ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PHILIPPE KERDELHUE

Équation de Schrödinger magnétique périodique avec symétrie d'ordre six : mesure du spectre II

Annales de l'I. H. P., section A, tome 62, nº 2 (1995), p. 181-209
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1995__62_2_181_0>

© Gauthier-Villars, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 62, n° 2, 1995, p. 181-209. *Physique théorique*

Équation de Schrödinger magnétique périodique avec symétrie d'ordre six : mesure du spectre II

par

Philippe KERDELHUE

CNRS Orsay, URA 760, Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques,
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

ABSTRACT. – We continue the study of the two dimensional semi-classical Schrödinger equation, with periodic magnetic field and potential in the presence of a sixfold rotational symmetry. We treat the so-called triangular case in which the potential reaches its minimum once per periodicity cell.

The lower part of spectrum coincides with the spectra of pseudodifferential operators quantized with a new Planck constant for which we give an explicit formula.

We show that the measure of this part of the spectrum is estimated by this new constant.

RÉSUMÉ. – On poursuit l'étude de l'équation de Schrödinger semi-classique en dimension deux, en présence d'un petit champ magnétique et d'un potentiel périodique, et possédant une symétrie de rotation d'ordre six. On traite le cas dit triangulaire où le potentiel atteint son minimum une fois par cellule de périodicité.

La partie inférieure du spectre de ces opérateurs coïncide avec le spectre d'opérateurs pseudo-différentiels à symboles périodiques dans les deux variables et quantifiés par une nouvelle constante de Planck pour laquelle on a une formule explicite.

On montre que la mesure de cette partie du spectre est estimée par cette nouvelle constante.

Mots clés : Analyse spectrale, semi-classique, constructions B.K.W.

1991 *Code Matière AMS :* 35 A 20, 35 A 35, 34 B 20, 39 A 10, 35 S 05, 81 E 15, 35 J 10.

1. INTRODUCTION

Cet article est une étude semi-classique de l'« opérateur de Harper triangulaire », qui s'introduit dans divers problèmes de physique mathématique, par exemple lors de l'étude de l'équation de Schrödinger périodique, en dimension deux, en présence d'un petit champ magnétique et d'une symétrie de rotation d'ordre six.

Plus précisément, on étudie des perturbations de l'opérateur de Harper triangulaire, agissant sur $L^2(\mathbb{R})$, qui est le h-quantifié de Weyl du symbole $p_0(x, \xi) = \cos x + \cos\left(\frac{x}{2} + \xi\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \xi\right)$, c'est-à-dire :

$$p_0\, u(x) = \frac{1}{2\pi h} \int\int e^{i\frac{(x-y)\xi}{h}}\, p_0\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi.$$

Les perturbations étudiées seront des quantifiés de Weyl de symboles proches de p_0 et possédant les mêmes symétries. Pour ces opérateurs, dont on montre dans la dernière section qu'ils proviennent effectivement de l'étude de l'opérateur de Schrödinger avec symétrie d'ordre six, on fait une étude semi-classique, donnant une estimation de la mesure de leur spectre pour h assez petit.

Plusieurs articles ont été décrits sur cet opérateur.

F. H. Claro et G. H. Wannier [Cl-Wa] ont tracé l'analogue du fameux papillon de Hofstadter, dessin représentant le spectre de l'opérateur p_0 en fonction de la « constante de Planck » h. En pratique, le dessin est fait pour $h = 2\pi p/q$ où p et q sont des entiers et q est assez petit; la théorie de Floquet permet d'affirmer dans ce cas que le spectre est formé de q bandes qui peuvent se toucher mais pas se chevaucher, et le problème du nombre exact de bandes disjointes est ouvert. F. H. Claro et G. H. Wannier étudient la densité d'état dans les trous du papillon.

Pour un opérateur légèrement différent du nôtre, J. Bellissard, C. Kreft et R. Seiler [Be-Kr-Si] utilisent les C^*-algèbres pour obtenir une asymptotique semi-classique du spectre au voisinage des bords des bandes simples correspondant aux valeurs rationnelles de $h/2\pi$.

Des études plus numériques ont été faites par A. Barelli, R. Fleckinger et C. Kreft [Ba-Fl]-[Ba-Kr] pour d'autres variantes de l'opérateur de Harper et mettent à jour des effets semi-classiques intéressants, notamment des effets de « tresses », aux bords des bandes pour des opérateurs à plusieurs puits micro-locaux par cellule de périodicité.

M. Wilkinson et E. Austin, dans un article [Wi-Au] non complètement rigoureux mathématiquement, produisaient une étude microlocale de l'opérateur de Harper triangulaire et même d'une classe d'opérateurs un peu plus large. Ils considèrent des puits microlocaux dans l'espace des phases $T^* \mathbb{R}$ interagissant par effet tunnel comme des puits de potentiel dans le cas de l'équation de Schrödinger, et arrivent ainsi à majorer le spectre hors d'un petit voisinage de la valeur critique -1 du symbole p_0.

Dans la thèse rédigée sous la direction de J. Sjöstrand [Ke], j'ai pu obtenir une démonstration rigoureuse des résultats de M. Wilkinson et E. Austin en m'inspirant des trois articles écrits par B. Helffer et J. Sjöstrand [He-Sj;1-3] sur l'opérateur de Harper $\cos x + \cos h D_x$. Ces auteurs utilisent une procédure de renormalisation consistant à ramener l'étude du spectre de l'opérateur de Harper, au voisinage de l'un quelconque de ses points, à celle du spectre d'une perturbation de l'opérateur de Harper ou d'un second modèle, quantifiée par une nouvelle constante de Planck. Réitérant indéfiniment ce processus, ils montrent que le spectre est de mesure nulle pour certaines valeurs de h.

Dans le présent article, je poursuis l'étude faite dans [Ke] en étudiant le spectre au voisinage de la valeur critique -1, correspondant aux points selle du symbole p_0. Cette étude est très inspirée de [He-Sj;3] dont j'utilise la ligne directrice et plusieurs résultats. Citons maintenant les théorèmes obtenus :

THÉORÈME 1. – *Soit $\varepsilon > 0$ et $p(x, \xi)$ un symbole analytique, réel sur le réel, défini sur le domaine $\left\{ (x, \xi);\ |\operatorname{Im} x| + |\operatorname{Im} \xi| \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}$ et tel que sur ce domaine :*

$$|p - p_0| \leq \varepsilon \tag{1.1}$$

$$p(x, -\xi) = p(x, \xi) \tag{1.2}$$

$$p \circ \rho = p \qquad \text{où} \quad \rho(x, \xi) = \left(\frac{x}{2} - \xi,\ \frac{3x}{4} + \frac{\xi}{2} \right) \tag{1.3}$$

$$p(x + 2\pi, \xi - \pi) = p(x, \xi). \tag{1.4}$$

Soit σ_h le spectre du h-quantifié de Weyl de p. Posons $c(p) = p(0, \pi)$ et notons par des barres verticales la mesure de Lebesgue. Pour tout $\delta > 0$, il existe $C > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, et $\varepsilon_2 > 0$ que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$:

$$|c(p) + 1| \leq \varepsilon$$

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z}, \\ |\sigma_h \cap [c(p) + nh,\ c(p) + (n+1)h] \\ \qquad \cap [-1-\varepsilon_2,\ -1+\varepsilon_2]| \leq C\, e^{-(\pi-\delta)|n|}\, h \end{cases}$$

$$(1.6)\qquad |\sigma_h \cap (]-\infty,\ -1-\varepsilon_2] \cup [-1+\varepsilon_2,\ +\infty[)| \leq C\, e^{-\frac{1}{Ch}}$$

et donc, pour un certain $C' > 0$ *:*

$$(1.7)\qquad |\sigma_h| \leq C'\, h.$$

Ce résultat est d'une certaine façon optimal. En effet on montrera aussi :

THÉORÈME 2. – *Il existe* $c > 0$ *tel que, si* p *vérifie les hypothèses du théorème* 1 *avec* ε *assez petit, alors pour tout entier* q *:*

$$(1.8)\qquad |\sigma_{\frac{2\pi}{q}}| \geq \frac{c}{q}.$$

Dans un article précédent [Ke], on montrait l'estimation (1.6), sans l'hypothèse (1.2), pour ε_2 donné et ε assez petit en fonction de ε_2. Il nous reste donc à examiner la zone de branchement $[-1-\varepsilon_2,\ -1+\varepsilon_2]$, ainsi appelée parce qu'elle contient les valeurs critiques de p correspondant aux points selle; on pourra pour cette étude supposer ε_2 aussi petit qu'on voudra.

Comme déjà annoncé, on fera le lien avec l'équation de Schrödinger. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique :

$$H_{t,\,h_0} = (h_0\, D_{x_1} - t\, A_1(x))^2 + (h_0\, D_{x_2} - t\, A_2(x))^2 + V(x)$$

où V et B sont analytiques. Le champ magnétique B est donné par $B(x)\, dx_1 \wedge dx_2 = d(A_1(x)\, dx_1 + A_2(x)\, dx_2)$, soit $B = \partial_{x_1} A_2 - \partial_{x_2} A_1$.

On suppose que V et B sont invariants par la rotation κ de centre 0 et d'angle $\pi/3$, par translation selon un réseau $\mathbb{Z}\,\nu_1 \oplus \mathbb{Z}\,\nu_2$, avec $\nu_1 \neq 0$, $\nu_2 = \kappa(\nu_1)$, ainsi que par la symétrie orthogonale S qui échange ν_1 et ν_2. On traite le cas triangulaire qui est celui où le potentiel V atteint son minimum une seule fois par cellule de périodicité. Compte tenu des symétries, ce minimum est atteint sur $\mathbb{Z}\,\nu_1 \oplus \mathbb{Z}\,\nu_2$. On suppose qu'il est non dégénéré, et, sans perte de généralité, qu'il est nul.

On considère alors la distance d'Agmon, associée à la métrique $V(x)\, dx^2$ et on suppose que les minima les plus proches pour la distance usuelle de

$\mathbb{R}^2$ sont aussi les plus proches pour la distance d'Agmon, et qu'ils sont reliés par une unique géodésique, non dégénérée au sens de [He-Sj;4].

On a alors :

THÉORÈME 3. – *A et V étant donnés, notons D la distance d'Agmon entre puits les plus proches, Φ le flux du champ B à travers une cellule de périodicité, h la valeur absolue du plus petit réel non nul congru à $\dfrac{t\Phi}{h_0}$ modulo 2π. Alors il existe un réel $C_0 > 0$, une fonction $\mu_0(t, h_0)$ définie pour $(t, h_0) \in \left[-\dfrac{1}{C_0}, \dfrac{1}{C_0}\right] \times \left[0, \dfrac{1}{C_0}\right]$ telle que :*

$$\frac{1}{C_0} \leq \frac{\mu_0}{h_0} \leq C_0 \tag{1.9}$$

$$\mathrm{Sp}\,(H_{t,h_0}) \cap \left]-\infty, \mu_0 + \frac{h_0}{C_0}\right] = \mathrm{Sp}\,(\mu_0 \,\mathrm{Id} + \lambda(t, h_0)\,\mathrm{op}_h^w(p)) \tag{1.10}$$

$$\forall \delta > 0, \quad |\lambda(t, h_0)| \leq C(\delta)\, e^{-(D-\delta)/h_0} \tag{1.11}$$

p est un symbole vérifiant les hypothèses des théorèmes 1 et 2 pour un ε tendant vers 0 avec h_0.

Nous avons suivi le plan suivant :

Dans la section 2, nous montrons formellement comment un problème de Grushin ramène l'étude des opérateurs que nous étudions à celles d'opérateurs pseudo-différentiels opérant sur $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ et quantifiés par une nouvelle constante de Planck (opérateurs renormalisés).

Dans la section 3, nous effectuons des constructions B.K.W. permettant de poser effectivement le problème de Grushin défini formellement dans la section 2, et de calculer les opérateurs renormalisés à des exponentiellement petits près. Ceci permet de démontrer le théorème 1.

Les sections 4 et 5 sont respectivement consacrées aux démonstrations des théorèmes 2 et 3.

Enfin l'équivalent du papillon de Hofstadter pour l'opérateur de Harper triangulaire est donné en appendice.

Je souhaite remercier les membres de mon jury de thèse J. M. Bony, S. Alinhac, B. Helffer, A. Grigis et J. Sjöstrand, ainsi que J. Bellissard qui m'ont encouragé à entreprendre cette suite de ma thèse, et tout particulièrement J. Sjöstrand qui en a suivi la réalisation et B. Helffer avec qui j'ai eu d'utiles discussions.

2. DESCRIPTION DE LA PROCÉDURE DE RENORMALISATION

La classe de symboles que nous utilisons est $S^0 = \{ a;\ \exists h_0 > 0,\ a \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times]0,\ h_0]) \text{ et } \forall (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{N}^2,\ \exists C_{\alpha,\beta},\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\ \xi,\ h)| \leq C_{\alpha,\beta} \}$.

Rappelons rapidement l'étude des symétries de p faite dans [Ke], section 4. Le symbole p est invariant par l'application symplectique ρ donnée par :$\rho(x,\ \xi) = \left(\frac{x}{2} - \xi,\ \frac{3x}{4} + \frac{\xi}{2}\right)$, qui vérifie $\rho^3 = -\mathrm{Id}$, ainsi que les translations de vecteur $\nu_1 = (2\pi,\ -\pi)$ et $\nu_2 = \rho(\nu_1) = (2\pi,\ \pi)$. On introduit alors la h-transformation de Fourier $\mathcal{F}_h$ et l'opérateur intégral de Fourier U, donnés par

$$\mathcal{F}_h u(\xi) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i\frac{x\xi}{h}} u(x)\, dx$$

$$U = e^{-i\frac{\pi}{12}} e^{ix^2/4h} \mathcal{F}_h e^{ix^2/4h}.$$

La transformation canonique associée à U est ρ^{-1} et on a :

$$\forall a \in S^0, \quad \mathrm{op}_h^w(a \circ \rho) = U(\mathrm{op}_h^w a) U^{-1}.$$

De plus, $U^3 u(x) = u(-x)$. On quantifie aussi les translations : on pose

$$T_1 = \iota\, \mathrm{op}_h^w e^{\frac{2\pi i}{h}\left(-\xi - \frac{x}{2}\right)}$$

$$T_2 = U^{-1} T_1 U = \iota\, \mathrm{op}_h^w e^{\frac{2\pi i}{h}\left(-\xi + \frac{x}{2}\right)}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2, \quad T^\alpha = e^{i\frac{h'}{2}\alpha_1\alpha_2} T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2}$$

où h' est le plus petit réel en valeur absolue tel que $\frac{h'}{2\pi} \equiv \frac{2\pi}{h}\,[\mathbb{Z}]$, et $\iota = \pm 1$ est choisi pour qu'on ait les relations de commutation suivantes :

$$(T^\alpha)^{-1} = (T^\alpha)^* = T^{-\alpha}$$

$$T^\alpha T^\beta = e^{i\frac{h'}{2}\sigma(\alpha,\beta)} T^{\alpha+\beta} \qquad \text{où} \quad \sigma(\alpha,\ \beta) = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$$

$$U T^\alpha U^{-1} = T^{r^{-1}(\alpha)} \qquad \text{où} \quad r(\alpha) = (-\alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2).$$

Et pour tout symbole a,

$$T^\alpha(\mathrm{op}_h^w a(x,\ \xi)) T^{-\alpha} = \mathrm{op}_h^w(a(x,\ \xi) - \alpha_1\nu_1 - \alpha_2\nu_2).$$

On utilise aussi la conjugaison complexe $\Gamma u = \bar{u}$ qui vérifie, pour tout symbole a,

$$\Gamma(\mathrm{op}_h^w a(x,\ \xi))\Gamma = \mathrm{op}_h^w(\bar{a}(x,\ -\xi))$$

ainsi que les relations de commutation $\Gamma U \Gamma = U^{-1}$ et $\Gamma T^{\alpha} \Gamma = T^{-\alpha}$.

Les opérateurs que nous étudions commutent donc avec U, Γ, et les T^{α}. Comme leurs symboles sont réels, ils sont autoadjoints.

On va maintenant décrire la procédure de renormalisation permettant d'écrire un opérateur pseudo-différentiel Q quantifié par la nouvelle constante de Plank h', dépendant holomorphiquement d'un paramètre μ dans un voisinage complexe de l'intervalle $[-1-\varepsilon_2, -1+\varepsilon_2]$, agissant sur $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ (son symbole est donc une matrice 2×2), et dont le *μ-spectre* (ensemble des valeurs de μ pour lesquelles $Q(\mu)$ n'est pas inversible) coïncide avec le spectre de p dans un voisinage de -1.

On commence par considérer la courbe de niveau $\{(x, \xi); p_0(x, \xi) = -1\}$ comme la réunion des segments $s(\alpha, j)$, $(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, avec $s(\alpha, j) = \tau_{\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2}[\rho^{j-1}(s(0, 1)]$ et $s(0, 1) = \left[\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right); \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)\right]$.

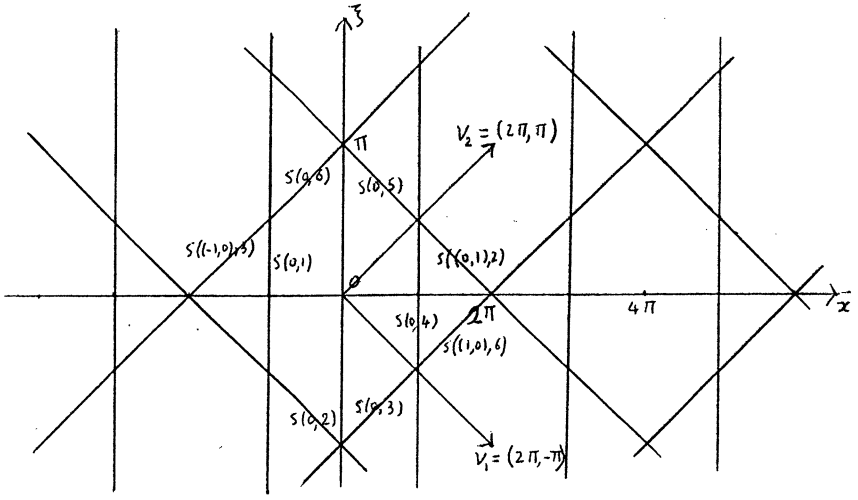

Fig. 1.

On suppose que l'on a défini des fonctions $g_{\alpha, j} \in L^2(\mathbb{R})$ microlocalement concentrées près des $s(\alpha, j)$, et vérifiant $g_{\alpha, j} = T^{\alpha} U^{1-j} g_{0,1}$(elles seront construites dans la section suivante). On définit

les opérateurs R_+ et R_- :

$$\begin{aligned} R_+ : \quad & L^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{2, 5\}) \\ & R_+ u(\alpha, j) = (u | g_{\alpha, j}) \\ R_- : \quad & l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{3, 6\}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ & u^- \mapsto \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \{3, 6\}} u^-(\alpha, j) g_{\alpha, j}. \end{aligned}$$

On considère le problème :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p - \mu & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$
$$L^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{3, 6\}) \to L^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{2, 5\}).$$

On suppose que ce problème est bien posé, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est inversible. Écrivons son inverse $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix}.$$

E_{-+} est un opérateur de $l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{2, 5\})$ vers $l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{3, 6\})$, et il est classique que son inversibilité équivaut à celle de $p - \mu$. Il sera dans la suite commode de regrouper dans la matrice E_{-+} des blocs 2×2, c'est-à-dire de considérer E_{-+} comme un opérateur de $l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^{\{2,5\}})$ dans $l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^{\{3,6\}})$. Ainsi $E_{-+}(\alpha, \beta)$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ est une matrice 2×2.

Commençons par étudier l'invariance par translation. Pour $\gamma \in \mathbb{Z}^2$, on définit les opérateurs

$$\begin{aligned} \tau_\gamma : \quad & l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^{\{2,5\}}) \to l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^{\{2,5\}}) \\ & l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^{\{3,6\}}) \to l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^{\{3,6\}}) \end{aligned}$$

par $\tau_\gamma u^-(\alpha, j) = e^{i \frac{h'}{2} \sigma(\gamma, \alpha)} u^-(\alpha - \gamma, j)$.

LEMME 1. – *On a :*

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} T^\gamma & 0 \\ 0 & \tau_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^\gamma & 0 \\ 0 & \tau_\gamma \end{pmatrix} \mathcal{P}. \tag{2.1}$$

Démonstration. – Il faut vérifier

$$R_- \tau_\gamma = T^\gamma R_- \tag{2.2}$$

$$R_+ T^\gamma = \tau_\gamma R_+. \tag{2.3}$$

On a :

$$\begin{aligned}
T^\gamma R_- u^- &= \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \{3,6\}} T^\gamma u^- (\alpha, j) g_{\alpha, j} \\
&= \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \{3,6\}} u^- (\alpha, j) T^\gamma T^\alpha g_{0, j} \\
&= \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \{3,6\}} u^- (\alpha, j) e^{i \frac{h'}{2} \sigma(\gamma, \alpha)} T^{\alpha+\gamma} g_{0, j} \\
&= \sum_{(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \{3,6\}} u^- (\alpha - \gamma, j) e^{i \frac{h'}{2} \sigma(\gamma, \alpha)} g_{\alpha, j} \\
&= R_- \tau_\gamma u^-
\end{aligned}$$

qui montre (2.2), et :

$$\begin{aligned}
(R_+ T^\gamma u)(\alpha, j) &= (T^\gamma u | g_{\alpha, j}) \\
&= (u | T^{-\gamma} T^\alpha g_{0, j}) \\
&= (u | e^{i \frac{h'}{2} \sigma(-\gamma, \alpha)} g_{\alpha-\gamma, j}) \\
&= e^{i \frac{h'}{2} \sigma(\gamma, \alpha)} (u | g_{\alpha-\gamma, j}) \\
&= (\tau_\gamma R_+ u)(\alpha, j)
\end{aligned}$$

qui montre (2.3).

COROLLAIRE 1.

$$E_{-+}(\alpha, \beta) = e^{i \frac{h'}{2} \sigma(\beta, \alpha)} E_{-+}(0, \beta - \alpha).$$

Démonstration. – Il résulte du lemme que E_{-+} commute avec les τ_γ. Ainsi, d'une part :

$$\begin{aligned}
(\tau_{-\alpha} E_{-+} u^-)(0) &= (E_{-+} u^-)(\alpha) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^2} E_{-+}(\alpha, \beta) u^-(\beta).
\end{aligned}$$

D'autre part ;

$$
\begin{aligned}
(E_{-+}\,\tau_{-\alpha}\,u^{-})\,(0) &= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^2} E_{-+}\,(0,\,\beta)\,(\tau_{-\alpha}\,u^{-}\,(\beta)\\
&= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^2} E_{-+}\,(0,\,\beta)\,e^{i\,\frac{h'}{2}\,\sigma\,(-\alpha,\,\beta)}\,u^{-}\,(\beta+\alpha)\\
&= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^2} E_{-+}\,(0,\,\beta-\alpha)\,e^{i\,\frac{h'}{2}\,\sigma\,(\beta,\,\alpha)}\,u^{-}\,(\beta).
\end{aligned}
$$

La comparaison de ces deux égalités donne le corollaire.

Le corollaire 1 nous incide à considérer comme dans [Ke] p. 33 et suivantes, les applications M_B et R qui, à une application $\Gamma \in l^1\,(\mathbb{Z}^2;\ \mathcal{L}\,(\mathbb{C}^{\{2,5\}};\ \mathbb{C}^{\{3,6\}}))$ associent la matrice infinie $M_B\,(\Gamma) \in \mathcal{L}\,(l^2\,(\mathbb{Z}^2 \times \{\,2,\,5\,\});\ l^2\,(\mathbb{Z}^2 \times \{3,\,6\}))$ dont les éléments sont donnés par :

$$
(M_B\,(\Gamma))_{\alpha,\,\beta} = e^{i\,\frac{h'}{2}\,\sigma\,(\beta,\,\alpha)}\,\Gamma\,(\beta-\alpha)
$$

et, dans le cas où $h' \neq 0$, l'opérateur pseudo-différentiel

$$
\begin{aligned}
R\,(\Gamma) = \operatorname{Op} p^{w}_{h'}\,(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} e^{i\,\left(\alpha_1\,\left(\xi+\frac{x}{2}\right)+\alpha_2\,x\right)}\,\Gamma\,(\alpha))\\
\in \mathcal{L}\,(L^2\,(\mathbb{R};\ \mathbb{C}^{\{2,5\}});\ (L^2\,(\mathbb{R};\ \mathbb{C}^{\{3,6\}})).
\end{aligned}
$$

Dans le cas où $h' = 0$, E_{-+} est un opérateur de convolution et $R\,(\Gamma)$ est défini comme l'opérateur agissant sur $\mathcal{L}\,(L^2\,(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi;\ \mathbb{C}^{\{2,5\}});\ (L^2\,(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi;\ \mathbb{C}^{\{3,6\}}))$ par :

$$
R\,(\Gamma)\,u\,(x,\,\xi) = (\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} e^{i\,\left(\alpha_1\,\left(\xi+\frac{x}{2}\right)+\alpha_2\,x\right)}\,\Gamma\,(\alpha))\,u\,(x,\,\xi).
$$

On a montré dans [Ke] que, dans le cas où Γ est à décroissance exponentielle, ce qui sera vérifié dans la section suivante, $0 \in \operatorname{Sp}\,(M_B\,(\Gamma)) \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{Sp}\,(R\,(\Gamma))$. De plus, un calcul simple montre que, si on se donne une identification de $\{\,2,\,5\,\}$ et $\{\,3,\,6\,\}$, on a :

$$
M_B\,(\Gamma_1)\,M_B\,(\Gamma_2) = M_B\,(\Gamma_1\,\sharp_B\,\Gamma_2) \tag{2.4}
$$

où

$$
(\Gamma_1\,\sharp_B\,\Gamma_2)\,(\beta) = \sum_{\substack{(\beta',\,\beta'')\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2\\ \beta'+\beta''=\beta}} e^{i\,\frac{h'}{2}\,\sigma\,(\beta'',\,\beta')}\,\Gamma_1\,(\beta')\,\Gamma_2\,(\beta'') \tag{2.5}
$$

$$[M_B(\Gamma)]^* = M_B(\breve{\Gamma}^*) \tag{2.6}$$

où $\breve{\Gamma}(\alpha) = \Gamma(-\alpha)$

$$R(\Gamma_1)\,R(\Gamma_2) = R(\Gamma_1 \sharp_B \Gamma_2) \tag{2.7}$$

$$[R(\Gamma)]^* = R(\breve{\Gamma}^*). \tag{2.8}$$

Autrement dit, l'application $M_B(\Gamma) \mapsto R(\Gamma)$ est un morphisme et respecte le passage à l'adjoint. On pose donc :

$$\Psi(\alpha) = E_{-+}(0, \alpha) = E_{-+}(-\alpha, 0) \tag{2.9}$$

et

$$Q(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} e^{i\left(\alpha_1\left(\xi + \frac{x}{2}\right) + \alpha_2 x\right)}\,\Psi(\alpha) \tag{2.10}$$

Ainsi $0 \in \mathrm{Sp}(p - \mu) \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{Op}^w_{h'} Q)$.

Traduisons maintenant sur Q la symétrie par rapport à 0 de p. Définissons

$$\begin{aligned} \theta : \quad & l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{2, 5\}) \to l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{2, 5\}) \\ & l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{3, 6\}) \to l^2(\mathbb{Z}^2 \times \{3, 6\}) \\ & \theta\, u^-(\alpha, j) = u^-(-\alpha, j+3). \end{aligned}$$

Étant donné que $U^3 g_{\alpha, j} = g_{-\alpha, j+3}$ on vérifie facilement que $R_+ U^3 = \theta R_+$ et $R_- \theta = U^3 R_-$. Ainsi :

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix} U^3 & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^3 & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}\mathcal{P}.$$

On en déduit successivement

$$E_{-+}\,\theta = \theta\, E_{-+}$$

$$E_{-+}(\alpha, \beta; j, k) = E_{-+}(-\alpha, -\beta; j+3, k+3)$$

$$\Psi(\alpha; j, k) = \Psi(-\alpha; j+3, k+3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Psi(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \Psi(-\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q(x, \xi)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q(-x, -\xi)$$

$$U^3\,\mathrm{op}^w_{h'}\, Q(x, \xi)\, U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{op}^w_{h'}\, Q(x, \xi)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. CALCUL DE L'OPÉRATEUR RENORMALISÉ ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Ce paragraphe est largement inspiré de [He-Sj;3], section 4. Toutefois, nous avons écrit une démonstration plus simple, conduisant à des résultats moins précis que ceux que nous aurait fournis une adaptation fidèle du texte de B. Helffer et J. Sjöstrand, mais néanmoins suffisants pour la suite de la démonstration.

Commençons par chercher les courbes du niveau du symbole réel p qui est une perturbation de $p_0 = \cos x + 2 \cos \frac{x}{2} \cos \xi$, pour la topologie $\mathcal{C}^2$. Ces deux symboles peuvent être considérés comme des fonctions de Morse sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\,\nu_1 \oplus \mathbb{Z}\,\nu_2$. On en déduit que p admet six points critiques par cellule de périodicité, un maximum, deux minima et trois points selle. Compte tenu des symétries, le maximum est atteint aux points de $\mathbb{Z}\,\nu_1 + \mathbb{Z}\,\nu_2$, les deux minima sont égaux et atteints aux points de $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right) + \mathbb{Z}\,\nu_1 + \mathbb{Z}\,\nu_2$ et de $\left(\frac{8\pi}{3}, 0\right) + \mathbb{Z}\,\nu_1 + \mathbb{Z}\,\nu_2$. Les points selle sont les points de $(0, \pi) + \mathbb{Z}\,\nu_1 + \mathbb{Z}\,\nu_2$, $\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right) + \mathbb{Z}\,\nu_1 + \mathbb{Z}\,\nu_2$, et de $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) + \mathbb{Z}\,\nu_1 + \mathbb{Z}\,\nu_2$; la valeur critique est la même en tous ces points. Le maximum $M(p)$, le minimum $m(p)$ et la valeur critique $c(p)$ correspondant aux points selle vérifient :

$$|M(p) - 3| \leq \varepsilon$$
$$\left| m(p) + \frac{3}{2} \right| \leq \varepsilon$$
$$|c(p) + 1| \leq \varepsilon.$$

Les caractéristiques réelles de $p - c(p)$ sont incluses dans un voisinage de $\bigcup_{(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} s(\alpha, j)$.

On s'intéresse tout d'abord au point selle $(0, \pi)$.

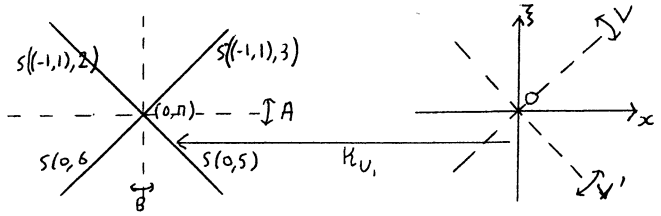

Fig. 2.

On considère les trois symétries A, B, C définies par :

$$(A\,u)(x) = e^{i2\pi\frac{x}{h}}\,\bar{u}(x)$$
$$(B\,u)(x) = \bar{u}(-x)$$
$$(C\,u)(x) = e^{i2\pi\frac{x}{h}}\,u(-x)$$

qui quantifient respectivement les symétries par rapport aux droites $\{\xi = \pi\}$, $\{x = 0\}$ et au point $(0, \pi)$. On a : $A^2 = B^2 = C^2 = \mathrm{Id}$ et $AB = BA = C$. De plus :

$$A = T^{(-1,1)}\,\Gamma = \Gamma\,T^{(1,-1)}$$
$$B = U^3\,\Gamma = \Gamma\,U^3$$
$$C = T^{(-1,1)}\,U^3 = U^3\,T^{(1,-1)}.$$

Ainsi, la conjugaison par A, B ou C conserve p.

On utilise à présent un théorème de réduction de B. Helffer et J. Sjöstrand ([He-Sj;3], théorème b.1) : le symbole $p - c(p)$ ayant 0 comme valeur critique en $(0, \pi)$, il existe un symbole analytique à valeurs réelles $f(t, h) = f_0 + hf_1 + \cdots$, défini pour t petit, avec $f_0(0) = 0$, $\dfrac{\partial f_0}{\partial t}(0) > 0$, et un opérateur intégral de Fourier analytique unitaire U_1 dont la transformation canonique κ_{U_1} envoie un voisinage de $(0, 0)$ sur un voisinage de $(0, \pi)$, la partie du demi-axe $\{(0, \xi);\ \xi \leq 0\}$ étant envoyé dans un petit voisinage de $s(0, 5)$, et telle que microlocalement au voisinage de $s(0, 5)$:

$$U_1^{-1}\,f(p - c(p), h)\,U_1 = P_0 = \frac{1}{2}(xh\,D + h\,Dx). \tag{3.1}$$

Pour traduire les symétries de p, on introduit les opérateurs

$$C_0 = U^3$$
$$V = \Gamma\,\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^{-1}\,\Gamma$$
$$V' = C_0\,V = VC_0 = \Gamma\,\mathcal{F}_h^{-1} = \mathcal{F}_h\,\Gamma.$$

C_0 quantifie la symétrie par rapport à 0, V et V' les symétries par rapport à la première et la seconde bissectrice respectivement. On peut alors choisir U_1 tel que :

$$U_1\,V = BU_1$$
$$U_1\,V' = AU_1$$
$$U_1\,C_0 = CU_1.$$

De plus si on note $\mu' = f(\mu - c(p),\ h)$, microlocalement près de $(0,\ \pi)$ on a :

$$(3.2) \qquad (p-\mu)\,u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (P_0 - \mu')\,U_1^{-1}\,u = 0$$

et l'application $\mu \mapsto \mu'$ est inversible, d'inverse, un symbole analytique classique d'ordre 0.

L'étape suivante est de résoudre $(P_0 - \mu')\,v = 0$ microlocalement près de $(0,\ 0)$. Y. Colin de Verdière et B. Parisse [Co-Pa;1] ont montré que l'on a un espace de solutions de dimension 2, engendré par les fonctions :

$$(3.3) \qquad u_\pm = H(\pm x)|x|^{-\frac{1}{2}+i\frac{\mu'}{h}}$$

où H désigne la fonction de Heaviside. Une autre base est formée des fonctions $w_\pm = V\,u_\pm$, micro-localement supportées respectivement dans les demi-plans $\{\,\xi \geq 0\,\}$ et $\{\,\xi \leq 0\,\}$. On sait passer d'une base à l'autre : si $\alpha_+\,u_+ + \alpha_-\,u_- = \gamma_+\,w_+ + \gamma_-\,w_-$, alors

$$(3.4) \qquad \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}} \times \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi\mu'}{2\,h}+i\,\frac{\pi}{4}} & e^{-\frac{\pi\mu'}{2\,h}-i\,\frac{\pi}{4}} \\ e^{-\frac{\pi\mu'}{2\,h}-i\,\frac{\pi}{4}} & e^{\frac{\pi\mu'}{2\,h}+i\,\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\gamma_+\\ \gamma_-\end{pmatrix}.$$

Et comme $\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\mu'}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right) = \dfrac{\pi}{\mathrm{ch}\left(\pi\,\frac{\mu'}{h}\right)}$, la matrice

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi\mu'}{2\,h}+i\,\frac{\pi}{4}} & e^{-\frac{\pi\mu'}{2\,h}-i\,\frac{\pi}{4}} \\ e^{-\frac{\pi\mu'}{2\,h}-i\,\frac{\pi}{4}} & e^{\frac{\pi\mu'}{2\,h}+i\,\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

est unitaire et donc :

$$(3.5) \qquad \begin{pmatrix}\gamma_+\\ \gamma_-\end{pmatrix} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}} \times \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi\mu'}{2\,h}-i\,\frac{\pi}{4}} & e^{-\frac{\pi\mu'}{2\,h}+i\,\frac{\pi}{4}} \\ e^{-\frac{\pi\mu'}{2\,h}+i\,\frac{\pi}{4}} & e^{\frac{\pi\mu'}{2\,h}-i\,\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant définir les fonctions $g_{\alpha,j}$ pour $(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ qui interviennent dans le problème de Grushin. On a d'abord besoin d'opérateurs servant de troncatures. On considère une fonction $\chi_{0,1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; [0, 1])$ valant 1 au voisinage de $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, 0 au voisinage des autres points selle et telle que $\chi_{0,1}(x, \xi) + \chi_{0,1}(x, -\xi) = 1$ pour (x, ξ) proche de $(-\pi, 0)$. On définit l'opérateur $\chi_{0,1}$ par la quantification par des gaussiennes : on considère une résolution de l'identité $\mathrm{Id} = \int \Pi_\beta \, d\beta$ où $\Pi_\beta = C h^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{h}\left((x-y)\beta_\xi + i\frac{(x-\beta_x)^2}{2} + i\frac{(y-\beta_x)^2}{2}\right)}$ et on pose : $\chi_{0,1} = \int \chi_{0,1}(\beta)\Pi_\beta \, d\beta$. Avec cette quantification, on aura $\mathcal{F}\chi_{0,1}\mathcal{F}^{-1} = \int \chi_{0,1}(\beta_\xi, -\beta_x)\Pi_\beta \, d\beta$ ce qui permettra d'appliquer la phase stationnaire. De plus, $\Gamma\chi_{0,1}\Gamma = 1 - \chi_{0,1}$ microlocalement au voisinage de $s(0, 1)$. On définit maintenant les autres opérateurs de troncature par $\chi_{\alpha,j} = (T^\alpha U^{1-j})\chi_{0,1}(T^\alpha U^{1-j})^{-1}$.

Microlocalement au voisinage de l'intérieur de $s(0, 5)$, le noyau de $p - \mu$ est de dimension 1. On considère la fonction B.K.W. v définie microlocalement près de l'intérieur de $s(0, 5)$ et coïncidant avec $U_1 w_-$ près de $(0, \pi)$. Elle vérifie $(p - \mu)v = 0$. Par la formule de la phase stationnaire, on peut estimer $(i[p, \chi_{0,5}]v|v) = (i\mathcal{F}[p, \chi_{0,1}]\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}U^4 v)|(\mathcal{F}U^4)v)$, qui est un symbole analytique elliptique réel positif. On pose :

$$c(\mu', h) = [(i[p, \chi_{0,5}]v|v)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$w_{0,5} = c(\mu', h)v \tag{3.6}$$

$$g_{0,5} = i[p, \chi_{0,5}]w_{0,5} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} w_{\alpha,j} = T^\alpha U^{5-j} w_{0,5} \\ \text{pour } (\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} g_{\alpha,j} = T^\alpha U^{5-j} g_{0,j} \\ \text{pour } (\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Ainsi :

$$(g_{\alpha,j}|w_{\alpha,j}) = 1 \quad \text{pour} \quad (\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \tag{3.10}$$

$$(p - \mu)w_{\alpha,j} = 0 \quad \text{pour tout} \quad (\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

Les fonctions $w_{\alpha,j}$ sont donc définies microlocalement près des intérieurs des segments $s(\alpha, j)$ tandis que les $g_{\alpha,j}$ sont définies à $\mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h})$ près comme fonctions de $L^2(\mathbb{R})$.

B. Helffer et J. Sjöstrand ont montré dans un cas semblable (*voir* [He-Sj;3], proposition 4.1 et appendice d) que le problème de Grushin est bien posé, c'est-à-dire que l'opérateur $\mathcal{P}$ est inversible, et que son inverse vérifie $\|\mathcal{E}\| = \mathcal{O}(h^{-3})$ uniformément en μ.

On a besoin de l'invariance de $g_{0,1}$ par Γ. Comme microlocalement près de $s(0, 1)$, le noyau de $p - \mu$ est de dimension 1, $\Gamma\omega_{0,1}$ est un multiple de $\omega_{0,1}$. Donc quitte à multiplier tous les $\omega_{\alpha,j}$ et $g_{\alpha,j}$ par un complexe $c'(\mu', h)$, de module 1 car $\Gamma\omega_{0,1}$, et $\omega_{0,1}$ ont même normalisation, on aura $\Gamma\omega_{0,1} = \omega_{0,1} + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h})$. L'égalité $\chi_{0,1}(x, \xi) + \chi_{0,1}(\xi, -\xi) = 1$ entraîne, microlocalement au voisinage de $s(0, 1)$, $\Gamma\chi_{0,1}\Gamma = 1 - \chi_{0,1}$ et donc

$$\begin{aligned}\Gamma g_{0,1} &= \Gamma(i[p, \chi_{0,1}]\omega_{0,1})\\ &= i[p, \chi_{0,1}]\Gamma\omega_{0,1}\\ &= i[p, \chi_{0,1}]\omega_{0,1} = g_{0,1},\end{aligned}$$

toujours à $\mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h})$ près. Remplaçant $g_{0,1}$ par $\frac{1}{2}(g_{0,1} + \Gamma g_{0,1})$, on obtient :

$$\Gamma g_{0,1} = g_{0,1}. \tag{3.12}$$

Il nous faut maintenant calculer les valeurs de $E_{-+}(\alpha, 0; j, 5)$, pour $(\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \{3, 6\}$, les symétries permettant d'en déduire les autres coefficients.

On cherche donc à résoudre

$$\begin{cases}(p-\mu)u + \displaystyle\sum_{(\alpha,j)\in\mathbb{Z}^2\times\{3,6\}} u^-(\alpha, j)\, g_{\alpha,j} = 0\\ (u|g_{0,5}) = 1\\ (u|g_{\alpha,j}) = 0 \qquad \text{pour} \quad (\alpha, j) \in \mathbb{Z}^2 \times \{2, 5\} \quad \text{et} \quad (\alpha, j) \neq (0, 5).\end{cases}$$

Pour suivre plus aisément la construction de la fonction u qui va suivre, le lecteur pourra se référer à la figure 3, page suivante, où on a représenté en traits gras le support microlocal de u. Les points et les croix représentent les supports des fonctions $g_{\alpha,j}$ pour $j = 2, 5$ et $j = 3, 6$ respectivement, les flèches le sens du flot hamiltonien. Rappelons que $\chi_{\alpha,j}$ est une troncature valant 1 à la fin du segment $s(\alpha, j)$ orienté par le flot hamiltonien.

On commence par poser $u = w_{0,5}$. Ceci définit u dans un voisinage de l'intérieur de$s(0, 5)$ et un voisinage de $(0, \pi)$, et assure $(u|g_{0,5}) = 1$. On

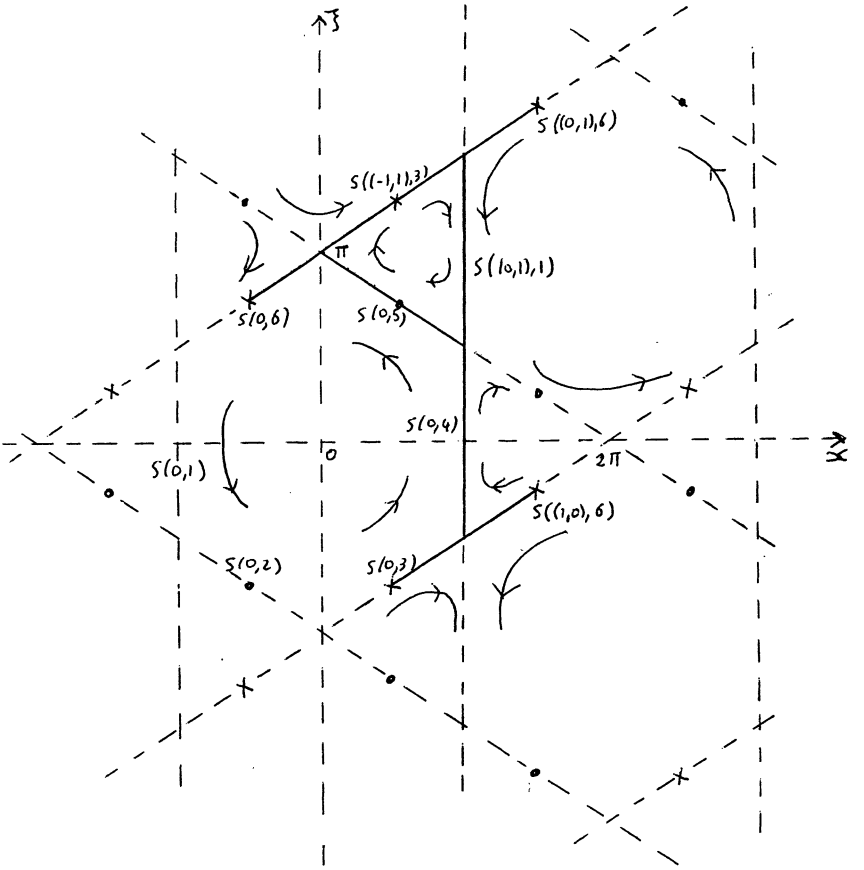

Fig. 3

la prolonge par la méthode B.K.W. à des voisinages des intérieurs des segments $s(0, 6)$ et $s((-1, 1), 3)$ et on la tronque par $1 - \chi_{0,6}$ et $1 - \chi_{(-1,1),3}$. (Il est important de remarquer qu'on ne peut faire de troncatures qu'au voisinage des segments $s(\alpha, j)$ pour $j \in \{3, 6\}$, car u^- est défini sur $\mathbb{Z}^2 \times \{3, 6\}$.)

La symétrie ΓU^2, qui laisse $w_{0,5}$ invariante, et échange $w_{0,6}$ et $w_{0,4}$, ainsi que $w_{(-1,1),3}$ et $w_{(0,1),1}$, permet alors de prolonger u au voisinage des intérieurs des segments $s(0, 4)$ et $s((1, 0), 6)$; elle y est proportionnelle à $w_{0,4}$ et $w_{(1,0),6}$ respectivement car les noyaux microlocaux de $p - \mu$ y sont de dimension 1.

De même, la symétrie $U\Gamma$ échange $w_{0,5}$ et $w_{0,4}$, $w_{0,6}$ et $w_{0,3}$, ainsi que $w_{(-1,1),3}$ et $w_{(1,0),6}$ et permet donc de prolonger $w_{0,4}$ (et donc u) à un

voisinage des intérieurs des segments $s(0, 3)$ et $s((1, 0), 6)$. On tronque alors par $\chi_{0,3}$ et $\chi_{(1,0),6}$.

Enfin, un calcul simple permet de constater que la symétrie $T^{(0,1)}\,\Gamma\,U^{-2}$ conserve $w_{(-1,1),3}$ et échange $w_{0,6}$ et $w_{(0,1),6}$, ainsi que $w_{0,5}$ et $w_{(0,1),1}$. Ceci permet de prolonger $w_{(0,1),1}$ (et donc u), à un voisinage des intérieurs des segments $s((-1, 1), 3)$ et $s((0, 1), 6)$. On tronque par $\chi_{(-1,1),3}$ et $\chi_{(0,1),6}$.

Il faut maintenant calculer u au voisinage des segments $s(0, 6)$, $s((-1, 1), 3)$, $s((0, 1), 3)$, $s(0, 3)$ et $s((1, 0), 6)$. On utilisera la notation suivante : $w_{\alpha,j|\beta,k}$ pour désigner la fonction $w_{\alpha,j}$, prolongée comme expliqué dans les paragraphes précédents, et restreinte à un voisinage de $s(\beta, k)$. On a :

$$\begin{aligned} w_{0,5|0,6} &= cc'\,U_1\,w_{-|\mathbb{R}_-} \\ &= cc'\,U_1\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}}\,e^{\frac{\pi\mu'}{2h}+i\,\frac{\pi}{4}}\,u_-. \end{aligned}$$

On a $U_1\,u_- = U_1\,V\,w_- = BU_1\,w_-$. Comme on a une forme B.K.W. pour $U_1\,u_-$ au voisinage de l'intérieur de $s(0, 5)$, on peut en obtenir pour $BU_1\,u_-$ et $U^{-1}\,U_1\,u_-$ au voisinage de l'intérieur de $(0, 6)$. Ces deux fonctions ont même normalisation et on obtient $BU_1\,u^- = e^{i\,\frac{l}{h}}\,U^{-1}\,U_1\,u_-$, où l est un symbole analytique classique réel d'ordre 0. Ainsi :

$$w_{0,5|0,6} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}}\,e^{\frac{\pi\mu'}{2h}+i\,\frac{\pi}{4}}\,e^{i\,\frac{l}{h}}\,w_{0,6}.$$

Calculons maintenant $w_{0,5|(-1,1),3}$. Sur le modèle on trouve :

$$\begin{aligned} w_{-|\mathbb{R}_+} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}}\,e^{-\frac{\pi\mu'}{2h}-i\,\frac{\pi}{4}}\,u_+ \\ w_{-|\mathbb{R}_-} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}}\,e^{\frac{\pi\mu'}{2h}+i\,\frac{\pi}{4}}\,u_-. \end{aligned}$$

Ainsi $w_{-|\mathbb{R}_+} = e^{-\frac{\pi\mu'}{h}-i\,\frac{\pi}{2}}\,C_0\,(w_{-|\mathbb{R}_-})$. Appliquant $cc'\,U_1$ aux deux membres de cette égalité, on obtient $w_{0,5|(-1,1),3} = e^{-\frac{\pi\mu'}{h}-i\,\frac{\pi}{2}}\,C\,(w_{0,5|0,6})$.

On a calculé précédemment $w_{0,5|0,6}$, et en utilisant $C\,w_{0,6} = T^{(-1,1)}\,U^3\,w_{0,6} = w_{(-1,1),3}$, on obtient :

$$w_{0,5|(-1,1),3} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}}\,e^{-\frac{\pi\mu'}{2h} - i\,\frac{\pi}{4}}\,e^{i\,\frac{l}{h}}\,w_{(-1,1),3}.$$

Pour simplifier les notations, posons

$$a = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}}\,e^{-\frac{\pi\mu'}{2h} - i\,\frac{\pi}{4}}\,e^{i\,\frac{l}{h}} \tag{3.13}$$

$$b = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\mu'}{h}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,\frac{\mu'}{h}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}}\,e^{\frac{\pi\mu'}{2h} + i\,\frac{\pi}{4}}\,e^{i\,\frac{l}{h}}. \tag{3.14}$$

Ainsi $b = ie^{\frac{\pi\mu'}{h}}\,a$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$, et, grâce aux symétries, on a :

$$\begin{aligned}
w_{0,5|0,6} &= b w_{0,6}\\
u_{0,6|(-1,1),3} &= a w_{(-1,1),3}\\
w_{(0,1),1|(0,1),6} &= \bar{b} w_{(-1,1),6}\\
w_{(0,1),1|(-1,1),3} &= \bar{a} w_{(-1,1),3}\\
w_{0,5|0,4} &= \bar{b} w_{0,4}\\
w_{0,5|(0,1),1} &= \bar{a} w_{(0,1),1}\\
w_{0,4|0,3} &= \bar{b} w_{0,3}\\
w_{0,4|(1,0),6} &= \bar{a} w_{(1,0),6}.
\end{aligned}$$

Puis on en déduit pour u :

$$\begin{aligned}
u &= b w_{0,6} \text{ près de } s\,(0,\ 6)\\
u &= a w_{(-1,1),3} \text{ près du début de } s\,((-1,\ 1),\ 3)\\
u &= \bar{a}^2\,w_{(-1,1),3} \text{ près de la fin } s\,((-1,\ 1),\ 3)\\
u &= \overline{ab} w_{(0,1),6} \text{ près de } s\,((0,\ 1),\ 6)\\
u &= \overline{ab} w_{(1,0),6} \text{ près de } s\,((0,\ 1),\ 6)\\
u &= \bar{b}^2\,w_{0,3} \text{ près de } s\,(0,\ 3).
\end{aligned}$$

Il reste à calculer $(p-\mu)\,u$:

$$\begin{aligned}(p-\mu)\,u = &-[p,\ \chi_{0,6}]\,bw_{0,6} + [p,\ \chi_{(-1,1),3}]\,(\bar{a}^2-a)\,w_{(-1,1),3}\\ &+[p,\ \chi_{(0,1),6}]\,\overline{ab}w_{(0,1),6} + [p,\ \chi_{(1,0),6}]\,\overline{ab}w_{(1,0),6}\\ &+[p,\ \chi_{0,3}]\,\bar{b}^2\,w_{0,3}\end{aligned}$$

et comme $g_{\alpha,j} = i\,[p,\ \chi_{\alpha,j}]\,w_{\alpha,j}$, on a :

$$\begin{aligned}&(p-\mu)\,u - ibg_{0,6} + i\,(\bar{a}^2-a)\,g_{(-1,1),3}\\ &\quad + i\overline{ab}g_{(0,1),6} + i\overline{ab}g_{(1,0),6} + i\bar{b}^2\,g_{0,3} = 0\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}E_{-+}(0,\ 0;\ 6,\ 5) &= -\,ib\\ E_{-+}((-1,\ 1),\ 0;\ 3,\ 5) &= i\,(\bar{a}^2-a)\\ E_{-+}((0,\ 1),\ 0;\ 6,\ 5) &= i\,\overline{ab}\\ E_{-+}((1,\ 0),\ 0;\ 6,\ 5) &= i\,\overline{ab}\\ E_{-+}(0,\ 0;\ 3,\ 5) &= i\,\bar{b}^2\\ E_{-+}(\alpha,\ 0;\ j,\ 5) &= 0 \ \text{ pour les autres valeurs de } (\alpha,\ j).\end{aligned}$$

Ces égalités sont bien sûr vraies à $\mathcal{O}\left(e^{-\frac{\varepsilon_0}{h}}\right)$ près.

Grâce à la symétrie, on peut écrire le symbole de l'opérateur renormalisé, les colonnes étant numérotées $\{2,\ 5\}$ et les lignes $\{6,\ 3\}$.

$$Q(x,\ \xi) = i\begin{pmatrix} (\bar{a}^2-a)\,e^{i\left(\frac{x}{2}-\xi\right)} + \bar{b}^2 & -b + \overline{ab}e^{-ix} + \overline{ab}e^{-i\left(\xi+\frac{x}{2}\right)}\\ -b + \overline{ab}e^{ix} + \overline{ab}e^{i\left(\xi+\frac{x}{2}\right)} & (\bar{a}^2-a)\,e^{i\left(\xi-\frac{x}{2}\right)} + \bar{b}^2\end{pmatrix}.$$

Cette égalité est vraie à $\mathcal{O}\left(e^{-\frac{\varepsilon_0}{h}}\right)$ près et on rappelle que a et b sont définis en (3.13) et (3.14). Examinons maintenant la mesure du μ'-*spectre* de Q. Pour la démonstration du théorème 1, on peut négliger un intervalle $[-C\,h,\ C\,h]$, et on considère donc deux zones :

1. $-\dfrac{1}{C} \leq \mu' \leq -C\,h$ pour C assez grand. Ici $|b| \leqq e^{\frac{\pi\mu'}{h}}$ est petit et on écrit $Q = i\,(\bar{a}^2-a)\,U + \mathcal{O}(|b|)$, avec

$$U = \mathrm{op}^w_{h'}\begin{pmatrix} e^{i\left(\frac{x}{2}-\xi\right)} & 0\\ 0 & e^{i\left(\xi-\frac{x}{2}\right)}\end{pmatrix}.$$

U est unitaire et Q est donc inversible dès que $|b| \leq C'|e^{3\,i\arg a}-1|$. Comme $|b| \leq e^{\frac{\pi\mu'}{h}}$, et, d'après [He-Sj;3] $\partial_{\mu'}\arg a = -\dfrac{1}{h}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{h+|\mu'|} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{h}\right)$,

le μ'-spectre de Q dans la zone considérée est concentré dans des intervalles de longueur au plus $C' e^{\frac{\pi\mu'}{h}} h \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|\mu'|}\right)^{-1}$ où μ' est un point quelconque de l'intervalle, et séparés par une distance d'au moins $C' h \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|\mu'|}\right)^{-1}$. Ainsi dans un intervalle $[nh, (n+1)h]$ pour $n \leq -n_0$, le μ'-spectre est de mesure au plus $C' e^{\pi n} h$.

2. Étudions maintenant la zone $C h \leq \mu' \leq \frac{1}{C}$. Ici $|a|$ est petit et on écrit $Q = Q_0 + \mathcal{O}(|a|)$, avec

$$Q_0 = i \begin{pmatrix} \bar{b}^2 & -b \\ -b & \bar{b}^2 \end{pmatrix}.$$

Q est donc inversible dès que $|\det Q_0| \geq C'|a|$ et comme $|a| \leq e^{-\frac{\pi\mu'}{h}}$ il suffit pour cela que $|e^{i6\arg b} - 1| \geq C' e^{-\frac{\pi\mu'}{h}}$. On a $\partial_{\mu'} \arg b = -\frac{1}{h} \operatorname{Log} \frac{1}{h + |\mu'|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right)$, et on conclut comme précédemment en remplaçant μ' par $-\mu'$.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il faut étudier la correspondance entre μ' et μ. On se souvient que $\mu' = f(\mu - c(p))$ où $f(t, h) = f_0(t) + h f_1(t) + \cdots$ est un symbole analytique classique, avec $f_0(0) = 0$ et $\partial_t f_0(0) > 0$. Il faut calculer $\partial_t f_0(0)$. Au voisinage de $(0, \pi)$, p s'écrit

$$p(x, \pi + \xi) = c(p) + \left(\frac{x}{2} + \xi\right)\left(\frac{x}{2} - \xi\right) + \mathcal{O}\left((x^2 + \xi^2)(\varepsilon + |x| + |\xi|)\right).$$

Soit L l'application linéaire tangeante à $\kappa_{U_1}^{-1}$ en $(0, 0)$. L est donc symplectique et, en notant toujours $P_0(x, \xi) = x\xi$, on a :

$$P_0(L(x, \pi+\xi)) = \partial_t f_0(0)\left(\left(\frac{x}{2}+\xi\right)\left(\frac{x}{2}-\xi\right)+\mathcal{O}\left((x^2+\xi^2)(\varepsilon+|x|+|\xi|)\right)\right.$$

et donc $\partial_t f_0(0) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ et le théorème 1 est démontré.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

On se place maintenant dans le cas où $h = \frac{2\pi}{q}$, avec $q \in \mathbb{Z}$, et donc $h' = 0$. L'opérateur Q agit donc sur $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi; \mathbb{C}^{\{2,5\}}); (L^2(\mathbb{R}_x \times$

$\mathbb{R}_\xi;\ \mathbb{C}^{\{3,6\}}))$ par :

$$Q\,u\,(x,\ \xi) = Q\,(x,\ \xi)\,u\,(x,\ \xi).$$

Le μ'-spectre de Q est donc : $\{\,\mu' \in \mathbb{R};\ \exists\,(x,\ \xi) \in \mathbb{R}^2;\ \det Q\,(x,\ \xi) = 0\,\}$.

Le problème est que le déterminant du symbole Q n'est pas nécessairement réel. On introduit un opérateur auxilliaire dont l'existence traduit l'autoadjonction du problème de départ. Notant :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p-\mu & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix}$$

on a $(p-\mu)\,E_+ + R_-\,E_{-+} = 0$, et donc $E_+^*\,(p-\mu)\,E_+ + E_+^*\,R_-\,E_{-+} = 0$ et donc $E_+^*\,R_-\,E_{-+}$ est autoadjoint. Ainsi, posant $E_{-+}^1 = R_-^*\,E_+$, l'opérateur $(E_{-+}^1)^*\,E_{-+}$ est autoadjoint.

E_{-+}^1 a les mêmes symétries que E_{-+} et on lui associe le symbole

$$Q^1\,(x,\ \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} e^{i\,(\alpha_1\,\left(\xi + \frac{x}{2}\right) + \alpha_2\,x)}\,E_{-+}^1\,(0,\ \alpha)$$

Ainsi l'opérateur $(Q^1)^*\,Q$ est autoadjoint.

Calculons maintenant le symbole Q^1 à des exponentiellement petits près. Grâce aux symétries, il suffit de calculer les termes $E_{-+}^1\,(\alpha,\ 0;\ j,\ 5)$.

$$\begin{aligned} E_{-+}^1\,(\alpha,\ 0;\ j,\ 5) &= (R_-^*\,E_+\,\delta_{0,5}|\delta_{\alpha,j}) \\ &= (E_+\,\delta_{0,5}|R_-\,\delta_{\alpha,j}) \\ &= (E_+\,\delta_{0,5}|g_{\alpha,j}) \\ &= (u|g_{\alpha,j}). \end{aligned}$$

On connaît u au voisinage des supports des $g_{\alpha,j}$ et ainsi :

$$\begin{aligned} E_{-+}^1\,(0,\ 0;\ 6,\ 5) &= (b\,(1-\chi_{0,6})\,w_{0,6}|g_{0,6}) \\ &= b\,\zeta \end{aligned}$$

où $\zeta = ((1-\chi_{0,6})\,w_{0,6}|g_{0,6}) = ((1-\chi_{0,1})\,w_{0,1}|g_{0,1})$ vérifie :

$$\begin{aligned} \zeta + \bar{\zeta} &= ((1-\chi_{0,1})\,w_{0,1}|g_{0,1}) + (\Gamma\,(1-\chi_{0,1})\,w_{0,1}|\Gamma\,g_{0,1}) \\ &= ((1-\chi_{0,1})\,w_{0,1}|g_{0,1}) + (\chi_{0,1}\,\Gamma\,w_{0,1}|\Gamma\,g_{0,1}) \\ &= ((1-\chi_{0,1})\,w_{0,1}|g_{0,1}) + (\chi_{0,1}\,w_{0,1}|g_{0,1}) \\ &= (w_{0,1}|g_{0,1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et de même, on trouve

$$E^1_{-+}((-1,\,1),\,0;\,3,\,5) = \bar{\zeta}\,\bar{a}^2 + \zeta\,a$$
$$E^1_{-+}((0,\,1),\,0;\,6,\,5) = \bar{\zeta}\,\overline{ab}$$
$$E^1_{-+}((1,\,0),\,0;\,6,\,5) = \bar{\zeta}\,\overline{ab}$$
$$E^1_{-+}(0,\,0;\,3,\,5) = \zeta\,\bar{b}^2$$
$$E^1_{-+}(\alpha,\,0;\,j,\,5) = 0 \text{ pour les autres valeurs de } (\alpha,\,j).$$

Et donc toujours à des exponentiellement petits près :

$$Q^1(x,\,\xi) = \begin{pmatrix} (\bar{\zeta}\,\bar{a}^2 + \zeta\,a)\,e^{i\left(\frac{x}{2}-\xi\right)} + \bar{\zeta}\,\bar{b}^2 & \zeta\,b + \bar{\zeta}\,\overline{ab}\,e^{-ix} + \bar{\zeta}\,\overline{ab}\,e^{-i\left(\xi+\frac{x}{2}\right)} \\ \zeta\,b + \bar{\zeta}\,\overline{ab}\,e^{ix} + \bar{\zeta}\,\overline{ab}\,e^{i\left(\xi+\frac{x}{2}\right)} & (\bar{\zeta}\,\bar{a}^2 + \zeta\,a)\,e^{i\left(\xi-\frac{x}{2}\right)} + \bar{\zeta}\,\bar{b}^2 \end{pmatrix}.$$

Grâce à l'ellipticité de la partie réelle de ζ, on peut remplacer Q^1 par $\dfrac{1}{|\zeta - i\,\alpha|}(Q^1 + \alpha\,Q)$ pour tout α réel, ce qui permet de remplacer ζ par $e^{i\theta}$ pour n'importe quel θ réel, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ en conservant l'autoadjonction de $(Q^1)^*\,Q$. On peut calculer les déterminants :

$$\det Q = 2\,\bar{a}\left(-\mathrm{Re}\,\frac{a^3}{|a|^4} + |a|^2 - |b|^2 p_0(x,\,\xi)\right) + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h})$$
$$\det Q^1 = 2\,\bar{a}\left(-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta^2\,a^3}{|a|^4} + |a|^2 - |b|^2 p_0(x,\,\xi)\right) + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h})$$

ceci étant vrai pour un certain $\varepsilon_0 > 0$.

Plaçons-nous dans la zone $C\,h \leq \mu' \leq (C+1)\,h$ pour un C assez grand, c'est-à-dire que $|a|$ est petit et $|b|$ proche de 1. Soit μ'_0 tel que $\mathrm{Re}\,a^3(\mu'_0) = 0$. On choisit $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Sur l'intervalle $\left[\mu'_0 - ch\left(\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{h}\right)^{-1},\ \mu'_0 + ch\left(\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{h}\right)^{-1}\right]$, pour $c > 0$ assez petit, $|\det Q^1| \geq c$, car $|\partial_{\mu'} \arg a| = \dfrac{1}{h}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{C\,h} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{h}\right)$, et on peut écrire :

$$\det(Q^1)^*\,Q = 4|a|^2 c(\mu',\,x,\,\xi)\,d(\mu',\,x,\,\xi) + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0/h})$$

où le reste est réel,

$$c(\mu',\,x,\,\xi) = \mathrm{Im}\,\frac{a^3}{|a|^4} + |a|^2 - |b|^2 p_0(x,\,\xi)$$
$$d(\mu',\,x,\,\xi) = -\mathrm{Re}\,\frac{a^3}{|a|^4} + |a|^2 - |b|^2 p_0(x,\,\xi).$$

Comme p_0 prend ses valeurs dans $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$, μ' est dans le μ'-spectre de Q dès que $\operatorname{Re}\frac{a^3}{|a|^4} \in [-1, 2]$, ce qui arrive sur un intervalle de longueur $c'\,h\left(\operatorname{Log}\frac{1}{h}\right)^{-1}$ contenant μ'_0, et ce pour $c' > 0$ assez petit, et de manière uniforme en μ'_0 , car sur l'intervalle $[C\,h,\ (C+1)\,h]$, $|a|$ est majoré et minoré. Or $\sharp\left\{\mu'_0 \in [C\,h;\ (C+1)\,h];\ \operatorname{Re}(a^3(\mu'_0)) = 0\right\} \geq c'\operatorname{Log}\frac{1}{h}\Big\}$ et donc :

$$|\mu'\text{-spectre}\,(Q) \cap [C\,h,\ (C+1)\,h]| \geq c'^2\,h.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

5. LIEN AVEC L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

Dans [Ke], section 1, où on ne faisait pas les hypothèses d'invariances de B et V par S, on construisait une rotation magnétique et des translations magnétiques commutant avec H et données par

$$\mathcal{F} = e^{if/h_0}\,\kappa^* \tag{5.1}$$

$$T_j = \iota\, e^{i\varphi_j/h_0}\,\tau_{\nu_j} \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2 \tag{5.2}$$

$\iota = \pm 1$, f et les φ_j sont des fonctions réelles vérifiant

$$t\,A - \kappa^*\,t\,A = df$$
$$t\,A - \tau_{\nu_j}\,t\,A = d\varphi_j.$$

On avait alors $T_1\,T_2 = e^{-ih}\,T_2\,T_1$ où h vérifie $h \equiv \frac{t\,\phi}{h_0}\ [2\,\pi]$. En imposant de plus $f(0) = 0$, on avait $\mathcal{F}^6 = \mathrm{Id}$ et pour un bon choix des φ_j, $T_2 = \mathcal{F}^{-1}\,T_1\,\mathcal{F}$ et $T_j^{-1} = \mathcal{F}^3\,T_j\,\mathcal{F}^3$.

On veut maintenant quantifier la symétrie S. On définit l'opérateur $\mathcal{S}\,u\,(x) = \bar{u}\,(S\,x)$. Pour qu'il commute avec H, il faut faire un changement de jauge, c'est-à-dire ajouter à A la différentielle d'une fonction réelle, ce qui ne change pas le spectre de H.

L'hypothèse est $S^*\,(B\,dx_1 \wedge dx_2) = -B\,dx_1 \wedge dx_2$ *i.e.* $d\,(S^*\,A + A) = 0$. Il existe donc une fonction réelle g telle que $S^*\,A + A = dg$. Composant

par S^* et sommant, on obtient $S^*\left(A - \frac{1}{2}\,dg\right) + \left(A - \frac{1}{2}\,dg\right) = 0$ et un changement de jauge permet donc d'avoir

$$S^*\,A + A = 0. \tag{5.3}$$

On a alors les égalités entre formes différentielles

$$\begin{aligned} -ih_0\,d\,(\mathcal{S}\,u) - \mathcal{S}\,ut\,A &= \overline{ih_0\,S^*\,du + S^*\,(ut\,A)} \\ &= S^*\,(\overline{ih_0\,du + (ut\,A)}). \end{aligned}$$

Ainsi $[(-ih_0\,d - t\,A)^*\,(-ih_0\,d - t\,A),\ \mathcal{S}] = 0$ et comme $[V,\ \mathcal{S}] = 0$:

$$[H,\ \mathcal{S}] = 0. \tag{5.4}$$

Étudions maintenant les relations de commutation de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{F}$ et les T_j. Montrons d'abord :

$$\mathcal{S}\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{F}^{-1}. \tag{5.5}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\mathcal{F}\mathcal{S}\,u\,(x) &= e^{-if\,(Sx)/h_0}\,u\,(\kappa^{-1}\,x) \\ \mathcal{F}^{-1}\,u\,(x) &= e^{-if\,(\kappa^{-1}x)/h_0}\,u\,(\kappa^{-1}\,x). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer $S^*\,f - \kappa^{-1*}\,f = 0$. Cette égalité est vraie en 0 et on montre que la différentielle de membre de gauche est nulle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\,d\,(S^*\,f - \kappa^{-1*}\,f) &= S^*\,(A - \kappa^*\,A) - \kappa^{-1*}\,(A - \kappa^*\,A) \\ &= S^*\,A - \kappa^{-1*}\,S^*\,A - \kappa^{-1*}\,A + A \\ &= 0. \end{aligned}$$

Montrons maintenant

$$ST_1\,S = T_2. \tag{5.6}$$

On a $\mathcal{S}\,T_1\,\mathcal{S}\,u\,(x) = \iota\,e^{-i\varphi_1\,(Sx)/h_0}\,u\,(x - \nu_2)$, ce qui nous conduit à calculer

$$d\,(S^*\,\varphi_1 + \varphi_2) = S^*\,(t\,A - \tau_{\nu_1}\,t\,A) + t\,A - \tau_{\nu_2}\,t\,A = 0.$$

On a donc montré $\mathcal{S}\,T_1\,\mathcal{S} = e^{ic/h_0}\,T_2$ pour un c indépendant de h_0. Conjuguant par $\mathcal{F}^3$, on obtient $\mathcal{S}\,T_1^{-1}\,\mathcal{S} = e^{ic/h_0}\,T_2^{-1}$. On passe aux

inverses et on obtient $\mathcal{S} T_1 \mathcal{S} = e^{-ic/h_0} T_2$, et donc $c = 0$. On a donc montré la relation (5.6).

On suit maintenant la démarche de [Ke], section 2, en ajoutant le suivi de l'invariance de H par $\mathcal{S}$.

On définissait un opérateur à un puits H_0 par

$$H_0 = H + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \chi(x - \alpha_1 \nu_1 - \alpha_2 \nu_2)$$

où χ est une fonction positive supportée par un petit voisinage de 0, vérifiant $\chi(0) > 0$. On appelle $\tilde{\mu}_0$ la plus petite valeur propre de H_0. Alors $\tilde{\mu}_0 - \operatorname{Inf} V \approx h_0$, $\operatorname{Sp}(H_0) \cap \left] -\infty, \tilde{\mu}_0 + \frac{h_0}{C} \right] = \{\tilde{\mu}_0\}$, et $\tilde{\mu}_0$ est simple. Soit φ_0 une fonction propre associée. On pose

$$T^\alpha = e^{i \frac{h}{2} \alpha_1 \alpha_2} T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2}$$
$$\varphi_\alpha = T^\alpha \varphi_0.$$

On a alors $\mathcal{S} T^\alpha \mathcal{S} = T^{\delta(\alpha)}$ avec $\delta(\alpha) = (\alpha_2, \alpha_1)$. Si on choisit χ telle que $\chi \circ S = \chi$, on peut choisir φ_0 telle que $\mathcal{S} \varphi_0 = \varphi_0$ car la valeur propre μ_0 est simple. Ainsi

$$\mathcal{S} \varphi_\alpha = \varphi_\delta(\alpha). \tag{5.7}$$

On appelle F le sous-espace spectral de H associé à l'intervalle $\left] -\infty, \tilde{\mu}_0 + \frac{h_0}{2C} \right]$. D'après [Ke], la famille $\{e_\alpha\}$ obtenue par projection orthogonale de $\{\varphi_\alpha\}$ sur F, puis orthonormalisation, est une base de F. On a maintenant $\mathcal{S} e_\alpha = e_{\delta(\alpha)}$. Appelant W la matrice de $H_{|F}$ dans cette base, on a donc $W_{\alpha, \beta} = \overline{W_{\delta(\alpha), \delta(\beta)}}$. W a le même spectre que $\mu_0 \operatorname{Id} + \operatorname{op}_h^w \tilde{p}$, avec $\mu_0 - \tilde{\mu}_0 = \mathcal{O}(h_0^\infty)$,

$$\tilde{p}(x, \xi) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} W_{(j,k),0} \, e^{-i\left(kx + j\left(\xi + \frac{x}{2}\right)\right)}$$

et $W_{(j,k),0}$ est réel. Posons $\lambda(t, h_0) = 2 W_{(1,0),0}$, $\tilde{p} = \lambda(t, h_0) p$. Si on prouve (1.2) $p(x, -\xi) = p(x, \xi)$, alors p vérifie les hypothèses des théorèmes 1 et 2 et ce pour un ε tendant vers 0 avec h_0. Montrons donc

(1.2) en utilisant $W_{(k,j),0} = W_{(j,k),0}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(x, \xi) &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} W_{(j,k),0}\, e^{-i\left(kx+j\left(\xi+\frac{x}{2}\right)\right)} \\
&= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} W_{(k,j),0}\, e^{-i\left(j\left(\xi+\frac{x}{2}\right)+k\left(\left(\frac{3x}{4}-\frac{\xi}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{x}{2}\right)\right)\right)} \\
&= \tilde{p}\left(\xi+\frac{x}{2}, \frac{3x}{4}-\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \tilde{p}(\rho(x, -\xi)) \\
&= \tilde{p}(x, -\xi).
\end{aligned}$$

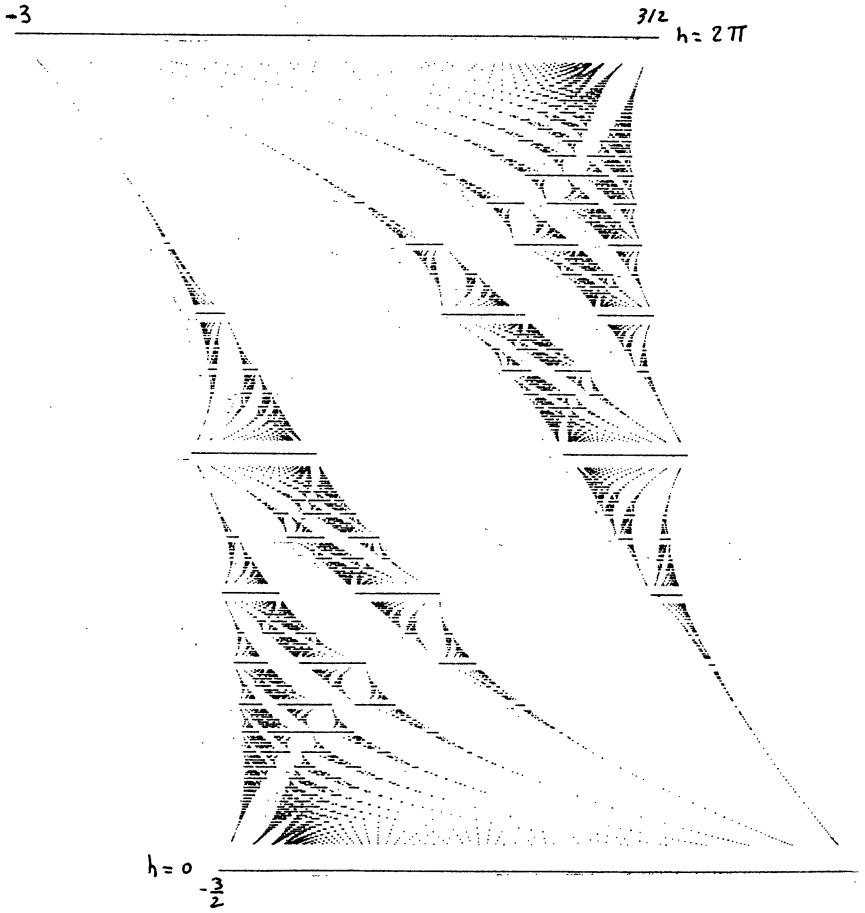

Figure 4.

On a donc montré (1.2) pour $\tilde{p}$, donc pour p, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

APPENDICE

La figure 4, page précédente, représente l'équivalent du papillon de Hofstadter pour l'opérateur de Harper triangulaire. Il représente le spectre de l'opérateur en fonction de l'ordonnée H pour $h/2\pi = p/q$ pour $q \leq 30$ et $0 \leq h \leq 2\pi$. Le dessin complet est 4π-périodique en h et symétrique par rapport à la droite $h = 0$.

RÉFÉRENCES

[Ba-Fl] A. BARELLI et R. FLECKINGER, Semiclassical Analysis of Harper-like Models, *Phys. Rev. B.*

[Ba-Kr] A. BARELLI et C. KREFT, Braid-structure in a Harper model as an example of phase space tunneling, *J. Phys. I France 1*, 1991, p. 1229-1249.

[Be] R. BEALS, Characterization of P.D.O. and applications, *Duke Math. J44*, 1977, p. 45-57.

[Be-Kr-Se] J. BELLISSARD, C. KREFT et R. SEILER, Analysis of the spectrum of a particle on a triangular lattice with two magnetic fluxes by algebric and numerical methods, *J. Phys. A 24*, 1991, n° 10, pp. 2329-2353.

[Bu-Fe] V. BUSLAEV and S. FEDOTOV, Complex WKB method for Harper's equation, *Report of Mittag-Leffler institut* 11, 1993.

[Ca] U. CARLSSON, An infinite number of wells in the semi-classical limit, *Asymptotic Analysis*, vol. **3**, n° 3, 1990, p. 189-214.

[Cl-Wa] F. H. CLARO et G. H. WANNIER, Magnetic subband structure of electron in hexagonal lattices, *Physical Review B*, vol. **19**, n° 12, p. 6068-6074.

[Co-Pa;1] Y. COLIN DE VERDIERE et B. PARISSE, Équilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale, *Prépublication Institut Fourier*, 1993.

[Co-Pa;2] Y. COLIN DE VERDIERE et B. PARISSE, Équilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerfeld, *Prébublication Institut Fourier*, 1994.

[He-Ke] B. HELFFER et P. KERDELHUE, On the Total Bandwidth for the Rational Harper's Equation, *Prépublication E.N.S.*, 1994.

[He-Sj;1] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Analyse semi-classique pour l'équation de Harper, *Mémoire de la S.M.F.*, n° 34, 1988.

[He-Sj;2] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Analyse semi-classique pour l'équation de Harper 2 : comportement semi-classique près d'un rationnel, *Mémoire de la S.M.F.*, n° 40, t. **118**, (1), 1990.

[He-Sj;3] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Semi-classical analysis for Harper's equation 3 : Cantor structure of the spectrum, *Mémoire de la S.M.F.*, n° 39, t. **117**, (4), 1989.

[He-Sj;4] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique, *Annales Sc. Norm. Sup. di Pisa,* Ser. IV, vol. **14**, (4), 1987, p. 625-657.

[He-Sj;5] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, On diamagnetism and de Haas-van Halphen effect, *Ann. Inst. Henri Poincaré* (*section phys. th.*), vol. **52**, n° 4, 1990, p. 303-375.

[Ke] P. KERDELHUE, Spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique avec symétrie d'ordre six, *Mémoire de la S.M.F.*, n° 51, t. **120**, (4), 1992.

[Sj] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, n° 95, 1982.

[Wi-Au] M. WILKINSON et E. AUSTIN, Semi-classical analysis of phase space lattices with threefold symetry, *J. Phys. A. Math. gen.*, vol. **23**, n° 12, 1990, p.2529-2554.

(Manuscrit reçu le 2 juin 1994;
version révisée reçue le 25 juillet 1994.)