$,

$$B_0 = 1/F(\alpha, \beta, \gamma, a^{-1}).$$

Si $\nu > 0$, $\rho_\nu \neq 0$ et par suite (29) entraîne $g(1) = 0$. D'autre part, nous savons que les $g(s)$ sont des polynômes de degré $\leqslant N_2 - N_1$ et par suite, nous possédons ainsi une condition de comportement au voisinage de l'infini. Ces deux remarques permettent de calculer les B_ν suivant la méthode de *Sturm-Liouville*.

Mettons l'équation (29′) sous la forme

$$(33)\quad \frac{d}{ds}\left[|s-a|^{\alpha+\beta-\gamma+1}|s|^{\gamma}\frac{dg}{ds}\right]+\frac{\alpha\beta(s-q)\,|s-a|^{\alpha+\beta-\gamma+1}|s|^{\gamma}}{s(s-1)(s-a)}g=0$$

d'où l'on tire en posant

$$g_{\nu}=\mathrm{F}\left(a,\,1+\frac{\rho_{\nu}}{\lambda_{N_1}}\,;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,0\,;\,s\right)\qquad \nu=1,2,\ldots,N_2-N_1$$

$$(34)\quad \frac{d}{ds}\left\{|s-a|^{\alpha+\beta-\gamma+1}|s|^{\gamma}\left(g_m\frac{dg_n}{ds}-g_n\frac{dg_m}{ds}\right)\right\}$$
$$-\frac{\alpha\beta}{\lambda_{N_1}}(\rho_n-\rho_m)\frac{|s-a|^{\alpha+\beta-\gamma+1}|s|^{\gamma}}{s(s-1)(s-a)}g_ng_m=0.$$

Nous allons montrer qu'il est possible, dans tous les cas, de déterminer un intervalle d'intégration [K, L] permettant de mettre (21) sous la forme

$$(35)\quad \left[|s-a|^{\alpha+\beta-\gamma+1}|s|^{\gamma}(g_mg_n'-g_ng_m')\right]_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}$$
$$=\frac{\alpha\beta(\rho_n-\rho_m)}{\lambda_{N_1}}\int_{\mathrm{K}}^{\mathrm{L}}\frac{|s-a|^{\alpha+\beta-\gamma+1}|s|^{\gamma}}{s(s-1)(s-a)}\cdot g_ng_m ds$$

l'expression intégrée au premier membre étant nulle en L et en K et l'intégrale du second membre ayant un sens.

En revenant à la condition $\lambda_n > 0$ pour $n \in [N_1, N_2[$, λ_n s'annulant de plus pour N_2 et $\frac{a_0}{a_2N_2}$, il vient

Si $a_2 > 0$, $n \in [N_1, N_2[$ doit être extérieur aux zéros de λ_n et par suite

$$\frac{a_0}{a_2N_2} \geqslant N_2.$$

Si $a_2 < 0$, $n \in [N_1, N_2[$ doit être intérieur aux zéros de λ_n d'où

$$\frac{a_0}{a_2N_2} < N_1.$$

En réunissant ces résultats avec ceux déduits ci-dessus de la considération de $\mu_n > 0$, il viendra (pour alléger les expressions nous notons momentanément S la fonction sous le signe somme au second membre de (35) et $\mathfrak{J}$ la fonction située dans le crochet du premier membre de cette même relation) :

$\underline{b_2 > 0}$ $\Rightarrow \gamma = 1 + N_1 - \frac{b_0}{b_2N_1} \geqslant 1$

donc $\mathfrak{J}(0) = 0$ et S est continue pour $s = 0$.

$\underline{a_2 > 0}$ $\Rightarrow (\alpha+\beta-\gamma+1)+\gamma+2(N_2-N_1-1) = N_2 - \frac{a_0}{a_2N_2} - 1 \leqslant -1.$

Donc $\mathfrak{J}$ s'annule à l'infini, car par suite de la réduction des termes de plus haut degré en s, $g_n g'_m - g_m g'_n$ est de degré $2(N_2 - N_1 - 1)$ au plus. D'autre part, l'intégrale au second membre de (35) converge si l'une des bornes est infinie.

$$\underline{b_2 < 0, \quad a_2 < 0} \Rightarrow \alpha + \beta - \gamma + 1 = \left(\frac{b_0}{b_2 N_1} - N_2\right) + \left(N_1 - \frac{a_0}{a_2 N_2}\right) > 0.$$

Donc le second membre de (35) a un sens si $a \in [K, L]$ tandis que $\mathfrak{J}(a) = 0$.

On se rappellera d'autre part que pour $s = 1$, le second membre de (35) a également un sens, tandis que $\mathfrak{J}(1) = 0$ (tout au moins, ce qui est le cas ici, lorsque les indices m et n sont positifs).

Remarquons enfin que si $m \neq n$

$$\frac{\alpha\beta}{\lambda_{N_1}}(\rho_n - \rho_m) = \frac{N_1 - N_2}{\lambda_{N_1}}\left(N_1 - \frac{a_0}{a_2 N_2}\right)(\rho_n - \rho_m) \neq 0.$$

En réunissant tous ces résultats on en déduit

Si $\underline{b_2 > 0,\ b_2 > a_2}$, alors a est soit < 0, soit > 1 et $\mathfrak{J}$ sera continue sur $[0, 1]$ et nulle aux bornes. On en déduit :

$$\int_0^1 \frac{|s - a|^{\alpha+\beta-\gamma+1} |s|^\gamma}{s(s-1)(s-a)} g_n(s) g_m(s) ds = 0 \qquad \begin{matrix} m \neq 0 \\ n \neq 0 \\ m \neq n \end{matrix}$$

$g_n(s)$ et $g_m(s)$ sont ainsi des polynômes orthogonaux sur $[0, 1]$ par rapport à la fonction de poids

$$w(s) = \frac{|s - a|^{\alpha+\beta-\gamma+1} |s|^\gamma}{s(s-1)(s-a)}. \tag{36}$$

Si $\underline{a_2 > 0,\ a_2 > b_2}$, on parvient au même résultat en prenant

$$[L, K] = [1, +\infty].$$

Si $\underline{b_2 < 0,\ a_2 < 0}$, même résultat avec $[L, K] = [1, a]$.

En revenant à la formule (32), ces propriétés d'orthogonalité donnent le coefficient B_ν, d'indice positif, sous la forme

$$B_\nu = \frac{\int_K^L [\Phi(s, 0)s^{-N_1} - B_0 F(\alpha, \beta, \gamma, s/a)] w(s) g_\nu(s) ds}{\int_K^L g_\nu^2(s) w(s) ds} \tag{37}$$

et par suite $\Phi(s, t)$ sera donnée explicitement par

$$\boxed{\Phi(s,t) = s^{N_1}\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, s/a)}{F(\alpha, \beta, \gamma, 1/a)} + \sum_{\nu=1}^{N_2-N_1} B_\nu e^{\rho_\nu t} s^{N_1} F\left(a, 1+\frac{\rho_\nu}{\lambda_{N_1}}; \alpha, \beta, \gamma, 0; s\right)} \tag{38}$$

CAS PARTICULIERS. — Il nous reste à examiner trois cas :

a) $a_2 = 0$. L'équation (29) se réduit à

$$-b_2 s(s-1)g'' + (s-1)\{a_1 s - (2N_1 b_2 + b_1)\}g' + \{\lambda_{N_1}(s-1) - \rho\}g = 0$$

pour laquelle le point à l'infini est maintenant un point singulier irrégulier. On obtiendra les solutions élémentaires à partir de (31) en faisant tendre a_2 vers zéro. En particulier les solutions stationnaires seront données par

$$sg'' + \left(\gamma - \frac{a_1}{b_2}s\right)g' - \frac{\lambda_{N_1}}{b_2}g = 0 \tag{39}$$

et par suite s'exprimeront à l'aide du polynôme de Laguerre $L_{N_2-N_1}^{(\gamma-1)}\left(\frac{a_1}{b_2}s\right)$.
La relation (35) sera remplacée par :

$$\left[e^{-\frac{a_1}{b_2}s}|s|^\gamma(g_m g_n' - g_m' g_n)\right]_K^L = \frac{\rho_n - \rho_m}{-b_2}\int_K^L \frac{e^{-\frac{a_1}{b_2}s}|s|^\gamma}{s(s-1)} g_n g_m ds. \tag{40}$$

Or ici $\lambda_n = a_1 n + a_0 = a_1(n - N_2)$ donc $a_1 < 0$. Il s'ensuit que

— ou bien $b_2 > 0$, donc $\gamma \geqslant 1$. On prendra alors $[K, L] = [0, 1]$,
— ou bien $b_2 < 0$, on prendra $[K, L] = [1, +\infty]$.

Les formules (37) et (38) s'adapteront sans difficulté.

b) $b_2 = 0$, alors $a = 0$ et l'origine devient un point singulier irrégulier pour l'équation (27). Il n'est pas nécessaire de recommencer les calculs et dans les formules générales, on remarque, en faisant $a \to 0$, $a\gamma \to \frac{-b_0}{a_2 N_1}$, que les solutions stationnaires seront données par

$$\Phi(s, +\infty) = B_0 s^{N_1} {}_2F_0\left(\alpha, \beta, \frac{-a_2 N_1}{b_0}s\right)$$

et que d'autre part

$$|s-a|^{-\gamma}|s|^\gamma = e^{-\gamma \operatorname{Log}\left|\frac{s-a}{s}\right|}$$
$$= e^{-\gamma\left\{-\frac{a}{s} + o\left(\frac{a}{s}\right)\right\}} \to e^{-\frac{b_0}{a_2 N_1 s}}.$$

D'où la nouvelle expression de $w(s)$

(41) $$w(s) = \frac{|s|^{\alpha+\beta-1} e^{-\frac{b_0}{a_2 N_1 s}}}{(s-1)}.$$

Le cas $b_2 = 0$, $a_2 < 0$ s'obtiendra à partir de $b_2 > 0 > a_2$ en faisant tendre b_2 vers zéro. Les B_ν seront donc donnés par (37) avec $[K, L] = [0, 1]$.

Le cas $b_2 = 0$, $a_2 > 0$ s'obtiendra à partir de $a_2 > 0 > b_2$ en faisant tendre b_2 vers zéro. On prendra donc $[K, L] = [1, +\infty]$.

c) $\underline{a_2 = b_2}$, c'est le cas le plus intéressant, car l'équation (27) ne présentera alors plus que trois points singuliers tous réguliers et par suite se réduira à une équation de Gauss. Les polynômes de Heun deviennent des polynômes hypergéométriques.

(29′) s'écrit

(42) $$s(s-1)^2 g'' + (s-1)((\alpha+\beta+1)s-\gamma)g' + \alpha\beta(s-q)g = 0$$

dont l'équation déterminante au voisinage de 1 sera

(43) $$r(r-1) + (\alpha+\beta+1-\gamma)r + \alpha\beta(1-q) = 0.$$

Cette équation doit admettre une solution positive ou nulle entière $r = n$, ce qui exige que ρ prenne l'une des valeurs caractéristiques

(44) $$\rho_n = n(n+\alpha+\beta-\gamma)\frac{\lambda_{N_1}}{\alpha\beta}.$$

On pose alors $g(s) = (s-1)^n h(s)$, $h(s)$ satisfaisant à

$$s(1-s)k'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+2n+1)s\} k' - (n\gamma + \alpha\beta q)k = 0.$$

Les solutions élémentaires de (III) seront donc

(45) $$e^{\rho_n t} s^{N_1}(s-1)^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma, s).$$

En ce qui concerne le calcul des B_ν, on peut traiter le cas $a_2 = b_2 > 0$ en partant du cas $b_2 > 0$, $b_2 > a_2$, dans lequel $[K, L] = [0, 1]$ puis en faisant tendre a_2 vers b_2.

Il n'en est pas de même si $a_2 = b_2 < 0$. En effet, il faudrait partir de $a_2 < 0$ et $b_2 < 0$, ce qui entraîne $[K, L] = [1, a]$, puis faire tendre a vers 1.

Mais l'intervalle d'intégration devient alors de longueur nulle et la formule (37) n'a plus de sens. Aussi calculerons-nous directement les B_ν à partir de

(46) $$\Phi(s, 0) = \sum_{n=0}^{N_2-N_1} B_n s^{N_1}(s-1)^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma, s).$$

Si on pose $s = 1 - z$ l'équation de Gauss se change en une autre équation de Gauss, avec permutation des points singuliers 0 et 1, et conservation des paramètres $\alpha + n$ et $\beta + n$. Il s'ensuit que

$$F(\alpha + n, \beta + n, \gamma, 1 - z) = k_n F(\alpha + n, \beta + n, \alpha + \beta - \gamma + 1 + 2n, z)$$

k_n se déterminant en posant $z = 0$. D'où $k_n = F(\alpha + n, \beta + n, \gamma, 1)$.
(46) se change en

$$(47)\quad \Phi(1-z, 0)(1-z)^{-N_1} = \sum_{n=0}^{N_2-N_1} B_n k_n (-z)^n F(\alpha+n, \beta+n, \alpha+\beta-\gamma+1+2n, z).$$

On supposera pour simplifier (le cas général s'en déduisant immédiatement) que l'effectif initial de la population est N_0 donné. L'identification des coefficients de z^p dans (47) entraîne

$$(48)\quad \binom{N_0 - N_1}{p}(-1)^p = \sum_{n=0}^{p} B_n k_n (-1)^n \frac{(\alpha)_p}{(\alpha)_n} \cdot \frac{(\beta)_p}{(\beta)_n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1 + 2n)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1 + n + p)} \cdot \frac{1}{(p - n)\,!}$$

formule dans laquelle

$$(a)_p = a(a + 1) \dots (a + p - 1).$$

En posant

$$(49)\quad y_n = \frac{B_n k_n (-1)^n}{(\alpha_n)(\beta_n)} \Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1 + 2n)$$

on parviendra à

$$(50)\quad \sum_{n=0}^{p} \frac{y_n}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1 + n + p)\,(p - n)\,!} = \binom{N_0 - N_1}{p}(-1)^p \frac{1}{(\alpha)_p(\beta)_p}$$

$$p = 0, 1, \dots, N_2 - N_1$$

système qui admet (2) la seule solution

$$y_n = (-1)^n (\alpha + \beta - \gamma + 2n) \sum_{p=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + n + p)}{(n - p)\,!} \binom{N_0 - N_1}{p} \frac{1}{(\alpha)_p(\beta)_p}$$

d'où finalement

$$B_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{k_n \Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 2n)} \sum_{p=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + n + p)\binom{N_0 - N_1}{p}}{(n - p)\,!(\alpha)_p(\beta)_p}.$$

(2) Voir Ph. PICARD (2), p. 30.

BIBLIOGRAPHIE

FAVARD J., Sur les polynômes de Tchebicheff, *C. R. Ac. Sc. Paris*, vol. 200, 1935, p. 2053.

FELLER W., Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung, *Acta Biotheoretica*, t. 5, 1939, p. 11-40.

HEUN K., Zur Theorie der Riemann'schen Functionen, *Math. Annalen*, Leipzig, 1889, p. 161.

KARLIN S. et MCGREGOR J., The Classification of Birth and Death Processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 86, 1957, p. 366-400.

KARLIN S. et MCGREGOR J., The Hahn Polynomials Formulas and an Application, *Scripta Mathematica*, vol. XXVI, Spring Issue, novembre 1961.

KENDALL D. G., *J. of the Roy. Stat. Soc.*, Série B, vol. XI, n° 2, 1949, p. 244 ss.

PEARL R., *The biology of population growth*, 1925.

PICARD Ph., (1) *C. R. Ac. Sc. Paris*, vol. 256, p. 1656 ss. ; (2) Étude analytique de l'équation de diffusion des gènes et de certaines de ses généralisations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. I, n° 1, 1964, p. 38 ss.

PRENDIVILLE B. J., *in* BHARUCHA-RED, *Elements of Markov Processes and their applications*, p. 175 et 122.

SZEGÖ G., *Orthogonal Polynomials*, American Math. Soc., 1939.

VERHULST P. F., *Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement*, 1838.

VOLTERRA V., *Les associations biologiques au point de vue mathématique*, Hermann, Paris, 1935.

VOLTERRA V., *Leçons sur la Théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

(Manuscrit reçu le 21 juillet 1965).