

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

IRINA ANA TURTOI

## **Prolongement des structures spinorielles sur la variété des jets**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 61, n° 1 (1994), p. 63-73

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1994\\_\\_61\\_1\\_63\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1994__61_1_63_0)

© Gauthier-Villars, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Prolongement des structures spinorielles sur la variété des jets

par

Irina Ana TURTOI

Institut de Construction, Département de Mathématique,  
124 Bd. Lacul Tei, sect 2, Bucarest, Roumanie

---

RÉSUMÉ. — On considère une variété différentiable réelle de dimension  $n$ , munie d'une structure spinorielle et on démontre qu'on peut construire, d'une manière canonique, une structure spinorielle sur la variété des jets d'ordre 1 de la variété considérée. Dans le paragraphe 1, on présente certains résultats sur la théorie des jets. Le but du paragraphe 2 est de montrer que la variété des jets  $J_q^1 C(Q)$  d'une algèbre de Clifford  $C(Q)$  peut être munie d'une structure d'algèbre. Dans le paragraphe 3, on étudie d'abord le groupe de Lie  $J_q^1 \text{Pin } Q$  et l'on démontre que ce groupe est homomorphe au groupe de Lie  $\text{Pin } \tilde{Q}$ ,  $\tilde{Q}$  étant une forme quadratique convenablement choisie sur l'espace vectoriel des jets de l'espace vectoriel sur lequel est donnée la forme quadratique  $Q$ . L'étude du groupe  $J_q^1 O(Q)$  entreprise dans le même paragraphe montre que ce groupe est homomorphe au groupe  $O(\tilde{Q})$ . On met en évidence un diagramme commutatif qui va servir au but proposé. Le paragraphe 4 présente un exemple de prolongement d'une structure spinorielle de la variété différentiable  $M = \mathbb{R}^2$  sur la variété des jets  $J_q^1 \mathbb{R}^2$ , quel que soit  $q$ .

ABSTRACT. — Let us consider a real differential manifold of dimension  $n$ , with a spinorial structure. We proved that it is possible to construct, in a canonical way, a spinorial structure on the 1-jets' manifold of the considered manifold. In the first paragraph, there are presented some general results in the theory of 1-jets. In the second paragraph, it is proved that 1-jets' manifold  $J_q^1 C(Q)$  of a Clifford algebra  $C(Q)$  could be organized as an algebra. In the third paragraph, there is studied firstly the Lie group  $J_q^1 \text{Pin } Q$  and it is proved that this one is homomorphic with the

Lie group  $\text{Pin } \tilde{Q}$ ,  $\tilde{Q}$  being a quadratic form, chosen in a convenient way, on the vectorial space of 1-jets  $J_q^1 V$ , of the vectorial space  $V$  on which the quadratic form  $Q$  was given. The study of the group  $J_q^1 O(Q)$ , in the same paragraph, shows that this group is homomorphic with the Lie group  $O(\tilde{Q})$ . There is also given here a commutative diagram, which will serve for our purpose. In the last paragraph, there is given an example of prolongation of a spin structure of the differential manifold  $M = \mathbb{R}^2$  in the manifold of 1-jets  $J_q^1 M$ .

## 1. PROPRIÉTÉS DE BASE

Soient  $M$  une variété différentiable, réelle, de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  l'ensemble des applications différentiable  $C^\infty$ , définies sur  $\mathbb{R}^q$  à valeurs dans  $M$ . On définit sur  $\mathcal{F}$  une relation d'équivalence comme suit : deux applications

$\varphi, \psi \in \mathcal{F}$  sont en relation si et seulement si  $\varphi(0) = \psi(0)$  et  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t^\alpha} \right|_0 = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t^\alpha} \right|_0$ ,

quel que soit  $\alpha = 1, 2, \dots, q$ . La classe d'équivalence d'une application  $\varphi \in \mathcal{F}$  s'appelle le jet d'ordre 1 de  $\varphi$  et on le note par  $j_q \varphi$ . L'ensemble des jets d'ordre 1 des applications de  $\mathcal{F}$  est noté par  $J_q^1 M$  [2]. Il est facile de munir cet ensemble d'une structure de variété différentiable réelle de dimension  $n(q+1)$ . En effet, si  $U$  est le domaine d'une carte de la variété  $M$ , avec les coordonnées  $(x^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , alors  $J_q^1 U$  est le domaine d'une carte de  $J_q^1 M$  avec les coordonnées  $(x^i, x_\alpha^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, q$ , où nous avons noté par  $(x^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  les coordonnées de  $\varphi(0)$  dans la carte  $(U, x^i)$  et par :

$$x_\alpha^i = \left. \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^\alpha} \right|_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, q.$$

La variété différentiable  $J_q^1 M$  appelée la variété de jets d'ordre 1 de la variété différentiable  $M$ , contient la variété  $M$  comme sous-variété.

Si  $f: M \rightarrow N$  est une application différentiable de classe  $C^\infty$  entre les variétés différentiables réelles  $M$  et  $N$ , on peut construire  $f^1: J_q^1 M \rightarrow J_q^1 N$ , application différentiable de classe  $C^\infty$ , donnée par :

$$f^1(j_q \varphi) = j_q(f \circ \varphi)$$

quel que soit  $j_q \varphi \in J_q^1 M$ .

Supposons maintenant la variété différentiable  $M$  pseudo-riemannienne. Soit  $P(M, O(Q))$  le fibré principal des repères orthonormés de  $M$ , où  $Q$  est une forme quadratique réelle de la même signature que celle de la métrique de  $M$ .

Une structure spinorielle sur  $M$  est un homomorphisme de fibrés principaux  $f : \Sigma(M, \text{Pin } Q) \rightarrow P(M, O(Q))$  qui se projette sur l'application identique de  $M$  et qui correspond à la représentation  $p : \text{Pin } Q \rightarrow O(Q)$  ([1], [3], [4]). En remplaçant  $\text{Pin } Q$  avec  $\text{Spin } Q$  et  $O(Q)$  avec  $SO(Q)$ , nous obtenons une structure spinorielle spéciale sur  $M$ .

On montre facilement, [2], que si  $f : \Sigma(M, \text{Pin } Q) \rightarrow P(M, O(Q))$  est une structure spinorielle sur  $M$ , alors

$$f^1 : J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \text{Pin } Q) \rightarrow J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q))$$

est un homomorphisme de fibrés principaux qui se projette sur l'application identique de  $J_q^1 P$  et qui correspond à l'homomorphisme  $p^1 : J_q^1 \text{Pin } Q \rightarrow J_q^1 O(Q)$ . Ce résultat est une conséquence du fait que si  $P(M, G)$  est un fibré principal, alors  $J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 G)$  est aussi un fibré principal. De plus, si  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  est un recouvrement de trivialisations locales du fibré  $P$  avec les fonctions de transition  $s_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ , alors  $\{J_q^1 U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  est un recouvrement de trivialisations locales du fibré  $J_q^1 P$  avec les fonctions de transition  $s_{\alpha\beta}^1 : J_q^1 U_\alpha \cap J_q^1 U_\beta \rightarrow J_q^1 G$  [2].

Nous nous proposons de construire, à l'aide des applications  $f^1$  et  $p^1$ , une structure spinorielle sur la variété  $J_q^1 M$ , si

$$f : \Sigma(M, \text{Pin } Q) \rightarrow P(M, O(Q))$$

est une telle structure sur  $M$ .

## 2. L'ÉTUDE DE LA VARIÉTÉ DES JETS D'UNE ALGÈBRE DE CLIFFORD

Soit  $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique réelle, non dégénérée, sur l'espace vectoriel réel  $V$  de dimension  $n$  et  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sa forme polaire.

L'algèbre de Clifford  $C(Q)$  associée à la forme quadratique  $Q$  est définie par une propriété universelle, [1], comme indiqué ci-dessous :

- (i) il y a une application linéaire  $\theta : V \rightarrow C(Q)$ , tel que

$$(\theta(x))^2 = Q(x) \cdot 1,$$

quel que soit  $x \in V$ ;

(ii) quel que soit l'application linéaire  $u: V \rightarrow A$ , ( $A$  étant une algèbre réelle) tel que  $(u(x))^2 = Q(x) \cdot 1$ , il existe un homomorphisme unique d'algèbres  $u'$  tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & C(Q) & \\ \theta \nearrow & & \searrow u' \\ V & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

soit commutatif.

En conséquence, pour chaque  $x, y \in V$ , il y a la relation :

$$xy + yx = 2B(x, y) \cdot 1,$$

où la juxtaposition dénote la loi de multiplication de l'algèbre  $C(Q)$ .

La variété différentiable des jets  $J_q^1 V$  est munie d'une manière canonique d'une structure d'espace vectoriel. On peut définir alors la forme bilinéaire symétrique non dégénérée :

$$\tilde{B}: J_q^1 V \times J_q^1 V \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$\tilde{B}(j_q \varphi, j_q \psi) = B(\varphi(0), \psi(0)) + \sum_{\alpha=1}^q B\left(\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t^\alpha}\right|_0, \left.\frac{\partial \psi}{\partial t^\alpha}\right|_0\right), \quad (1)$$

quels que soient  $j_q \varphi, j_q \psi \in J_q^1 V$ . Soit  $\tilde{Q}: J_q^1 V \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique associée à la forme bilinéaire  $\tilde{B}$ . Nous allons donner sur l'espace vectoriel  $J_q^1 C(Q)$  une loi de multiplication :

$$*: J_q^1 C(Q) \times J_q^1 C(Q) \rightarrow J_q^1 C(Q)$$

par

$$j_q \varphi * j_q \psi = j_q(\varphi\psi) \quad (2)$$

quels que soient  $j_q \varphi, j_q \psi \in J_q^1 C(Q)$ , où l'application  $\varphi\psi: \mathbb{R}^q \rightarrow C(Q)$  est donnée par :

$$(\varphi\psi)(t) = \varphi(t)\psi(t), t \in \mathbb{R}^q.$$

Il en résulte que  $J_q^1 C(Q)$  devient une algèbre avec la loi de multiplication  $*$ . Nous pouvons remarquer encore que  $J_q^1 V \subset J_q^1 C(Q) \cap C(\tilde{Q})$ .

### 3. SUR LES GROUPES $J_q^1 \text{Pin } Q$ ET $J_q^1 O(Q)$

On sait que le groupe  $\text{Pin } Q$  est le groupe des éléments d'algèbre de Clifford  $C(Q)$ , tel que  $x = x_1 x_2 \dots x_h$  avec  $x_1, x_2, \dots, x_h \in V$  et  $Q(x_i) = \pm 1, i = 1, 2, \dots, h$ , avec  $h$  un nombre entier quelconque. Dans la théorie des algèbres de Clifford on construit un revêtement  $(p, \text{Pin } Q)$  d'ordre 2 de  $O(Q)$ , [1], avec  $p(x) = s_{x_1} \circ s_{x_2} \circ \dots \circ s_{x_h}$  où  $s_{x_1}, s_{x_2}, \dots, s_{x_h}$

sont respectivement les symétries définies par les vecteurs non isotropes  $x_1, x_2, \dots, x_h$ .

La variété différentiable  $J_q^1 \text{Pin Q}$  est incluse dans la variété différentiable  $J_q^1 C(Q)$  et, de plus, devient un groupe de Lie avec la loi de multiplication  $*$  de l'algèbre  $J_q^1 C(Q)$ .

Soit maintenant l'application différentiable  $\varphi: \mathbb{R}^q \rightarrow \text{Pin Q}$  tel que  $\varphi(t) \in V$ , quel que soit  $t \in \mathbb{R}^q$ . Nous avons donc,  $j_q \varphi \in J_q^1 \text{Pin Q} \cap J_q^1 V$ , ce qui implique  $Q(\varphi(t)) = \pm 1$ , quel que soit  $t \in \mathbb{R}^q$ . Il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} Q(\varphi(t)) = 0 \text{ quels que soient } \alpha = 1, 2, \dots, q \text{ et } t \in \mathbb{R}^q, \text{ donc } \tilde{Q}(j_q \varphi) = \pm 1;$$

en conséquence  $j_q \varphi \in \text{Pin } \tilde{Q}$ . Dans le cas général, soit  $j_q \varphi \in J_q^1 \text{Pin Q}$ ; donc  $\varphi(0) \in \text{Pin Q}$  et alors :

$$\varphi(0) = x_1 x_2 \dots x_h \text{ avec } x_1, x_2, \dots, x_h \in V, \quad Q(x_i) = \pm 1, \quad i = 1, 2, \dots, h.$$

Il en résulte  $\tilde{Q}(j_q x_i) = \pm 1, i = 1, 2, \dots, h$ .

On prend l'application

$$i: J_q^1 \text{Pin Q} \rightarrow \text{Pin } \tilde{Q}, \quad i(j_q \varphi) = j_q x_1 \tilde{*} j_q x_2 \tilde{*} \dots \tilde{*} j_q x_h,$$

où  $\tilde{*}$  dénote la loi de multiplication de l'algèbre  $C(\tilde{Q})$ .

Nous avons ainsi la :

PROPOSITION 1. — *Il existe un homomorphisme de groupes :*

$$i: J_q^1 \text{Pin Q} \rightarrow \text{Pin } \tilde{Q}$$

donné par :

$$i(j_q \varphi) = j_q x_1 \tilde{*} j_q x_2 \tilde{*} \dots \tilde{*} j_q x_h, \tag{3}$$

avec  $\varphi(0) = x_1 x_2 \dots x_h$ , avec  $x_1, x_2, \dots, x_h \in V, Q(x_i) = \pm 1, i = 1, 2, \dots, h$ , pour chaque  $j_q \varphi \in J_q^1 \text{Pin Q}$ .

*Démonstration.* — Soient  $j_q \varphi, j_q \psi \in J_q^1 \text{Pin Q}$ , avec  $\varphi(0) = x_1 x_2 \dots x_h$  et  $\psi(0) = y_1 y_2 \dots y_k$ , les vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_h, y_1, y_2, \dots, y_k$  de  $V$  ayant  $Q(x_i) = \pm 1, Q(y_j) = \pm 1$ , quels que soient  $i = 1, 2, \dots, h, j = 1, 2, \dots, k$ . Nous avons :

$$i(j_q \varphi \tilde{*} j_q \psi) = i(j_q(\varphi \psi)).$$

D'autre part,

$$(\varphi \psi)(0) = \varphi(0) \psi(0) = x_1 x_2 \dots x_h y_1 y_2 \dots y_k.$$

Donc

$$i(j_q \varphi * j_q \psi) = j_q x_1 \tilde{*} j_q x_2 \tilde{*} \dots \tilde{*} j_q x_h \tilde{*} j_q y_k \tilde{*} j_q y_2 \tilde{*} \dots \tilde{*} j_q y_k,$$

ce que nous montre que :

$$i(j_q \varphi * j_q \psi) = i(j_q \varphi) \tilde{*} i(j_q \psi),$$

Q.E.D.

quels que soient  $j_q \varphi, j_q \psi \in J_q^1 \text{Pin Q}$ .

Maintenant nous allons étudier la variété différentiable  $J_q^1 O(Q)$ . Comme l'on sait, [2],  $J_q^1 O(Q)$  est un groupe de Lie, d'une manière canonique.

En effet, quels que soient  $j_q f, j_q g \in J_q^1 O(Q)$  on prend leurs produits :

$$j_q f \cdot j_q g = j_q (fg),$$

où l'application  $fg: \mathbb{R}^q \rightarrow O(Q)$  est donnée par :

$$(fg)(t) = f(t)g(t),$$

quels que soient  $t \in \mathbb{R}^q$ , la juxtaposition  $f(t)g(t)$  dénotant la loi de multiplication de  $O(Q)$ .

Soit  $j: J_q^1 O(Q) \rightarrow O(\tilde{Q})$  l'application donnée comme ci-dessous. Quel que soit  $j_q f \in J_q^1 O(Q)$ , on a  $f(0) \in O(Q)$ , donc  $f(0)$  est un produit de symétries, en tenant compte du théorème de Cartan-Dieudonné. Soit :

$$f(0) = s_{x_1} \circ s_{x_2} \circ \dots \circ s_{x_h},$$

avec  $x_1, x_2, \dots, x_h \in V$ ,  $Q(x_i) = \pm 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$  et  $s_{x_1}, s_{x_2}, \dots, s_{x_h}$  les symétries définies respectivement par  $x_1, x_2, \dots, x_h$ , dans l'espace vectoriel  $V$ . On a aussi  $\tilde{Q}(j_q x_i) = \pm 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ . Nous prenons:

$$j(j_q f) = \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \tilde{s}_{j_q x_2} \circ \dots \circ \tilde{s}_{j_q x_h}, \quad (3')$$

avec  $\tilde{s}_{j_q x_1}, \tilde{s}_{j_q x_2}, \dots, \tilde{s}_{j_q x_h}$  les symétries définies respectivement par  $j_q x_1, j_q x_2, \dots, j_q x_h$  dans l'espace vectoriel  $J_q^1 V$ .

Nous avons donc tout de suite la :

PROPOSITION 2. — *L'application :*

$$j: J_q^1 O(Q) \rightarrow O(\tilde{Q})$$

*définie ci-dessus est un homomorphisme de groupes*

Il est facile maintenant de montrer la :

PROPOSITION 3. — *Soit  $\tilde{p}: \text{Pin } \tilde{Q} \rightarrow O(\tilde{Q})$  la représentation de  $\text{Pin } \tilde{Q}$  analogue à la représentation  $p: \text{Pin } Q \rightarrow O(Q)$ . Alors, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} J_q^1 \text{Pin } Q & \xrightarrow{i} & \text{Pin } \tilde{Q} \\ p^1 \downarrow & & \tilde{p} \downarrow \\ J_q^1 O(Q) & \xrightarrow{j} & O(\tilde{Q}) \end{array} \quad (4)$$

*est commutatif.*

*Démonstration.* — Il faut montrer que  $\tilde{p} \circ i = j \circ p^1$ . Pour chaque  $j_q \varphi \in J_q^1 \text{Pin } Q$ , nous avons, en utilisant (3) :

$$(\tilde{p} \circ i)(j_q \varphi) = \tilde{p}(j_q \varphi(0)) = \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \dots \circ \tilde{s}_{j_q x_h},$$

si  $\varphi(0) = x_1 x_2 \dots x_h$ , avec  $x_1, x_2, \dots, x_h \in V$ ,  $Q(x_i) = \pm 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ .  
D'autre part, en utilisant (3'), nous avons :

$$(j \circ p^1)(j_q \varphi) = j(j_q(p \varphi)) = j(s_{x_1} \circ s_{x_2} \circ \dots \circ s_{x_h}) = \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \dots \circ \tilde{s}_{j_q x_h}.$$

Q.E.D.

Nous allons maintenant montrer le :

**THÉOREME 4.** — *Chaque structure spinorielle d'une variété pseudo-riemannienne peut être prolongée à une structure spinorielle sur la variété des jets de la variété donnée.*

*Démonstration.* — Soit  $f: \Sigma(M, \text{Pin } Q) \rightarrow P(M, O(Q))$  une structure spinorielle sur la variété différentiable pseudo-riemannienne  $M$ . Nous pouvons considérer :

$$h: J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \text{Pin } Q) \rightarrow \Sigma'(J_q^1 M, \text{Pin } \tilde{Q})$$

l'homomorphisme de fibrés principaux qui se projette sur l'application identique de  $J_q^1 M$  et correspond à l'homomorphisme  $i: J_q^1 \text{Pin } Q \rightarrow \text{Pin } \tilde{Q}$ , donné dans la proposition 1.

Soit aussi  $g: J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q)) \rightarrow P'(J_q^1 M, O(\tilde{Q}))$  l'homomorphisme de fibrés principaux qui se projette sur l'application identique de  $J_q^1 M$  et correspond à l'homomorphisme  $j: J_q^1 O(Q) \rightarrow O(\tilde{Q})$ , donné dans la proposition 2.

Soit, en fin,  $f^1: J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \text{Pin } Q) \rightarrow J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q))$  l'homomorphisme de fibrés principaux qui se projette sur l'application identique de  $J_q^1 M$  et correspond à l'homomorphisme  $p^1: J_q^1 \text{Pin } Q \rightarrow J_q^1 O(Q)$ .

Nous allons construire une structure spinorielle sur la variété des jets  $J_q^1 M$ , en utilisant les fonctions de transition correspondant à un recouvrement de trivialisations locales pour les fibrés principaux en discussion, [5].

Soit  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un recouvrement de trivialisations locales pour les fibrés principaux  $P(M, O(Q))$  et  $\Sigma(M, \text{Pin } Q)$  aussi. En considérant  $\{\sigma_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in I}$ , les fonctions de transition du fibré  $\Sigma(M, \text{Pin } Q)$  correspondant au recouvrement donné, il en résulte  $\{\sigma_{\alpha\beta}^1\}_{\alpha, \beta \in I}$  les fonctions de transition du fibré  $P(M, O(Q))$ .

D'autre part, soit  $\{J_q^1 U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  le recouvrement de trivialisations locales des fibrés principaux  $J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q))$  et  $J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \text{Pin } Q)$  aussi, recouvrement qui s'obtient d'une manière canonique en tenant compte du recouvrement  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ci-dessus. Alors, les fonctions de transition correspondant pour les fibrés  $J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q))$  [resp.  $J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \text{Pin } Q)$ ] sont  $\{p^1(\sigma_{\alpha\beta}^1)\}_{\alpha\beta \in I}$  (resp.  $\{\sigma_{\alpha\beta}^1\}_{\alpha\beta \in I}$ ).



Considérons maintenant  $\Sigma'(J_q^1 M, \text{Pin } \tilde{Q})$  — le fibré principal ayant  $\{i(\sigma_{\alpha\beta}^1)\}_{\alpha\beta \in I}$  comme fonctions de transition qui correspondent au recouvrement de trivialisations locale  $\{J_q^1 U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . En même temps, soit  $P'(J_q^1 M, O(\tilde{Q}))$  — le fibré principal avec les fonctions de transition  $\{j(p^1(\sigma_{\alpha\beta}^1))\}_{\alpha\beta \in I}$  qui correspondent aussi au recouvrement de trivialisations locale  $\{J_q^1 U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Il existe

$$\tilde{f}: \Sigma'(J_q^1 M, \text{Pin } \tilde{Q}) \rightarrow P'(J_q^1 M, O(\tilde{Q}))$$

un homomorphisme de fibrés principaux, qui se projette sur l'application identique de  $J_q^1 M$  et correspond à la représentation  $\tilde{p}: \text{Pin } \tilde{Q} \rightarrow O(\tilde{Q})$  car, grâce au diagramme commutative (4), nous avons

$$(\tilde{p} \circ i)(\sigma_{\alpha\beta}^1) = (j \circ p^1)(\sigma_{\alpha\beta}^1) \quad (5)$$

quels que soient  $\alpha, \beta \in I$ .

En tenant compte de (5), il en résulte que  $\tilde{f}$  est une structure spinorielle sur la variété des jets  $J_q^1 M$ .

Q.E.D.

*Remarques.* — (i) Chaque structure spinorielle sur la variété différentiable pseudo-riemannienne  $M$  peut être prolongée en une structure spinorielle, unique à un isomorphisme près, sur la variété des jets  $J_q^1 M$ .

(ii) La prolongation d'une structure spinorielle spéciale sur  $M$  en une structure spinorielle sur  $J_q^1 M$  d'après le théorème 4 nous donne sur  $J_q^1 M$  une structure spinorielle spéciale aussi.

#### 4. EXEMPLE

On sait qu'il y a des variétés différentiables qui ne possèdent pas des structures spinorielles, tandis qu'il y a des variétés différentiables sur lesquelles on peut donner une ou plusieurs structures spinorielles. Si la deuxième classe de Stiefel-Whitney d'une variété différentiable est nulle, alors il existe des structures spinorielles sur la variété considérée.

Nous allons construire un exemple de structure spinorielle sur la variété différentiable  $M = \mathbb{R}^2$  munie de la métrique euclidienne.

Soient  $\{e_1, e_2\}$  le repère canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $P = P(M, SO(2))$  le fibré des repères orthogonaux de  $\mathbb{R}^2$ , positifs orientés, c'est-à-dire  $P$  est l'ensemble des paires  $\{(x, X)\}$  avec  $x \in M$  et  $X = \{f_1, f_2\}$  un repère orthonormal de  $\mathbb{R}^2$  de la même orientation que le repère canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

D'autre part, soit  $\text{Spin}(2)$  — le groupe  $\text{Spin}$  de l'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique  $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$ , quels que soient  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Ce groupe peut être considéré comme le groupe des éléments de la forme

$$\cos \varphi \cdot 1 + (\sin \varphi) e_1 e_2, \quad \text{avec } \varphi \in [0, 2\pi).$$

En effet,  $\text{Spin}(2)$  est le groupe des éléments de  $C(Q)$  de la forme  $x_1 x_2 \dots x_h$  avec  $x_1, x_2, \dots, x_h \in \mathbb{R}^2$ , avec  $Q(x^i) = 1, i = 1, 2, \dots, h$  et  $h$  un nombre pair. En considérant  $x_1 x_2 \in \text{Spin}(2)$  et en utilisant les conditions :  $Q(x_1) = Q(x_2) = 1$  il en résulte  $(x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 = (x_2^1)^2 + (x_2^2)^2 = 1$  où  $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$  et  $x_2 = (x_2^1, x_2^2)$ . Alors, il existe,  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi)$  de manière que l'on peut considérer  $x_1 = (\cos \alpha_1) e_1 + (\sin \alpha_1) e_2$  et  $x_2 = (\cos \alpha_2) e_1 + (\sin \alpha_2) e_2$  où  $\{e_1, e_2\}$  est le repère canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Donc :  $x_1 x_2 = \cos \beta \cdot 1 + (\sin \beta) e_1 e_2, \beta \equiv \alpha_2 - \alpha_1 \pmod{2\pi}, \beta \in [0, 2\pi)$ . D'autre part, en prenant  $x_3 x_4 \in \text{Spin}(2)$  avec  $x_3 = (\cos \alpha_3) e_1 + (\sin \alpha_3) e_2$  et  $x_4 = (\cos \alpha_4) e_1 + (\sin \alpha_4) e_2$  nous obtenons :  $x_3 x_4 = \cos \gamma \cdot 1 + (\sin \gamma) e_1 e_2, \gamma \equiv \alpha_4 - \alpha_3 \pmod{2\pi}, \gamma \in [0, 2\pi)$ . Donc :  $x_1 x_2 x_3 x_4 = \cos \delta \cdot 1 + (\sin \delta) e_1 e_2, \delta \equiv \beta + \gamma \pmod{2\pi}, \delta \in [0, 2\pi)$  et

$$\text{Spin}(2) = \{ \cos \varphi \cdot 1 + (\sin \varphi) e_1 e_2 \mid \varphi \in [0, 2\pi) \}.$$

Il n'est pas difficile à voir que la représentation  $p : \text{Spin}(2) \rightarrow SO(2)$  est donnée par :

$$p(\cos \varphi \cdot 1 + (\sin \varphi) e_1 e_2) = r_{2\varphi},$$

où  $r_{2\varphi}$  est la rotation d'angle  $2\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$ , dont les équations dans le repère canonique de  $\mathbb{R}^2$  sont :

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \cos 2\varphi - x^2 \sin 2\varphi \\ y^2 &= x^1 \sin 2\varphi + x^2 \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Soit maintenant la variété différentiable  $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times S^1$  sur laquelle le groupe  $\text{Spin}(2)$  agit de manière suivante. Quels que soient

$$\begin{aligned} z_1 &= (\rho_1 \cos \alpha_1, \rho_1 \sin \alpha_1) \in \mathbb{R}^2 \\ z_2 &= (\cos \alpha_2, \sin \alpha_2) \in S^1 \\ g &= \cos \varphi \cdot 1 + (\sin \varphi) e_1 e_2 \in \text{Spin}(2) \end{aligned}$$

nous définissons :

$$(z_1, z_2) g = (z'_1, z'_2)$$

avec

$$z'_1 = (\rho_1 \cos \alpha'_1, \rho_1 \sin \alpha'_1), \quad z'_2 = (\cos \alpha'_2, \sin \alpha'_2)$$

où

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \varphi, \quad \alpha'_2 = \alpha_2 + \varphi.$$

Il en résulte que  $\Sigma / \sim = \mathbb{R}^2$ , où «  $\sim$  » est la relation d'équivalence induite par l'action de  $\text{Spin}(2)$  sur  $\Sigma$ . La projection canonique est l'application  $\pi : \Sigma \rightarrow M$ , donnée par

$$\pi(z_1, z_2) = (\rho_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \rho_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2))$$

Donc nous avons obtenu un fibré principal  $\Sigma = \Sigma(M, \text{Spin}(2))$ .

En gardant les notations ci-dessus, soit  $f : \Sigma \rightarrow P$ , l'application donnée par

$$f(z_1, z_2) = (x, X),$$

où

$$x = (\rho_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \rho_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)),$$

$X = \{f_1, f_2\}$  étant le repère de  $\mathbb{R}^2$  obtenu du repère canonique de  $\mathbb{R}^2$  par la rotation d'angle  $\alpha_1 + \alpha_2$ .

On montre sans difficulté que

$$f((z_1, z_2)g) = (x, X)p(g)$$

car  $(x, X)p(g) = (x, Y)$  où  $Y$  représente le repère de  $\mathbb{R}^2$  obtenu du repère canonique de  $\mathbb{R}^2$  par la rotation d'angle  $2\varphi$ .

D'autre part, en notant par  $\pi' : P \rightarrow M$  la projection du fibré principal  $P = P(M, SO(2))$ , nous obtenons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{f} & P \\ \pi \searrow & & \pi' \\ & & M \end{array}$$

Donc  $f : \Sigma \rightarrow P$  représente une structure spinorielle sur  $M = \mathbb{R}^2$ .

Nous allons construire, en ce qui suit, une structure spinorielle sur la variété différentiable  $J_q^1 M$ , quels que soit  $q = 1, 2, \dots, n$ . Nous allons suivre la démonstration du théorème 4. Considérons d'abord

$$s : \pi^{-1}(M) = \Sigma \rightarrow M \times \text{Spin}(2)$$

l'application de trivialisatoin locale, donnée par :

$$s(z_1, z_2) = (x, a)$$

où

$$\begin{aligned} x &= (\rho_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \rho_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)) \\ a &= \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot 1 + \left( \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) e_1 e_2. \end{aligned}$$

Donc nous avons l'application

$$t : \pi^{-1}(M) \rightarrow \text{Spin}(2), \quad t(z_1, z_2) = a,$$

qui vérifie la propriété :

$$t((z_1, z_2)g) = ag,$$

quel que soit  $g \in \text{Spin}(2)$ . Donc  $\{M\}$  est un recouvrement de trivialisatoin locale pour le fibré  $\Sigma$  avec la seule fonction de transition

$$\begin{aligned} \sigma : M &\rightarrow \text{Spin}(2) \\ \sigma(x) &= 1, \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

D'autre part,  $\{M\}$  étant aussi un recouvrement de trivialisatoin local pour le fibré  $P$ , la seule fonction de transition de  $P$  sera  $p(\sigma) : M \rightarrow SO(2)$  donnée par  $p(\sigma)(x) = I_2$ .

Soient  $\Sigma'(J_q^1 M, \text{Spin } \tilde{Q})$  le fibré principal dont la base est la variété différentiable  $J_q^1 M$  et l'application  $i(\sigma^1) = \tilde{I}$ , où  $\tilde{I}$  est l'élément neutre

de  $\text{Spin } \tilde{Q}$ . Il en résulte que le fibré principal  $\Sigma'$  est isomorphe au fibré  $J_q^1 M \times \text{Spin } \tilde{Q}$ . D'une manière analogue, les fibrés principaux  $P' = P'(J_q^1 M, SO(\tilde{Q}))$  et  $J_q^1 M \times SO(\tilde{Q})$  sont aussi isomorphes. Alors, l'application  $\tilde{f}: \Sigma \rightarrow P'$  donnée par

$$\tilde{f}(j_q \varphi, \tilde{a}) = (j_q \varphi, \tilde{p}(\tilde{a}))$$

quels que soient  $j_q \varphi \in J_q^1 M$  et  $\tilde{a} \in \text{Spin } \tilde{Q}$ , est une structure spinorielle sur la variété différentiable  $J_q^1 M$ .

### RÉFÉRENCES

- [1] M. ATIYAH, R. BOTT et A. SHAPIRO, *Clifford Moduls, Topology*, vol. 3, Suppl. 1, 1964, p. 3-38.
- [2] L. A. CORDERO, C. T. J. DODSON et M. DE LEON, *Differential Geometry of Frame Bundles*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1988.
- [3] A. CRUMEYROLLE, Structures spinorielles, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 11, 1, 1969, p. 19-25.
- [4] A. CRUMEYROLLE, Groupes de spinorialité, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 14, 4, 1971, p. 309-323.
- [5] S. KOBAYASHY et K. NOMIZU, *Fundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New York, London, 1963.

(Manuscrit reçu le 30 juillet 1992;  
version corrigée reçue le 14 mai 1993.)