ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANTOINE BOMMIER

# Propriétés de la matrice de diffusion, 2-amas 2-amas, pour les problèmes à N corps à longue portée

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 59, nº 3 (1993), p. 237-267
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1993__59_3_237_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 59, n° 3, 1993, p. 237-267. *Physique théorique*

# Propriétés de la matrice de diffusion, 2-amas 2-amas, pour les problèmes à N corps à longue portée

par

**Antoine BOMMIER**

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France

RÉSUMÉ. — On étudie la régularité de l'amplitude de diffusion 2-amas 2-amas pour les problèmes à N corps à longue portée.

ABSTRACT. — We study the regularity of the 2-clusters-2-clusters diffusion amplitude for N body problems with long range interactions.

## 1. INTRODUCTION

Nous étudions dans ce travail certaines propriétés de la matrice de diffusion 2-amas 2-amas pour les problèmes à N corps avec des potentiels à longue portée (*i.e.* décroissant à l'infini en $|x|^{-\rho}\ \rho>0$). Nous obtenons en particulier des résultats sur la régularité du noyau de cette matrice. Ce genre de résultats n'étaient connus jusqu'ici, pour des potentiels à longue portée, que pour le problème à deux corps. Cependant on remarque intuitivement que le fait de se limiter au cas 2-amas 2-amas, c'est-à-dire au cas où le système se scinde aux temps proches de l'infini en deux amas, lui impose d'avoir une dynamique semblable à celle d'un problème à deux corps. Il n'est donc pas surprenant que la théorie de la diffusion dans ce problème particulier s'apparente, par ses méthodes et ses résultats, à celle développée pour le problème à deux corps. Ce travail s'inspire en particulier des travaux de Isozaki-Kitada ([I-K1], [I-K2]) qui démontrent, dans le cadre du problème à deux corps à longue portée, une formule de représentation de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ utilisant des modificateurs indépendants du temps et la régularité de son noyau. Nous allons ici étendre ces résultats au problème considéré. Pour cela nous démontrerons dans un premier temps des estimations sur les valeurs au bord de la résolvante, qui nous seront utiles pour établir une formule de représentation similaire à celle de Isozaki-Kitada. Nous construirons ensuite soigneusement les modificateurs intervenant dans la définition des opérateurs d'onde, afin de pouvoir suivre dans ses principaux traits la démarche de Isozaki-Kitada [I-K2].

*Remarque.* — Des résultats analogues à ceux que nous obtenons, mais se limitant au problème à courte portée, ont été obtenus simultanément et indépendamment par Erik Skibsted dans [Sk].

## 2. HYPOTHÈSES, NOTATIONS, RAPPELS, RÉSULTATS

### 2.1. Hypothèses

Nous considérons le hamiltonien à N corps dans $\mathbb{R}^n$:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\Delta_{x_i} + \sum_{1 \leqq i \leqq N} V_{ij}(x_i - x_j)$$

où les potentiels $V_{ij}$ sont supposés vérifier les hypothèses suivantes:

$$\text{(H1)} \qquad \begin{cases} V_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ \exists \rho > 0 \ \text{tel que} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\partial_x^\alpha V_{ij}(x)| \leqq C_\alpha < x >^{-|\alpha| - \rho} \end{cases}$$

### 2.2. Notations

On reprend en gauche partie les notations employées usuellement dans l'étude du problème à N corps, que nous rappelons ici.

Dans un premier temps on sépare de façon tout à fait classique le mouvement du centre de masse, ce qui nous ramène à l'étude du hamiltonien $H = -\Delta_{|x} + V(x)$ opérant sur $L^2(X)$ où X est l'espace $X = \{ x \in \mathbb{R}^{n\,N} \mid \sum m_i x_i = 0 \}$ et $\Delta_{|x}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique $q(x, y) = \sum 2 m_i (x_i, y_i)$.

Pour $a$, une décomposition en $k$ amas (*i.e.* une partition de cardinal $k$, $(A_1, \ldots, A_k)$, de $\{1, \ldots, N\}$) on note :

$$X_a = \{ x \in X \mid x_i = x_j \text{ si } (i, j) \subset a \}$$
$$X^a = (X_a)^\perp = \{ x \in X \mid \sum_{i \in A_j} m_i x_i = 0 \}$$

$X^a$ représente l'espace des variables internes aux amas, alors que $X_a$ représente l'espace des variables externes, variables décrivant la position relative des centres de masse de chacun des amas.

On pose :

$$I_a(x) = \sum_{(i, j) \not\subset a} V_{ij}(x),$$
$$V^a(x^a) = \sum_{(i, j) \subset a} V_{ij}(x) \quad \text{et} \quad H_a = H - I_a.$$

On a :

$$H_a = I_{|X^a} \otimes (-\Delta_{|X_a}) + (-\Delta_{|X^a} + V^a(x^a)) \otimes I_{|X_a}$$

ce que l'on notera plus couramment $H_a = -\Delta_{|X_a} + H^a$, $H^a$ étant le hamiltonien $-\Delta_{|X^a} + V^a(x^a)$ opérant sur $L^2(X^a)$.

Pour chaque décomposition en $k$ amas, on note $\sigma^a = \sigma_{pp}(H^a)$ et $\tau_a = \bigcup_{b \subset a, b \neq a} \sigma^b \cup \{0\}$ le spectre purement ponctuel et l'ensemble des seuils du hamiltonien interne $H^a$.

On appelle canal de réaction la donnée d'une décomposition en deux amas, $a$, et d'un vecteur propre, $\psi_\alpha$, de $H^a$, de valeur propre $\varepsilon_\alpha$. Dans la suite nous nous limiterons au cas où $\varepsilon_\alpha$ n'est pas un seuil de $H^a$. Afin de ne pas compliquer excessivement certaines démonstrations et la construction des opérateurs d'onde nous supposerons aussi que $\varepsilon_\alpha$ est une valeur propre simple. Pour un intervalle d'énergie $\Delta$ et un canal de réaction donnés nous noterons $\pi_\alpha$ la projection orthogonale sur le vecteur $\psi_\alpha$, et $p_\alpha$ l'application définie par :

$$p_\alpha : \begin{cases} L^2(X_a) \to L^2(X) \\ \qquad \phi \to E_\Delta(H_a)\phi \otimes \psi_\alpha \end{cases}$$

Nous rappelons que sous les hypothèses (H1), et sous la condition $\varepsilon_\alpha \notin \tau_a$, $\psi_\alpha$ est à décroissance exponentielle en $x^a$ (*voir* l'article [F-H]).

Comme nous utiliserons à plusieurs reprises le calcul pseudo-différentiel de Weyl, nous en rappelons ici quelques notations essentielles. Le lecteur désireux d'avoir plus de précisions pourra se reporter aux chapitres 18.4 et 18.5 du livre de Hörmander [Ho].

Pour une métrique $g_{x, \xi}(\delta_x, \delta_\xi)$ sur $T^*X$ et une fonction $m(x, \xi) \in C^\infty(T^*X)$ données, on appelle $S(m, g)$ la classe de symboles définie par:

$$S(m, g)=\{ f(x, \xi)\in C^{\infty}(T^*X) \mid \sup_{\delta_i \in TX} | f^{(k)}(x, \delta_1, \ldots, \delta_k)| \leqq C_k \prod_{i=1}^{k} g_{x,\xi}(\delta_i)^{1/2} m(x, \xi)\}$$

On définit la quantification de Weyl d'un symbole $a$ de classe $S(m, g)$ par:

$$\mathrm{Op}^w(a(x, D_x))\, u(x)=(2\pi)^n \iint e^{i(x-y,\xi)}\, a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, d\xi\, dy$$

Si $g$ est a variation lente et $\sigma$-tempérée, $m$ à variation lente, ce qui sera toujours vrai dans les cas que nous considérerons (*cf.* [Ho] 18.4), on peut construire un calcul symbolique dans la classe $S(m, g)$ (*cf.* [Ho] 18.5).

Nous utiliserons les notations $\mathrm{ad}_A(B)$ pour le commutateur $[A, B]$, $\langle x\rangle$ pour $(1+|x|)^{1/2}$, $R(z)$ pour $(H-z)^{-1}$ et $\cos(x, \xi)$ pour $\dfrac{x, \xi}{\langle x\rangle\langle\xi\rangle}$.

Nous définissons les normes $\|.\|_{p,q}$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ par:

$$\|u\|_{p,q}=\|\langle x\rangle^p\langle D_x\rangle^q u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

et nous appellerons $H^{p,q}$ les espaces de Sobolev obtenus par complétion de $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \|.\|_{p,q})$.

Pour chaque canal de réaction $\alpha$ on définit une transformée de Fourier associée, $\mathscr{F}_\alpha$, comme suit:

Soit $\mathscr{F}_\alpha(\lambda)\in B(L_s^2(X_a), L^2(S_a^{n-1}))$, $s>1/2$, $\lambda>\varepsilon_\alpha$ défini par:

$$(\mathscr{F}_\alpha(\lambda)f)(\omega)=(2(\lambda-\varepsilon_\alpha))^{(n-2)/4}(\mathscr{F} f(\sqrt{2(\lambda-\varepsilon_\alpha)}\,\omega)$$

où $\mathscr{F} f$ est la transformée de Fourier de $f$, c'est-à-dire:

$$\mathscr{F} f(\xi)=\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)\, dx$$

On note $\hat{\mathscr{H}}$ l'espace de Hilbert $L^2((\varepsilon_\alpha, +\infty); L^2(S_a^{n-1}))$ et $\mathscr{F}_\alpha\in B(L^2(X_a); \hat{\mathscr{H}})$ donné par:

$$(\mathscr{F}_\alpha f)(\lambda, \omega)=(\mathscr{F}_\alpha(\lambda)f)(\omega) \qquad \forall f\in L_s^2(X_a)$$

$\mathscr{F}_\alpha$ se prolonge en un unique opérateur unitaire et $\forall f, g\in L_s^2(X_a)$:

$$(f, g)=(\mathscr{F}_\alpha f, \mathscr{F}_\alpha g)_{\hat{\mathscr{H}}}=\int_{\varepsilon_\alpha}^{+\infty}(\mathscr{F}_\alpha(\lambda) f, \mathscr{F}_\alpha(\lambda) g)_{L^2(S_a^{n-1})}\, d\lambda \qquad (2.1)$$

D'autre part pour toute fonction k:

$$(\mathscr{F}_\alpha(k(D_{x_a}^2+\varepsilon_\alpha) f))(\lambda, \omega)=k(\lambda)\mathscr{F}_\alpha(\lambda) f \qquad (2.2)$$

### 2.3. Rappels

On trouve dans [I-K1] une définition des opérateurs d'onde à partir de modificateurs indépendants du temps pour le problème à deux corps à longue portée se faisant à l'aide des solutions de l'équation eikonale. Donnons en ici un bref aperçu. Dans cet article Isozaki et Kitada montrent que, dans le cas du problème à deux corps avec un potentiel $V(x)$ vérifiant les hypothèses (H1), pour tout $d>0$, $-1<\sigma^-<\sigma^+<1$, il existe $R>0$ et $\phi^\pm$ des fonctions réelles, de classe $C^\infty$ sur

$$\{|x|>R,\ |\xi|>d,\ \pm\cos(x, \xi)\geqq \pm\sigma\}$$

tels que :

$$(\nabla_x \phi^\pm(x, \xi))^2 + V(x) = \xi^2 \tag{2.3}$$

$$\forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}^n,\quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta(\phi(x, \xi)-x.\xi)| \leqq C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{1-\rho-|\alpha|} \tag{2.4}$$

Ils définissent alors une fonction $\phi$ par :

$$\phi(x, \xi) = \chi(\cos(x, \xi)\leqq\sigma^-)\,\phi^-(x, \xi) + \chi(\cos(x, \xi)\geqq\sigma^+)\,\phi^+(x, \xi)$$

et les modificateurs J par :

$$Jf(x) = (2\pi)^{-n}\iint e^{i(\phi(x, \xi)-y.\xi)} f(y)\, dy\, d\xi$$

$H_0$ étant le hamiltonian libre, les opérateurs d'onde sont donnés par :

$$W^\pm = s-\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} \tag{2.5}$$

*Remarques.* — Pour le problème à courte portée, $(>1)$, Wang a proposé dans [W2] une construction améliorée des fonctions de phase $\phi^\pm$. Celles-ci, tout en vérifiant les propriétés (2.3) et (2.4) ont pour avantage de redonner par (2.5) les opérateurs d'onde usuels, obtenus dans ce cas en prenant $J=1$. Comme nous n'utilisons par la suite que les propriétés (2.3) et (2.4) nous pouvons utiliser cette construction dès que $\rho>1$. Cela nous permet en particulier de faire le lien avec la théorie usuelle de la diffusion pour les problèmes à courte portée, et de retrouver ainsi les résultats de Skibsted.

— Dans le cas du problème à longue portée, contrairement au problème à courte portée, la définition des opérateurs d'onde n'est pas univoque. La relation exacte existant entre les opérateurs d'onde d'Isozaki-Kitada et ceux de Dollard reste un problème ouvert, mais aucun argument physique ne permet d'établir une préférence entre les deux types de définitions. Cependant la méthode d'Isozaki-Kitada offre certains avantages techniques. En effet, si l'on ajoute à cette construction quelques améliorations, que l'on peut trouver dans [I-K 2], la limite (2.5) devient très rapidement convergente dans la classe de Schwartz, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, convergeant alors en $t^{-k}$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est cette propriété essentielle qui permet l'étude de la régularité des amplitudes de diffusion.

### 2.4. Résultats

Pour plus de clarté, nous donnons ici les principaux résultats obtenus dans cet article et indiquons où le lecteur pourra se reporter, dans le texte, pour en trouver les démonstrations.

Nous commençons par énoncer des estimations sur les valeurs au bord de la résolvante:

THÉORÈME 2.1. — *Soient*:

- $\sigma_a, \sigma_b > 0$
- $Q_a^\pm$ *des opérateurs pseudo-différentiels opérant sur* $L^2(X_a)$, *de symboles* $q^\pm(x_a, \xi_a)$ *tels que*:

$$q^\pm(x_a, \xi_a) \in S\left(1, \frac{dx_a^2}{\langle x_a \rangle^2} + \frac{d\xi_a^2}{\langle \xi_a \rangle^2}\right)$$

*et*

$$\operatorname{supp}(q^\pm(x_a, \xi_a)) \subset \{(x_a, \xi_a) \,\|\, |x_a| \geqq 1,\ |\xi_a| \geqq 1,\ \pm x_a . \xi_a \geqq \sigma_a \langle x_a \rangle \langle \xi_a \rangle\}$$

- $Q_b^\pm$ *des opérateurs pseudo-différentiels opérant sur* $L^2(X_b)$ *vérifiant des hypothèses similaires, obtenues des précédentes en changeant les indices a et b.*

*Alors*

$\forall l \in \mathbb{N}^*$, $s > l - \dfrac{1}{2}$, J *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *ne rencontrant pas* $\sigma \cup \tau$, *l'ensemble des valeurs propres et des seuils de* H, *il existe* $C \in \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0$ *et* $\operatorname{Re}(z) \in J\}$

$$\|p_\alpha^* \langle x \rangle^{-s} R(z)^l Q_b^+(x_b, D_{x_b}) \langle x \rangle^{s-l} p_\beta \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C$$

$$\|p_\alpha^* \langle x \rangle^{s-l} Q_a^-(x_a, D_{x_a}) R(z)^l \langle x \rangle^{-s} p_\beta \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C$$

$$\|p_\alpha^* \langle x \rangle^{s} Q_a^-(x_a, D_{x_a}) R(z)^l Q_b^+(x_b, D_{x_b}) \langle x \rangle^{s} p_\beta \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C$$

Ce théorème est démontré dans la section 3.

DÉFINITION 2.1. — *Pour* $\alpha$ *et* $\beta$ *des canaux de réaction donnés et* $\Delta$ *un intervalle d'énergie compact inclus dans* $]\sup(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta), +\infty[$, *on définit les opérateurs d'onde* $W_\alpha^\pm$ *et les opérateurs de diffusion* $S_{\alpha,\beta}(\Delta)$ *par*:

$$W_\alpha^\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} J_{a,i} e^{-itH_a} p_\alpha$$

$$S_{\alpha,\beta}(\Delta) \begin{cases} L^2(X_b) \to L^2(X_a) \\ \qquad f \to S_{\alpha,\beta}(\Delta) f = (W_\beta^+)^* (W_\alpha^-) f \end{cases}$$

*les opérateurs* $J_{a,i}$ *étant les modificateurs dont on trouve la construction dans la section* 4.

*On appellera alors opérateur de diffusion, que l'on notera* $S_{\alpha,\beta}$, *tout opérateur vérifiant la relation suivante*:

$$E_\Delta(H_b)\,S_{\alpha,\beta}\,E_\Delta(H_a)=S_{\alpha,\beta}(\Delta)$$

*pour tout compact* $\Delta\subset\,]\sup(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta),\ +\infty[$.

On trouvera la justification d'une telle définition dans la section 4. Le choix des modificateurs $J_{a,i}$ est en fait l'élément essentiel de notre travail, nous permettant d'obtenir sans changer les opérateurs d'onde de bonnes estimations sur leur convergence.

DÉFINITION 2.2. — *On définit la matrice de diffusion* $\mathscr{S}_{\alpha,\beta}(\lambda)$ *par*:

$$S_{\alpha,\beta}=\int_{\sup(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta)}^{+\infty}\mathscr{F}_\beta(\lambda)^*\,\mathscr{S}_{\alpha,\beta}(\lambda)\,\mathscr{F}_\alpha(\lambda)\,d\lambda \tag{2.6}$$

*et nous noterons* $S_{\alpha,\beta}(\omega_a,\theta_b,\lambda)$ *son noyau,* $\omega_a$, $\theta_b$ *variant dans* $S_a$ *et* $S_b$, *les sphères unités de* $T^*X_a$ *et* $T^*X_b$, *et* $\lambda$ *étant l'énergie.*

Nous montrons dans la section 5 la formule de représentation suivante:

THÉORÈME 2.2. — *Avec les hypothèses* (H1) *et les définitions précédentes en notant* $T_{a,i}=HJ_{a,i}-J_{a,i}H_a$ *on obtient pour tout* $\lambda\in\,]\sup(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta),\ +\infty[\diagdown(\sigma\cup\tau)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{\alpha,\beta}(\lambda)=p_\alpha^*\,\delta_{\alpha,\beta}\,p_\alpha+2i\pi\mathscr{F}_\beta(\lambda)\,p_\beta^*\,T_{b,1}^*\,R(\lambda+i0)\,T_{a,2}\,p_\alpha\mathscr{F}_\alpha(\lambda)^*\\ -2i\pi\mathscr{F}_\beta(\lambda)\,p_\beta^*\,J_{b,1}^*\,T_{a,2}\,p_\alpha\mathscr{F}_\alpha(\lambda)^*\end{aligned}$$

Enfin le théorème suivant, qui constitue notre principal résultat, donne les propriétés du noyau de la matrice de diffusion.

THÉORÈME 2.3. — *Sous les hypothèses* (H1), *et en supposant en outre que* $\varepsilon_\alpha$ *et* $\varepsilon_\beta$ *sont des valeurs propres non dégénérées de* $H_a$ *et* $H_b$, $S_{\alpha,\beta}(\omega_a,\theta_b,\lambda)$ *est une fonction de classe* $C^\infty$ *en* $(\omega_a,\theta_b,\lambda)$ *sur*:

(i) $\mathscr{D}_1=\{\lambda\in\,]\sup(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta),\ +\infty[\diagdown(\sigma\cup\tau),\ \omega_a\in S_a,\ \theta_b\in S_b\}$, *si* $\alpha\neq\beta$ (*c'est-à-dire si les canaux de réaction d'avant et après diffusion sont distincts*).

(ii) $\mathscr{D}_2=\{\lambda\in\,]\sup(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta),\ +\infty[\diagdown(\sigma\cup\tau),\ \omega_a\in S_a,\ \theta_b\in S_b,\ \omega_a\neq\theta_b\}$, *si* $\alpha=\beta$.

*Dans ce cas il existe* $C\in\mathbb{R}$ *telle que*:

$$\omega_a\neq\theta_b\ \Rightarrow\ |S_{\alpha,\beta}(\omega_a,\theta_b,\lambda)|\leqq C\,|\theta_b-\omega_a|^{-((n-1)/\rho)} \tag{2.7}$$

La démonstration de ce théorème se trouve dans la section 6. Notons au passage que l'hypothèse supplémentaire faite sur la nom dégénérescence des canaux de réaction n'est pas indispensable, mais simplifier sensiblement l'écriture de la démonstration. Nous renvoyons le lecteur à la remarque suivant la proposition 4.1 pour plus de précisions à ce sujet.

## 3. ESTIMATIONS MICRO-LOCALES SUR LES VALEURS AU BORD DE LA RÉSOLVANTE

Dans cette section nous démontrons le théorème 2.1, qui est une généralisation au problème à N corps des estimations micro-locales sur les valeurs au bord de la résolvante obtenues dans [J] pour le problème à deux corps. Ces dernières montrent que si l'on prend des opérateurs pseudo-différentiels $P^{\pm}$ localisant dans la région entrante pour $P^{-}$, et dans la région sortante pour $P^{+}$, c'est-à-dire supportés dans la région $(\pm\cos(x, \xi) \geqq \sigma > 0)$ alors pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tout $s > l - \frac{1}{2}$ il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\operatorname{Im}(z) > 0$

$$\| \langle x \rangle^{-s} R(z)^l P^+(x, D_x) \langle x \rangle^{s-l} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \tag{3.1}$$

$$\| \langle x \rangle^{s-l} P^-(x, D_x) R(z)^l \langle x \rangle^{-s} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \tag{3.2}$$

$$\| \langle x \rangle^{s} P^-(x, D_x) R(z)^l P^+(x, D_x) \langle x \rangle^{s} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \tag{3.3}$$

Notre problème ici est légèrement différent, car notre localisation, caractérisant les régions entrantes et sortantes, ne portera plus sur les variables globales $(x, \xi)$ mais seulement sur les variables externes $(x_a, \xi_a)$, bien que l'on ait par ailleurs une certaine localisation, de nature différente, sur les variables internes $(x^a, \xi^a)$, due au fait que chacun des deux fragments est supposé être dans un état lié. En particulier, il n'est plus possible d'utiliser ici la méthode de Mourre pour obtenir des estimations du type (3.1)-(3.3) le commutateur des opérateurs $A_a = \frac{1}{2}(x_a . D_{x_a} + D_{x_a} . x_a)$ et H n'étant pas positif. Nous allons contourner cette difficulté en constatant (lemme 3.1), qu'à partir des localisations sur les variables internes et externes que l'on a, on peut se ramener à des localisations dans les variables globales du type $(\pm x . \xi \geqq \sigma \langle x \rangle^{\delta} \langle \xi \rangle, \delta < 1)$, et en généralisant par la suite les résultats de [J] aux cas où l'on a ce genre de localisation (lemmes 3.2 et 3.3). Une fois ces lemmes établis la démonstration du théorème 2.1 tient en quelques lignes. On la trouvera tout à la fin de cette section.

LEMME 3.1. — *Soient* $0 < \delta < 1$, $\sigma$ *et* $\sigma_a$ *tels que* $\sigma_a > 0$, *et* $\sigma_a \gg -\sigma$ *si* $\sigma < 0$

- $Q^{\pm}$ *des opérateurs pseudo-différentiels de symboles* $q^{\pm}(x, \xi)$ *tels que*:

$$q^{\pm}(x, \xi) \in S\left(1, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2 \langle x \rangle^{2\delta - 2}}\right)$$

*et* $\operatorname{supp}(q^{\pm}(x, \xi)) \subset \{(x, \xi) \,\|\, x| \geqq 1, |\xi| \geqq 1, \pm x . \xi \geqq \sigma \langle x \rangle^{\delta} \langle \xi \rangle\}$

• $Q_a^{\mp}$ *des opérateurs pseudo-différentiels de symboles* $q_a^{\mp}(x_a, \xi_a)$ *tels que*:

$$q_a^{\mp}(x_a, \xi_a) \in S\left(1, \frac{dx_a^2}{\langle x_a \rangle^2} + \frac{d\xi_a^2}{\langle \xi_a \rangle^2}\right)$$

*et*

$$\operatorname{supp}(q_a^{\mp}(x_a, \xi_a)) \subset \{(x_a, \xi_a) \,\|\, x_a| \geqq 1, |\xi_a| \geqq 1, \mp x_a . \xi_a \geqq \sigma_a \langle x_a \rangle \langle \xi_a \rangle\}$$

*alors*

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \|\langle x \rangle^N Q^{\pm}(x, D_x) Q_a^{\mp}(x_a, D_{x_a}) p_\alpha\|_{L^2} < +\infty \tag{3.4}$$

*Remarque.* — Le résultat reste bien sûr vrai si on permute les termes $Q^{\pm}(x, D_x)$, $Q_a^{\mp}(x_a, D_{x_a})$ et $\langle x \rangle^N$.

*Démonstration du lemme* 3.1. — La démonstration du lemme, écrite ci-dessous consiste à constater que, du fait de la présence du terme $p_\alpha$, qui projette sur un canal de réaction à deux fragments donné, on peut ajouter à l'expression (3.4) différents opérateurs pseudo-différentiels de troncature. Un simple calcul symbolique, dans une classe d'opérateurs appropriée, donne alors le résultat.

Dans la suite $\chi$ est une fonction $C^\infty(R)$ telle que:

$$\chi(x) = 1, \qquad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\chi(x) = 0, \qquad \forall x \geqq 1$$

et $V_N$ les opérateurs $\langle x \rangle^N Q^{\mp}(x, D_x) Q_a^{\mp}(x_a, D_{x_a}) p_\alpha$ dont on veut montrer qu'ils sont bornés.

On choisit d'autre part une constante positive K, suffisamment grande pour que $\left(1 - \chi\left(\frac{\langle D_{x_a} \rangle}{K}\right)\right) p_\alpha = 0$.

Introduisons les troncatures nécessaires:

• (i) Troncature en $\langle x^a \rangle \leqq \varepsilon \langle x \rangle^\tau$, $1 - \delta < \tau < \delta$, $\varepsilon < \dfrac{\sigma_a}{K+1}$

Soit

$$c_1(x) = \chi\left(\frac{\langle x^a \rangle}{\varepsilon \langle x \rangle^\tau}\right); \qquad c_1(x) \in S\left(1, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\tau}}\right)$$

$p_\alpha$ projetant sur un vecteur propre de $H^a$, à décroissance exponentielle en $x^a$, on a:

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \|(1 - c_1(x)) \langle x \rangle^N p_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

En utilisant cette même propriété de l'opérateur $p_\alpha$ on constate aisément que $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\langle x \rangle^N [Q_a^{\mp}(x_a, D_{x_a}) c_1(x) - \mathrm{Op}^w(Q_a^{\mp}(x_a, \xi_a) c_1(x))]$$

est un opérateur borné. Et ainsi pour tout entier N

$$V_N = \langle x \rangle^N Q^{\mp}(x, D_x) \operatorname{Op}^w (Q_a^{\mp}(x_a, \xi_a) c_1(x)) p_\alpha + B_N,$$

l'opérateur $B_N$ étant borné.

• (ii) Troncature en $\langle \xi_a \rangle \leqq K$.

On pose :

$$c_2(\xi_a) = \chi\left(\frac{\langle \xi_a \rangle}{K}\right)$$

$c_2(\xi_a) \in S\left(1, \frac{d\xi_a^2}{\langle \xi_a \rangle^2}\right)$ et, d'après le choix de K, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$V_N = \langle x \rangle^N Q^{\pm}(x, D_x)) \operatorname{Op}^w (Q_a^{\mp}(x_a, \xi_a) c_1(x)) c_2(D_{x_a}) p_\alpha + B_N,$$

où $B_N$ est un opérateur borné.

• (iii) Troncature en $\langle \xi^a \rangle \leqq \langle x \rangle^\alpha$, $0 < \alpha < 1 - \tau$

On pose

$$c_3(x, \xi) = \chi\left(\frac{\langle \xi^a \rangle}{\langle x \rangle^\alpha}\right), \qquad c_3(x, \xi) \in S\left(1, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^2} + \frac{d\xi^{a2}}{\langle x \rangle^{2\alpha}}\right)$$

$(1 - c_3(x, \xi))$ étant supporté dans la région $\langle x \rangle \leqq \left(\frac{1}{2}\langle \xi^a \rangle\right)^{1/\alpha}$ l'opérateur $(1 - c_3(x, D_{x^a})) \langle x \rangle^N \langle D_{x^a} \rangle^{(-N/\alpha)}$ est borné. D'autre part, par la régularité du potentiel, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\| \langle D_{x^a} \rangle^{N/\alpha} p_\alpha \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

L'opérateur $(1 - c_3(x, D_{x^a})) \langle x \rangle^N p_\alpha$ est donc borné, et ainsi pour tout entier N

$$V_N = \langle x \rangle^N Q^{\mp}(x, D_x) \operatorname{Op}^w (Q_a^{\mp}(x_a, \xi_a) c_1(x)) c_2(D_{x_a}) c_3(x, D_x) p_\alpha + B_N''$$

où $B_N''$ est un opérateur borné.

Nous allons maintenant terminer la démonstration à l'aide du calcul symbolique.

Les symboles $Q^{\mp}(x, \xi)$, $(Q_a^{\mp}(x_a, \xi_a) c_1(x))$, $c_2(\xi_a)$, $c_3(x, \xi)$ sont tous dans la classe $S\left(1, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\tau}} + \frac{d\xi^2}{\langle x \rangle^{2\delta - 2}}\right)$ dans laquelle un calcul symbolique devient possible. La constante de Planck est alors $h = \langle x \rangle^{1-\delta-\tau}$. D'autre part l'intersection des supports de ces symboles est vide. En effet supposons que :

$$(x, \xi) \in \bigcap_{i=1}^{3} \operatorname{supp}(c_i(x, \xi)) \cap \operatorname{supp}(q^{\mp}(x_a, \xi_a))$$

$$\text{alors } \pm \frac{x.\xi}{\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle} = \pm \frac{x_a\xi_a}{\langle x\rangle\langle\xi_a\rangle}\left(\frac{\langle x\rangle^{1-\delta}\langle\xi_a\rangle}{\langle\xi\rangle}\right) \pm \frac{x^a.\xi^a}{\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle}$$
$$\leqq (-\sigma_a)\frac{\langle x\rangle^{1-\delta}\langle\xi_a\rangle}{\langle\xi\rangle} + \varepsilon\frac{\langle x\rangle^\tau(\xi^a)}{\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle}$$
$$\leqq (-\sigma_a)\frac{\langle x\rangle^{1-\delta}\langle\xi_a\rangle}{\langle\xi_a\rangle+\langle\xi^a\rangle} + \varepsilon\langle x\rangle^{\tau-\delta}$$
$$\leqq (-\sigma_a)\langle x\rangle^{1-\delta-\alpha}\left(\frac{\langle x\rangle^\alpha}{K+\langle x\rangle^\alpha} - \frac{\varepsilon}{\sigma_a}\langle x\rangle^{\tau-1+\alpha}\right)$$
$$\leqq (-\sigma_a)\left(\frac{1}{K+1} - \frac{\varepsilon}{\sigma_a}\right) < -|\sigma|$$

et $(x, \xi) \notin \operatorname{supp}(q^\pm(x, \xi))$.

Ainsi on montre que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$Q^\pm(x, D_x)\,\mathrm{Op}^w(Q_a^\mp(x_a, \xi_a)\,c_1(x))\,c_2(D_{x_a})\,c_3(x, D_x) = \mathcal{O}(\langle x\rangle^{(1-\delta-\tau)N})$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 3.2. — *Soient*

- $\frac{5}{6} < \delta < 1 \quad 0 < \sigma < 1$
- $Q^\pm$ *des opérateurs pseudo-différentiels de symboles* $q^\pm(x, \xi)$ *tels que*:

$$q^\pm(x, \xi) \in S\left(1, \frac{dx^2}{\langle x\rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2\langle x\rangle^{2\delta-2}}\right)$$

*et*

$$\operatorname{supp}(q^\pm(x, \xi)) \subset \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, |x| \geqq 1,\ |\xi| \geqq 1,\ \pm x.\xi \geqq \sigma\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle\}$$

- A *le générateur des dilatations*, $A = \frac{1}{2}(x.D_x + D_x.x)$, *et* $P_A^\pm$ *les projecteurs spectraux de* A *sur* $\mathbb{R}^\pm$.

*Alors* $\forall m, s > 0$ $\|\langle x\rangle^s Q^\pm(x, D_x)P_A^\mp\langle A\rangle^m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty$.

*Démonstration du lemme* 3.2. — On démontrera le lemme pour $\langle x\rangle^s Q^+(x, D_x)/P_A^-\langle A\rangle^m$, le cas $\langle x\rangle^s Q^-(x, D_x)P_A^+\langle A\rangle^m$ étant similaire.

Pour la démonstration nous commencerons par définir $\tilde{A}$ un opérateur positif, appartenant à une certaine classe d'opérateurs pseudo-différentiels que nous préciserons et égal à A, modulo des termes petits, dans la région où est supporté $Q^+(x, \xi)$. Ceci nous permettra par la suite d'utiliser un calcul symbolique avec les opérateurs $Q^\pm$, nous donnant les résultats espérés.

Posons $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_0 \geqq m+s$

• (i) Commençons donc par préciser la construction de $\tilde{A}$.

Soit

$$a_0(x, \xi) = x.\xi(1-\chi)\left(\frac{2x.\xi}{\sigma\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle}\right) + \frac{\sigma}{2}\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle\chi\left(\frac{x.\xi}{\sigma\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle}\right)$$

où $\chi$ est une fonction de troncature, de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\chi=1$ sur $]-\infty, 1]$ et $\chi=0$ sur $[2, +\infty[$.

On a :

$$a_0(x, \xi) \geqq \frac{\sigma}{2}\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle \qquad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$a_0(x, \xi) \in S\left(\langle x\rangle\langle\xi\rangle, \frac{dx^2}{\langle x\rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2\langle x\rangle^{2\delta-2}}\right)$$

$$a_0(x, \xi) = x.\xi,$$

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x| \geqq 1, \qquad |\xi| \geqq 1, \qquad x.\xi \geqq \sigma\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle$$

Soit $a_1(x, \xi) = a_0(x, \xi) + C\langle x\rangle^{N_0}\langle\xi\rangle^{-N_0}$ où le choix de C sera précisé par la suite.

D'après l'inégalité de Fefferman-Phong (*cf.* [Ho] 18.6.6), $\exists C_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\left(u, \operatorname{Op}^w\left(a_0(x, D_x) - \frac{\sigma}{2}\langle x\rangle^\delta\langle D_x\rangle\right)u\right) \geqq -C_1 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Or on montre dans l'appendice A1 que $\forall\varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon$ tel que :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq \varepsilon(u, \operatorname{Op}^w(\langle x\rangle^\delta\langle D_x\rangle)u) + C_\varepsilon(u, \operatorname{Op}^w(\langle x\rangle^{-N_0}\langle D_x\rangle^{-N_0})u)$$

et ainsi pour C assez grand :

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$(u, \operatorname{Op}^w(a_0(x, D_x) + C\langle x\rangle^{-N_0}\langle D_x\rangle^{-N_0})u) \geqq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

On notera dorénavant $\tilde{a}(x, \xi) = a_1(x, \xi)$ pour un tel C.

D'après ce qui précède $\tilde{a}(x, \xi)$ a les propriétés suivantes :

$$\tilde{a}(x, \xi) \in S\left(\langle x\rangle\langle\xi\rangle, \frac{dx^2}{\langle x\rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2\langle x\rangle^{2\delta-2}}\right)$$

$$\tilde{a}(x, \xi) \geqq \frac{\sigma}{2}\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle, \qquad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$\tilde{a}(x, \xi) - x.\xi = C\langle x\rangle^{-N_0}\langle\xi\rangle^{-N_0}$$

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x| \geqq 1 \qquad |\xi| \geqq 1 \qquad x.\xi \geqq \sigma\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle$$

$$\tilde{A} = \operatorname{Op}^w(\tilde{a}(x, D_x)) \geqq 1 \quad \text{sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De plus on montre en appendice que :

(A2) $\tilde{A}$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On notera encore par $\tilde{A}$ la réalisation auto-adjointe de $\tilde{A}$.

(A3) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ et $p \in \mathbb{R}$ l'opérateur $(\tilde{A} - z)^{-N}$ est continu de $H^{p,p}$ dans $H^{p+N(4\delta-3),\, p+N(4\delta-3)}$, de norme

$$\|(\tilde{A} - z)^{-N}\|_{H^{p,p},\, H^{p+N(4\delta-3),\, p+N(4\delta-3)}} \leqq C \left| \frac{z}{\operatorname{Im}(z)} \right|^{q(N)} \tag{3.5}$$

• (ii) Utilisons alors les propriétés de $\tilde{A}$, à savoir que $\chi(\tilde{A} \leqq 1) = 0$, et que $(A - \tilde{A})Q^+$ est un terme petit, pour achever la démonstration du lemme.

Posons $f_-(\lambda) = \chi_-(\lambda) . \langle \lambda \rangle^{-2}$ où:

$$\chi_-(\lambda) = 1 \qquad \forall \lambda \leqq \frac{1}{2}$$
$$\chi_-(\lambda) = 0 \qquad \forall \lambda \geqq 1$$

$f \in S\left( \langle \lambda \rangle^{-2}, \dfrac{d\lambda^2}{\langle \lambda \rangle^2} \right)$. On peut donc construire (*cf.* [G] et [H-S]) une extension presque analytique $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{C})$ de $f_-$ telle que:

$$\operatorname{Supp} \tilde{f} \subset \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| \leqq \varepsilon_0 \langle \operatorname{Re}(z) \rangle \}$$
$$\tilde{f}(z) = f_-(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$
$$|\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)| \leqq \mathbb{C}_N \langle z \rangle^{-3-N} |\operatorname{Im}(z)|^N \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Et on sait alors que pour tout opérateur G non borné, auto-adjoint, on a:

$$f_-(G) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) (z - G)^{-1} \, dz \wedge d\bar{z} \tag{3.6}$$

Pour démontrer le lemme il suffit de montrer que $\forall n, s \in \mathbb{R}$

$$\| \langle x \rangle^s Q^+(x, D_x) f_-(A) \langle A \rangle^m \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

Or en reprenant (3.6), comme $\tilde{A} \geqq 1$,

$$f_-(A) = f_-(A) - f_-(\tilde{A}) = -\frac{1}{2i\pi} \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} (\tilde{A} - z)^{-1} (A - \tilde{A}) (A - z)^{-1} \, dz \wedge d\bar{z}$$

Et il suffit donc de montrer qu'il existe des constantes C et M telles que pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$

$$\| \langle x \rangle^s Q^+(x, D_x) (\tilde{A} - z)^{-1} (A - \tilde{A}) (A - z)^{-1} \langle A \rangle^m \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \left| \frac{z}{\operatorname{Im}(z)} \right|^M$$

Écrivons:

$$Q^+(x, D_x)(\tilde{A} - z)^{-1} = \sum_{i=0}^{N} (\tilde{A} - z)^{-i-1} (\operatorname{ad}_{\tilde{A}})^i (Q^+(x, D_x))$$
$$+ (\tilde{A} - z)^{-N-1} (\operatorname{ad}_{\tilde{A}})^{N+1} (Q^+(x, D_x)) (\tilde{A} - z)^{-1}$$

et estimons chacun de ces termes.

Pour les premiers termes :

$$(\mathrm{ad}_{\tilde{A}})^i (Q^+(x, D_x)) \in \mathrm{Op}^w\left(S\left(\langle x \rangle^{2i(1-\delta)}, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2 \langle x \rangle^{2\delta-2}}\right)\right)$$

et sont des symboles supportés dans la région où

$$\tilde{a}(x, \xi) - x.\xi = C\langle x \rangle^{-N_0} \langle \xi \rangle^{-N_0}$$

ainsi $(\mathrm{ad}_{\tilde{A}})^i (Q^+(x, D_x))(A-\tilde{A})$ est un opérateur pseudo-différentiel de classe :

$$S\left(\langle x \rangle^{-N_0+2i(1-\delta)} \langle \xi \rangle^{-N_0}, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2 \langle x \rangle^{2\delta-2}}\right)$$

et en utilisant (3.5) on a, $\forall p \in \mathbb{R}$ :

$$(\tilde{A}-z)^{-i-1} (\mathrm{ad}_{\tilde{A}})^i (Q^+(x, D_x))(A-\tilde{A}) \in B(H^{p,p}, H^{p+\alpha, p+\alpha})$$

avec $\alpha = (4\delta - 3)(i+1) + N_0 - 2i(1-\delta) \geqq N_0$.

On obtient de plus que :

$$\|(\tilde{A}-z)^{-i-1} (\mathrm{ad}_{\tilde{A}})^i (Q^+(x, D_x))(A-\tilde{A})\|_{H^{p,p}, H^{p+N_0, p+N_0}} \leqq K \left|\frac{z}{\mathrm{Im}(z)}\right|^{q(N)} \quad (3.7)$$

Pour le dernier terme :

$$(\mathrm{ad}_{\tilde{A}})^{N+1} (Q^+(x, D_x)) \in S\left(\langle x \rangle^{2(N+1)(1-\delta)}, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2 \langle x \rangle^{2\delta-2}}\right)$$

et d'après (3.5)

$$(\tilde{A}-z)^{-N-1} (\mathrm{ad}_{\tilde{A}})^{N+1} (Q^+(x, D_x)) \in B(H^{p,p}, H^{p+\alpha', p+\alpha'}) \quad (3.8)$$

de norme inférieure à $K' \left|\frac{z}{\mathrm{Im}(z)}\right|^{q_1(\alpha)}$, avec $\alpha' = (N+1)(6\delta - 5) \geqq N_0$, pour N assez grand.

Ainsi d'aprés (3.7) et (3.8), pour tout $p \in \mathbb{R}$

$$Q^+(x, D_x)(\tilde{A}-z)^{-1}(A-\tilde{A}) \in B(H^{p,p}, H^{p+N_0, p+N_0})$$

et de norme :

$$\|Q^+(x, D_x)(\tilde{A}-z)^{-1}(A-\tilde{A})\|_{H^{p,p}, H^{p+N_0, p+N_0}} \leqq K'' \left|\frac{z}{\mathrm{Im}(z)}\right|^{\tilde{q}(N_0)}$$

Il suit alors immédiatement, $N_0$ étant supérieur à $m+s$, que

$$\langle x \rangle^s (\tilde{A}-z)^{-1}(A-\tilde{A})(A-z)^{-1}\langle A \rangle^m$$

est dans $B(L^2(\mathbb{R}^n))$ avec le même type de majoration pour la norme, ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 3.3. — *Soient* $Q^{\pm}(x, D_x)$ *des opérateurs pseudo-différentiels vérifiant les hypothèses du lemme précédent.*

*Alors pour tout* $l \in \mathbb{N}^*$, *tout réel* $s > l - \frac{1}{2}$ *et tout intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *ne rencontrant ni les valeurs propres ni les seuils du hamiltonien* H *il existe* $C \in \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0$ *et* $\operatorname{Re}(z) \in [a, b]\}$ *on ait*:

$$\| \langle x \rangle^{s-l} Q^-(x, D_x) R(z)^l \langle x \rangle^{-s} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \tag{3.9}$$

$$\| \langle x \rangle^{-s} R(z)^l Q^+(x, D_x) \langle x \rangle^{s-l} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \tag{3.10}$$

$$\| \langle x \rangle^{s} Q^-(x, D_x) R(z)^l Q^+(x, D_x) \langle x \rangle^{s} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \tag{3.11}$$

*Démonstration du lemme* 3.3. — On peut reprendre la démonstration du théorème 4.3 de [J] en utilisant les résultats du lemme précédent, et les résultats abstraits obtenus dans [M] et [J] que l'on rappelle par le lemme suivant:

LEMME 3.4. — *Sous les mêmes hypothèses sur l, s et z, il existe* $C_1 \in \mathbb{R}$ *telle que l'on ait, uniformément par rapport à z*:

$$\| \langle A \rangle^{-s} R(z)^l \langle A \rangle^{-s} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C_1$$

$$\| \langle A \rangle^{s-l} P_A^- R(z)^l \langle A \rangle^{-s} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C_1$$

$$\| \langle A \rangle^{-s} R(z)^l P_A^+ \langle A \rangle^{s-l} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C_1$$

$$\| \langle A \rangle^{s} P_A^- R(z)^l P_A^+ \langle A \rangle^{s} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C_1$$

Pour démontrer (3.9) nous commençons par introduire une fonction de troncature $\chi(H)$.

Soit $\chi$ une fonction de troncature telle que $\chi = 1$ sur $[a, b]$ et $\operatorname{supp}_\chi \subset [a-1, b+1]$. Les fonctions $f_z$ définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_z(\lambda) = (\lambda - z)^{-l}(1 - \chi(\lambda))$$

sont toutes de classe $S\left(\langle \lambda \rangle^{-1}, \frac{d\lambda^2}{\langle \lambda \rangle^2}\right)$ et de semi-normes bornées uniformément par rapport à $z$ pour $\operatorname{Re}(z) \in I$ et $\operatorname{Im}(z) < 0$. En reprenant une construction similaire à (3.6) on montre aisément que les opérateurs $\langle x \rangle^s f_z(H) \langle x \rangle^{-s}$ sont bornés pour tout réel $s$, uniformément par rapport à $z$. Écrivons alors:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle^{s-l} Q^+(x, D_x) R(z)^l (1 - \chi(H)) \langle x \rangle^{-s} \\ = (\langle x \rangle^{s-l} Q^+(x, D_x) \langle x \rangle^{-s})(\langle x \rangle^s f_z(H) \langle x \rangle^{-s})\end{aligned}$$

expression qui ne fait apparaître que des opérateurs uniformément bornés par rapport à $z$. On peut donc remplacer $R(z)$ par $\chi(H) R(z)$ dans (3.9). Nous développons alors:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle^{s-l} Q^+ \chi(H) R(z)^l \langle x \rangle^{-s} \\ = (\langle x \rangle^{s-l} Q^+ \langle x \rangle^{l-s})(\langle x \rangle^{s-l} P_A^+ R(z)^l \chi(H) \langle x \rangle^{-s}) \\ + (\langle x \rangle^{s-l} Q^+ P_A^- \langle A \rangle^{s})(\langle A \rangle^{-s} R(z)^l \chi(H) \langle x \rangle^{-s})\end{aligned}$$

ce qui, d'aprés les lemmes précédents ne fait apparaître que des produits et sommes d'opérateurs bornés, uniformément par rapport à $z$, dans le domaine considéré.

On démontre de même (3.10).

Pour montrer (3.11) nous introduisons de même $P_A^- + P_A^+ = 1$ de part et d'autre du terme $R(z)^l$, ce qui donne en posant $\mu = \langle A \rangle$ :

$$\begin{aligned}
&\langle x \rangle^s Q^+ R(z)^l Q^- \langle x \rangle^s \\
&= (\langle x \rangle^s Q^+ \mu^{-s})(\mu^s P_A^+ R(z)^l \mu^{-s-l})(\mu^{s+l} P_A^+ Q^- \langle x \rangle^s) \\
&\quad + (\langle x \rangle^s Q^+ P_A^- \mu^s)(\mu^{-s} R(z)^l \mu^{-s})(\mu^s P_A^+ Q^- \langle x \rangle^s) \\
&\quad + (\langle x \rangle^s Q^+ \mu^{-s})(\mu^s P_A^+ R(z)^l P_A^- \mu^s)(\mu^{-s} Q^- \langle x \rangle^s) \\
&\quad + (\langle x \rangle^s Q^+ P_A^- \mu^{s+l})(\mu^{-s-l} R(z)^l P_A^- \mu^s)(\mu^{-s} Q^- \langle x \rangle^s)
\end{aligned}$$

ce qui, là aussi, ne fait apparaître que des opérateurs bornés, uniformément par rapport à $z$.

C.Q.F.D.

*Démonstration du théorème* 2.1. — Soit $Q_1^{\pm}(x, D_x)$ des opérateurs vérifiant les hypothèses du lemme 3.1, avec $\sigma < 0$. D'après ce lemme il vient, pour $|\sigma|$ assez petit, $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} p_\alpha^* Q_1^+(x, D_x) Q_a^-(x, D_x) = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-N}) \\ Q_1^-(x, D_x) Q_b^+(x, D_x) p_\beta = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-N}) \end{cases}$$

Et pour démontrer le théorème il suffit d'utiliser les résultats du lemme 3.3 appliqués à $Q^{\pm} = (1 - Q_1^{\mp})$ et le fait que pour tout $s > l - \frac{1}{2}$, $\langle x \rangle^{-s} R(z)^l \langle x \rangle^{-s}$ est un opérateur borné (résultat de [M]).

## 4. CONSTRUCTION DES OPÉRATEURS D'ONDE

Pour un canal de réaction $\alpha$ donné la définition la plus naturelle des opérateurs d'onde, au vu de la méthode développée dans [I-K 2] et de la similarité du problème considéré avec le problème à deux corps, semble être :

$$W_\alpha^{\pm} = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \tilde{J}_{a,i} e^{-itH_a} p_\alpha$$

où les modificateurs $\tilde{J}_{a,i}$ sont définis exactement comme dans le cas d'un Hamiltonien à deux corps avec un potentiel d'interaction $I_a(x_a)$. En effet l'idée sous-jacente à cette définition est que pour des temps grands la dynamique du système, scindé en deux fragments, est proche de celle que l'on obtiendrait en considérant chacun des deux fragments comme une particule ponctuelle.

Avec cette définition des modificateurs $\tilde{J}_{a,i}$ on peut montrer sans difficulté majeure l'existence des opérateurs d'onde et la complétude asymptotique sous le seuil à trois amas. Cependant les estimations que l'on obtient sur $(H\tilde{J}_{a,i}-\tilde{J}_{a,i}H_a)p_\alpha$, qui permettent d'évaluer en quelque sorte la rapidité de convergence des opérateurs d'onde, sont insuffisantes pour obtenir les résultats énoncés.

On obtient en effet :

$$(H\tilde{J}_{a,i}-\tilde{J}_{a,i}H_a)p_\alpha = P_i(x_a, D_{x_a}) + O(\langle x \rangle^{-1-\rho})$$

où les $P_i(x_a, \xi_a)$ $(i=1, 2)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels supportés dans les régions $\cos(x_a, \xi_a) \simeq \pm(-1)^i$, alors que l'on souhaiterait obtenir des estimations du type

$$(H\tilde{J}_{a,i}-\tilde{J}_{a,i}H_a)p_\alpha = P_i(x_a, D_{x_a}) + O(\langle x \rangle^{-N}) \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

pour démontrer la régularité du noyau de la matrice de diffusion.

Pour avoir de telles estimations nous allons construire des modificateurs un peu plus fins, tout en imposant, bien sûr, que les opérateurs d'onde soient eux inchangés. L'idée de l'amélioration de ces modificateurs est due à E. Skibsted.

Pour cela nous cherchons des modificateurs $J_{a,j}$ de la forme

$$J_{a,j}f(x_a, x^a) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\phi_{a,j}(x_a,\xi_a)-y_a.\xi_a)} m_j(x_a, \xi_a) f(y_a, x^a)\, dy_a\, d\xi_a \quad (4.1)$$

où les $m_j(x_a, \xi_a)$ sont des symboles à valeurs dans $B(L^2(X^a))$, et la fonction $\phi_{a,j}$ définie par :

$$\phi_{a,j}(x_a, \xi_a) = \chi(\cos(x_a, \xi_a) \geqq \sigma_j^+)\, \phi_a^+(x_a, \xi_a) + \chi(\cos(x_a, \xi_a) \leqq \sigma_j^-)\, \varphi_a^-(x_a, \xi_a)$$

les fonctions $\phi_a^\pm$ étant construites comme dans [I-K1], ayant des propriétés similaires (2.3) et (2.4), c'est-à-dire telles que $\forall (x_a, \xi_a) \in \Omega^\pm(R, d, \pm\sigma_j^\pm)$ :

$$(\nabla_{x_a}\phi_a^\pm(x_a, \xi_a))^2 + I_a(x_a) = \xi_a^2 \quad (4.2)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \quad |\partial_{x_a}^\alpha \partial_{\xi_a}^\beta (\phi^\pm(x_a, \xi_a) - x_a.\xi_a)| \leqq C_{\alpha\beta}\langle x_a \rangle^{1-\rho-|\alpha|} \quad (4.3)$$

$\Omega^\pm(R, d, \sigma)$ étant les ensembles définis par :

$$\Omega^\pm(R, d, \sigma) = \{(x_a, \xi_a) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x_a| > R,\ |\xi_a| > d,\ \pm\cos(x_a, \xi_a) \geqq \sigma\}$$

De par ces propriétés, les opérateurs $T_{a,j} = (HJ_{a,j} - J_{a,j}H_a)p_\alpha$ ont pour expression :

$$T_{a,j}f(x_a, x^a) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\phi_{a,j}(x_a,\xi_a)-y_a.\xi_a)} W_{a,j}(x_a, \xi_a) f(y_a, x^a) p_\alpha\, dy_a\, d\xi_a \quad (4.4)$$

où

$$W_{a,j}(x_a, \xi_a)=\left(\frac{1}{2}\Delta_{x_a} m_j^{\pm}(x_a, \xi_a)+i\nabla_{x_a}\phi(x_a, \xi_a).\nabla_{x_a} m_j^{\pm}(x_a, \xi_a)\right.$$
$$\left.+(i\Delta_{x_a}\phi(x_a, \xi_a)+I_a(x_a)-I_a(x)-H^a+\varepsilon_\alpha)\, m_j^{\pm}(x_a, \xi_a)\right) \quad (4.5)$$

dans $\Omega(\mathrm{R}, d, \pm\sigma_j^{\pm})$. [On utilise ici la propriété (4.2).] Nous commençons donc par énoncer la proposition suivante, que nous démontrerons à la fin de cette section.

PROPOSITION 4.1. — *Sous les hypothèses* (H1) *il existe pour* $i=1, 2$ *des symboles* $m_j^{\pm}(x_a, \xi_a)$ *de classe* $S\left(1, \frac{dx_a^2}{\langle x_a\rangle^2}+\frac{d\xi_a^2}{\langle \xi_a\rangle^2}\right)$ *à valeurs dans* $B(L^2(X^a))$, *définis sur* $\Omega(\mathrm{R}, d, \pm\sigma_j^{\pm})$ *tels que* $m_j^{\pm}(x_a, \xi_a)$ *et* $W_{a,j}(x_a, \xi_a)$, *défini par* (4.5), *vérifient, uniformément par rapport à* $|\xi_a|\in[d, \mathrm{M}]$ *les conditions suivantes*:

(i) $m_j^{\pm}(x_a, \xi_a)-1=O(\langle x_a\rangle^{-\rho})$

(ii) $|\partial_{x_a}^{\alpha}\partial_{\xi_a}^{\beta} W_{a,j}(x_a, \xi_a)p_\alpha|\leqq C_{\alpha,\beta,N}\langle x\rangle^{-N}$ *pour tout* $N\in\mathbb{N}$.

Il nous suffit alors pour obtenir des modificateurs satisfaisants de recoller les fonctions $m_j^{\pm}$, en posant:

$$m_{a,j}=[\chi_j^{+}(\cos(x_a, \xi_a))\, m_j^{+}(x_a, \xi_a)$$
$$+\chi_j^{-}(\cos(x_a, \xi_a))\, m_j^{-}(x_a, \xi_a)]\,\chi_0(|\xi_a|)\,\chi_1(|x_a|)$$

où les fonctions $\chi^{\pm}$, $\chi_0$ et $\chi_1$ sont des fonctions de troncature de classe $C^\infty$ telles que, avec $0<\delta\ll 1$:

$$\begin{array}{llcll}
\chi_0(x)=1 & \forall x\geqq 2d & \text{et} & \chi_0(x)=0 & \forall x\leqq d\\
\chi_1(x)=1 & \forall x\geqq 2\mathrm{R} & \text{et} & \chi_1(x)=0 & \forall x\leqq \mathrm{R}\\
\chi^{+}(x)=1 & \forall x\in[\sigma_j^{+}+\delta, 1] & \text{et} & \chi^{+}(x)=0 & \forall x\in[-1, \sigma_j^{+}]\\
\chi^{-}(x)=1 & \forall x\in[-1, \sigma_j^{-}-\delta] & \text{et} & \chi^{-}(x)=0 & \forall x\in[\sigma_j^{-}, 1]
\end{array}$$

Les modificateurs $J_{a,j}$ obtenus par (4.1) à partir de ces fonctions ont alors les propriétés voulues. En effet, par la condition (i) de la Proposition 4.1, les opérateurs d'onde sont identiques à ceux plus usuels, obtenus en prenant $m_{a,j}=1$. En particulier les opérateurs d'onde sont indépendants des paramètres $\sigma_j^{+}$, $\sigma_j^{-}$ et $\delta$. D'autre part par la condition (ii) et la construction (4.1) on a:

$$\forall N\in\mathbb{N}\quad T_{a,j}=(HJ_{a,j}-J_{a,j}H_a)p_\alpha=P_j(x_a, \xi_a)+O(\langle x\rangle^{-N}) \quad (4.6)$$

où $P_j$ est un opérateur pseudo-différentiel de classe

$$S\left(\langle x_a\rangle^{-1}, \frac{dx_a^2}{\langle x_a\rangle^2}+\frac{d\xi_a^2}{\langle \xi_a\rangle^2}\right)$$

supporté dans la région où $\cos(x_a, \xi_a) \in [\sigma_j^- - \delta, \sigma_j^+ + \delta]$. Ainsi en choisissant convenablement $\sigma_j^+$, $\sigma_j^-$, $\delta$ on peut imposer, à notre guise, à l'opérateur $P_j$ d'être supporté dans une région sortante ($\cos(x_a, \xi_a) \simeq 1$) ou dans une région entrante ($\cos(x_a, \xi_a) \simeq -1$).

*Démonstration de la proposition* 4.1. — Notations: Pour des raisons de clarté de notation nous omettrons les indices $j$ et $\pm$ au cours de la démonstration de cette proposition. On écrira aussi quand cela ne porte pas à confusion $m$ et $\phi$ au lieu de $m(x_a, \xi_a)$ et $\phi(x_a, \xi_a)$. On notera enfin $\Omega = \Omega(\mathrm{R}, d, \pm\sigma_j^{\pm})$, $\lambda^\alpha = (\psi_\alpha, (x^a)\psi_\alpha)$, qui est un vecteur de $\mathbb{R}^{n\,(\mathrm{N}-2)}$, et $\Gamma_\alpha = (\mathrm{H}^a - \varepsilon_\alpha)^{-1}(1 - \pi_\alpha)$.

*Note*: Nous remarquerons que si $\varepsilon_\alpha$ était une valeur propre multiple de $\mathrm{H}^a$ la construction logique serait la même en prenant pour $\pi_\alpha$ le projecteur sur le sous-espace propre correspondant. Cependant $\lambda_\alpha$ ne serait plus dans ce cas un vecteur de $\mathbb{R}^{n\,(\mathrm{N}-2)}$ mais un opérateur matriciel. La démonstration de cette proposition, tout en gardant à peu près la même structure, nécessiterait alors une écriture bien plus lourde. C'est la raison pour laquelle nous avons pris le parti de nous limiter aux valeurs propre simples de $\mathrm{H}^a$.

On cherche les fonctions vérifiant les conditions de la proposition sous la forme $m = \tilde{m} + \tilde{n}$ avec:

$$\tilde{m} = \pi_\alpha m \qquad \text{et} \qquad \tilde{n} = (1 - \pi_\alpha) m$$

la condition (ii) s'écrit alors:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{i}{2}\nabla_{x_a}\phi\,.\,\nabla_{x_a}\tilde{m} + \left(\frac{i}{2}\Delta_{x_a}\phi - \lambda^\alpha\,.\,\nabla_{x_a}\mathrm{I}_a(x_a)\right)\tilde{m} = -\frac{1}{2}\Delta_{x_a}\tilde{m} \\ &\qquad + \pi_\alpha(\mathrm{I}_a(x) - \mathrm{I}_a(x_a) - x^a\,.\,\nabla_{x^a}\mathrm{I}_a(x_a))\,\pi_\alpha\tilde{m} + \pi_\alpha(\mathrm{I}_a(x) - \mathrm{I}_a(x_a))\,\tilde{\eta} \\ &(\mathrm{H}^a - \varepsilon_\alpha)\,\tilde{n} = \frac{1}{2}(\nabla_{x_a}\phi\,.\,\nabla_{x_a}\tilde{n} + i\Delta_{x_a}\phi\,\tilde{n} + \Delta_{x_a}\tilde{n}) \\ &\qquad\qquad - (1 - \pi_\alpha)(\mathrm{I}_a(x) - \mathrm{I}_a(x_a))(\tilde{m} + \tilde{n}) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

modulo des termes qui sont des $O(\langle x \rangle^{-\mathrm{N}})$ pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

Cherchons des solutions de (I) sous la forme de séries formelles:

$$\tilde{n} = \sum_{k \geqq 0} \tilde{n}_k \qquad \text{et} \qquad \tilde{m} = \sum_{k \geqq 0} \tilde{m}_k$$

sommes dont nous préciserons le sens ultérieurement.

En définissant les opérateurs $\mathrm{R}_0$ et $\mathrm{R}_1$ par

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{R}_1 m = \frac{i}{2}(\nabla_{x_a}\phi\nabla_{x_a}m + \Delta_{x_a}\phi_m) \\ &\text{et} \\ &\mathrm{R}_0 m = \mathrm{R}_1 m - \lambda^\alpha\,.\,\nabla_{x^a}\mathrm{I}_a(x_a)\,m \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

et en développant $(I_a(x) - I_a(x_a))$ en série de Taylor, on peut écrire formellement le système (I) et la condition (ii) ainsi :

$$
\text{(II)}\left\{
\begin{aligned}
R_0 \tilde{m}_{k+1} &= -\frac{1}{2}\Delta_{x_a}\tilde{m}_k + \sum_{i=2}^{k+1} \pi_\alpha \frac{(x^a)^i \cdot (\nabla_{x^a})^i (I_a)(x_a)}{i!}\tilde{m}_{k+2-i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k+1} \pi_\alpha \frac{(x^a)^i \cdot (\nabla_{x^a})^i (I_a)(x_a)}{i!}\tilde{n}_{k+2-i} \\
(H^a_\cdot - \varepsilon_\alpha)\tilde{n}_{k+1} &= -\frac{1}{2}\Delta_{x_a}\tilde{n}_k + R_1 \tilde{n}_k \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k+1} (1-\pi_0)\frac{(x^a)^i \cdot (\nabla_{x^a})^i (I_a)(x_a)}{i!}(\tilde{n}_{k+1-i} + \tilde{m}_{k+1-i}) \\
R_0 \tilde{m}_0 &= 0 \\
\tilde{n}_0 &= 0 \\
(\tilde{m}_0 - 1) &= O(\langle x_a \rangle^{-\rho})
\end{aligned}
\right.
$$

Nous allons construire par itération une solution du système (II) et montrer que les $\tilde{m}_k$ ainsi obtenus s'écrivent :

$$
\tilde{m}_k = m_k \otimes \pi_\alpha \qquad \text{et} \qquad \tilde{n}_k = \sum_{i=1}^{i_k} n_{k,i} \otimes M_{k,i}
$$

les $m_k$ et $n_{k,i}$ étant des symboles décroissant à l'infini en $\langle x \rangle^{-k-\rho}$, les $M_{k,i}$ des opérateurs de $B(L^2(X^a))$ et les $i_k$ des entiers.

Plus rigoureusement définissons :

$$
E_k = S\left(\langle x_a \rangle^{-k-\rho}, \frac{dx_a^2}{\langle x_a \rangle^2} + d\xi_a^2\right)
$$

et F la sous algèbre d'opérateurs agissant sur $L^2(X^a)$ engendrée par $\Gamma_\alpha$ et les opérateurs de multiplication par les composantes de $x^a$. On montre dans l'appendice A4 que $F\pi_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $B(L^2(X^a))$. De plus il est clair, d'après les hypothèses (H1) sur les potentiels, et le fait que $\xi_a$ est pris dans un compact, que pour tout $k$, $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$(\pi_\alpha (x^a)^i \cdot (\nabla_{x^a})^i I_a(x_a)\pi_\alpha) E_k \otimes \pi_\alpha \subset E_{k+i} \otimes \pi_\alpha \tag{4.8}$$

$$(\Gamma_\alpha (x^a)^i \cdot (\nabla_{x^a})^i I_a(x_a)\pi_\alpha) E_k \otimes \pi_\alpha \subset E_{k+i} \otimes F\pi_\alpha \tag{4.9}$$

$$(\pi_\alpha (x^a)^i \cdot (\nabla_{x^a})^i I_a(x_a)) E_k \otimes F\pi_\alpha \subset E_{k+i} \otimes \pi_\alpha \tag{4.10}$$

$$(\Gamma_\alpha (x^a)^i \cdot (\nabla_{x^a})^i I_a(x_a)) E_k \otimes F\pi_\alpha \subset E_{k+i} \otimes F\pi_\alpha \tag{4.11}$$

$$(\Gamma_\alpha R_1) E_k \otimes F\pi_\alpha \subset E_{k+1} \otimes F\pi_\alpha \tag{4.12}$$

$$\Delta_{x_a} E_k \subset E_{k+2} \tag{4.13}$$

Nous construisons d'autre part $\tilde{R}_0$ un inverse linéaire de $R_0$, de $E_k$ dans $E_{k-1}$, pour tout $k>1$ et un élément $m_0$ de $E_0$ tel que

$$R_0 m_0=0 \qquad \text{et} \qquad m_0(x_a, \xi_a)-1=O(\langle x\rangle^{-\rho}) \tag{4.14}$$

Pour cela on remarque (se reporter à [W], par exemple) que si l'on note $\rho(t, x_a, \xi_a)$ le flot de $\frac{1}{2}\nabla_{x_a}\phi(x_a, \xi_a).\nabla_{x_a}$ tel que $\rho(0, x_a, \xi_a)=x_a$ on a, de par les propriétés de $\phi$:

$$\left.\begin{array}{l} |\rho(t, x_a, \xi_a)|\geqq\eta(\langle x_a\rangle+|\xi_a|t) \\ \forall t\geqq 0 \qquad \forall(x_a, \xi_a)\in\Omega \qquad (\eta>0) \end{array}\right\} \tag{4.15}$$

et

$$|\partial^\alpha_{x_a}\partial^\beta_{\xi_a}(\rho(t, x_a, \xi_a)-(x_a+\xi_a t)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle x_a\rangle^{-|\alpha|-\rho} \tag{4.16}$$

Ainsi

$$m_0(x_a, \xi_a)=\exp\left(-\int_0^{+\infty}(\Delta_{x_a}\phi(\rho(t, x_a, \xi_a), \xi_a) \right.$$
$$\left. -i\lambda^\alpha.\nabla_{x^a}I_a(\rho(t, x_a, \xi_a)))\,dt\right) \tag{4.17}$$

est bien défini sur $\Omega$, vérifie les conditions (4.14), et est un symbole de classe $S\left(1, \frac{dx_a^2}{\langle x_a\rangle^2}+d\xi_a^2\right)$. En outre $(m_0(x_a, \xi_a)-1)\in E_0$.

De même pour tout $m_k\in E_k$, $k\geqq 1$

$$(\tilde{R}_0 m_k)(x_a, \xi_a)=-i\left(\int_0^{+\infty}\frac{m_k}{m_0}(\rho(t, x_a, \xi_a), \xi_a)\,dt\right)m_0(x_a, \xi_a) \tag{4.18}$$

est défini et est un élément de $E_{k-1}$ vérifiant $R_0(\tilde{R}_0 m_k)=m_k$.

Il est alors aisé de constater, en utilisant les propriétés (4.8) à (4.13) que les suites définies par :

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{n}_0=0 \\ \tilde{m}_0=m_0\otimes\pi_\alpha \\ \tilde{m}_{k+1}=\tilde{R}_0\left[-\frac{1}{2}\Delta_{x_a}\tilde{m}_k+\sum_{i=2}^{k+1}\pi_\alpha\frac{(x^a)^i.(\nabla_{x^a})^i(I_a)(x_a)}{i!}\tilde{m}_{k+2-i}\right. \\ \qquad\qquad\left.+\sum_{i=1}^{k+1}\pi_\alpha\frac{(x^a)^i.(\nabla_{x^a})^i(I_a)(x_a)}{i!}\tilde{n}_{k+2-i}\right] \\ \tilde{n}_{k+1}=\Gamma_\alpha\left[-\frac{1}{2}\Delta_{x_a}\tilde{n}_k+R_1\tilde{n}_k\right. \\ \qquad\qquad\left.+\sum_{i=1}^{k+1}(1-\pi_\alpha)\frac{(x^a)^i.(\nabla_{x^a})^i(I_a)(x_a)}{i!}(\tilde{n}_{k+1-i}+\tilde{m}_{k+1-i})\right] \end{array}\right\}$$

sont des solutions de (II) telles que $\tilde{m}_k\in E_k\otimes\pi_\alpha$ et $\tilde{n}_k\in E_k\otimes F\pi_\alpha$ pour tout entier $k>0$.

Pour achever la démonstration il ne nous reste plus qu'à ressommer ces suites à l'aide d'une fonction de troncature $\chi$ de $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que $\chi(x)=1$ pour $x \leqq 1$ et $\chi(x)=0$ pour $x \geqq 2$. On pose:

$$m(x_a, \xi_a) = \sum_{k \geqq 0} (\tilde{m}_k(x_a, \xi_a) + \tilde{n}_k(x_a, \xi_a)) \chi\left(\frac{C_k}{\langle x_a \rangle}\right) \chi\left(\frac{\langle \xi_a \rangle}{M}\right) \tag{4.19}$$

où $\chi$ et les constantes $C_k$ sont choisies de telle sorte que $m(x_a, \xi_a)$ soit un symbole de classe $S\left(1, \frac{dx_a^2}{\langle x_a \rangle^2} + \frac{d\xi_a^2}{\langle \xi_a \rangle^2}\right)$.

$m(x_a, \xi_a)$ vérifie alors les conditions de la proposition 1.

C.Q.F.D.

## 5. FORMULE DE REPRÉSENTATION DE LA MATRICE DE DIFFUSION

Dans cette section nous établissons le théorème 2.2, qui donne une formule de représentation de la matrice de diffusion, analogue à celle obtenue dans [I-K 1] pour le problème à deux corps. Si notre démarche est en quelque sorte calquée sur celle de [I-K1] nous sommes cependant amenés à utiliser quelques arguments différents pour en justifier la rigueur. Le point essentiel est en effet de contrôler uniformément en $\operatorname{Im}(z)>0$ des termes de la forme $p_\beta^* \langle x \rangle^N T_{b,j}^* (H-z)^{-1} T_{a,i} \langle x \rangle^N p_\alpha$, les opérateurs $T_{a,i}$ et $T_{b,j}$ étant définis par (4.6), pour pouvoir passer à la limite $\operatorname{Im}(z) \to 0$ au cours du calcul. Ceci est rendu possible par les résultats des sections 3 et 4.

On calcule pour commencer:

$$\begin{aligned}(W_\alpha^+)^* (W_\beta^+) &= s - \lim_{t \to +\infty} p_\alpha^* e^{it H_a} J_{a,i}^* J_{b,i} e^{-it H_b} p_\beta \\ &= \delta_{\alpha,\beta} p_\alpha^* p_\alpha\end{aligned}$$

car les images de $W_\alpha^+$ et $W_\beta^+$ sont orthogonales pour $\alpha \neq \beta$ et car $(I - J_{a,i}^* J_{a,i})$ est compact dans $L^2(X_a)$. Ainsi:

$$S_{\alpha,\beta}(\Delta) = (W_\beta^+)^* (W_\alpha^- - W_\alpha^+) + \delta_{\alpha,\beta} p_\alpha^* p_\alpha$$

On notera: $\tilde{S}_{\alpha,\beta}(\Delta) = S_{\alpha,\beta}(\Delta) - \delta_{\alpha,\beta} p_\alpha^* p_\alpha$

Et $\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on a, en posant $T_{a,i} = HJ_{a,i} - J_{a,i} H_a$

$$\begin{aligned}
(\tilde{S}_{\alpha,\beta}(\Delta) f, g) &= ((W_\alpha^- - W_\alpha^+) f, W_\beta^+ g) \\
&= -i \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itH} T_{a,i} e^{-itH_a} p_\alpha f, W_\beta^+ g)\, dt \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} d\sigma\, (T_{a,i} e^{-itH_a} p_\alpha f, e^{i\sigma H} T_{b,j} e^{-i(\sigma+t)H_b} p_\beta g) \\
&\quad - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, (T_{a,i} e^{-itH_a} p_\alpha f, J_{b,j} e^{-itH_b} p_\beta g) \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} d\sigma\, (e^{i(\sigma+t)H_b} T_{b,j}^* e^{-i\sigma H} T_{a,i} e^{-itH_a} p_\alpha f, p_\beta g) \\
&\quad - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, (e^{itH_b} J_{b,j}^* T_{a,i} e^{-itH_a} p_\alpha f, p_\beta g)
\end{aligned}$$

Appelons $I_1$ et $I_2$ les deux intégrales se trouvant dans le dernier terme de cette égalité. En faisant intervenir les opérateurs transformée de Fourier $\mathscr{F}_\alpha$ et $\mathscr{F}_\beta$ définis dans l'introduction, en utilisant (2.1) et (2.2) on obtient:

$$I_1 = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0^+} \int_0^{+\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\varepsilon_\beta}^{+\infty} d\lambda$$
$$((\mathscr{F}_\beta p_\beta^* T_{b,j}^* e^{-i\sigma(H-\lambda-i\varepsilon)} T_{a,i} e^{-it(H_a-\lambda)-\varepsilon'|t|} p_\alpha f)(\lambda, .), \mathscr{F}_\beta(\lambda) g)_{L^2(S_b^{n-1})}$$

Choisissons ici les constantes $\delta$, $\sigma_i^\pm$ et $\sigma_j^\pm$ intervenant dans la définition des opérateurs d'onde de telle sorte que $T_{a,i}$ s'écrive comme la somme d'un terme petit (*i.e.* en $\langle x \rangle^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$) et d'un opérateur pseudo-différentiel supporté dans une région sortante, et que $T_{b,j}$ s'écrive comme la somme d'un terme petit et d'un opérateur pseudo-différentiel supporté dans une région entrante. On a vu à la fin de la section 4 que cela est possible. D'après les estimations sur les valeurs au bord de la résolvante, obtenues dans le théorème 2.1, on obtient alors des majorations uniformes en $\operatorname{Im}(z) > 0$ pour les termes $p_\beta^* \langle x \rangle^s T_{b,j}^* (H-z)^{-1} T_{a,i} \langle x \rangle^s p_\alpha$, pour tout $s > 0$. En utilisant cela pour $s > \frac{1}{2}$ et la définition des $\mathscr{F}_\alpha$ et $\mathscr{F}_\beta$ il est clair que l'on peut passer à la limite pour $\varepsilon \to 0$ dans l'intégrale $I_1$. En posant $R(z) = (H-z)^{-1}$, il vient d'après (2.2):

$$\begin{aligned}
I_1 = \lim_{\varepsilon' \to 0^+} -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\varepsilon_\beta}^{+\infty} d\lambda \int_{\varepsilon_\alpha}^{+\infty} d\lambda' \\
\times e^{it(\lambda-\lambda')-\varepsilon'|t|} ((\mathscr{F}_\beta p_\beta^* T_{b,j}^* R(\lambda+i0) T_{a,i} p_\alpha \mathscr{F}_\alpha(\lambda')^* \\
\times \mathscr{F}_\alpha(\lambda') f)(\lambda, .), \mathscr{F}_\beta(\lambda) g)_{L^2(S_b^{n-1})}
\end{aligned}$$

Et pour la deuxième intégrale:

$$I_2 = \lim_{\varepsilon' \to 0^+} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\varepsilon_\beta}^{+\infty} d\lambda \int_{\varepsilon_\alpha}^{+\infty} d\lambda'$$
$$\times e^{it(\lambda-\lambda')-\varepsilon'|t|} ((\mathscr{F}_\beta p_\beta^* J_{b,j}^* T_{a,j} p_\alpha \mathscr{F}_\alpha(\lambda')^* \mathscr{F}_\alpha(\lambda') f)(\lambda, .), \mathscr{F}_\beta(\lambda) g)_{L^2(S_b^{n-1})}$$

D'où on en déduit que:

$$(\tilde{S}_{\alpha,\beta}(\Delta) f, g) = 2i\pi \int_{\sup(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)}^{+\infty} d\lambda$$
$$\times [((\mathscr{F}_\beta p_\beta^* T_{b,j}^* R(\lambda+i0) T_{a,i} p_\alpha \mathscr{F}_\alpha(\lambda)^* \mathscr{F}_\alpha(\lambda) f)(\lambda, .), \mathscr{F}_\beta(\lambda) g)_{L^2(S_b^{n-1})}$$
$$- ((\mathscr{F}_\beta p_\beta^* J_{b,j}^* T_{a,j} p_\alpha \mathscr{F}_\alpha(\lambda)^* \mathscr{F}_\alpha(\lambda) f)(\lambda, .), \mathscr{F}_\beta(\lambda) g)_{L^2(S_b^{n-1})}]$$

Avec la définition 2.2 il vient:

$$\mathscr{S}_{\alpha,\beta}(\lambda) = p_\alpha^* \delta_{\alpha,\beta} p_\alpha + 2i\pi \mathscr{F}_\beta(\lambda) p_\beta^* T_{b,j}^* R(\lambda+i0) T_{a,i} p_\alpha \mathscr{F}_\alpha(\lambda)^*$$
$$- 2i\pi \mathscr{F}_\beta(\lambda) p_\beta^* J_{b,j}^* T_{a,j} p_\alpha \mathscr{F}_\alpha(\lambda)^* \quad (5.1)$$

ce qui donne le résultat du théorème 2.2.

## 6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3

La formule (5.1) nous permet de définir au sens des distributions le noyau de la matrice de diffusion $S_{\alpha,\beta}(\omega_a, \theta_b, \lambda)$ il vient:

$$S_{\alpha,\beta}(\omega_a, \theta_b, \lambda) = \delta_{\alpha,\beta} \delta(\theta_b - \omega_a) + 4i\pi((\lambda-\varepsilon_\alpha)(\lambda-\varepsilon_\beta))^{((n-2)/4)}(M_1 - M_2)$$

avec

$$M_1 = (e^{i\sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\theta_b . x_b} \otimes \psi_\beta(x^b), T_{b,j}^* R(\lambda+i0) T_{a,i} e^{i\sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\omega_a . x_a} \otimes \psi_\alpha(x^a)) \quad (6.1)$$
$$M_2 = (e^{i\sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\theta_b . x_b} \otimes \psi_\beta(x^b), J_{b,j}^* T_{a,i} e^{i\sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\omega_a . x_a} \otimes \psi_\alpha(x^a)) \quad (6.2)$$

Les paramètres $\sigma_j^\pm$, $\sigma_i^\pm$ et $\delta$ étant choisis comme dans la section précédente, les opérateurs pseudo-différentiels $P_j(x_a, D_{x_a})$ intervenant dans (4.6), qui sont à valeurs opérateurs, vérifient les conditions de support du théorème 2.1. Quitte à les multiplier par des fonctions de troncature, appartenant à la classe d'opérateurs pseudo-différentiels $S\left(1, \frac{dx_a^2}{\langle x_a \rangle^2} + \frac{d\xi_a^2}{\langle \xi_a \rangle^2}\right)$ et de support un peu plus large on peut utiliser les conclusions du théorème 2.1. On en déduit que les opérateurs $p_\beta \langle x \rangle^N T_{b,j}^* (R(\lambda+i0))^l T_{a,i} \langle x \rangle^N p_\alpha$ sont bornés pour tout N et $l \in \mathbb{N}^*$. Il est clair alors que le terme $M_1$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathscr{D}_1$, ses dérivées s'obtenant directement de (6.1).

Pour étudier la régularité de $M_2$ nous distinguons deux cas:

- (i) $a \neq b$

$$a \neq b \Rightarrow \exists \eta_1, \eta_2 > 0 \quad \text{tel que } \forall x \in X \quad \langle x \rangle \leqq \eta_1 \langle x^a \rangle + \eta_2 \langle x^b \rangle$$

En particulier, $p_\beta \langle x \rangle^N J^*_{b,j} T_{a,i} \langle x \rangle^N p_\alpha$ est borné pour tout $N \in \mathbb{N}$, et, au vu de (6.2), $M_2$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathscr{D}_1$.

• (ii) $a=b$

En reprenant les définitions des opérateurs $J_{b,j}$ et $T_{a,i}$, données par (4.1) et (4.4), on obtient:

$$T_{a,i}\, e^{i\sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\,\omega_a . x_a} \otimes \psi_\alpha = C\, e^{i\, o_{a,i}(x_a,\, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\,\omega_a)}\, W_{a,i}(x_a, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\,\omega_a)\,\psi_\alpha)$$
$$J_{b,j}\, e^{i\sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\,\theta_b . x_b} \otimes \psi_\beta = C\, e^{i\, o_{b,j}(x_b,\, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\,\theta_b)}\, m_{b,j}(x_b, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\,\theta_b)\,\psi_\beta)$$

Il vient alors:

$$M_2 = K \int_{X_a} e^{i(\sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\,\omega_a - \sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\,\theta_b).x_a} (\psi_\beta,\, r(x_a, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\,\omega_a)\,\psi_\alpha)_{L^2(X^a)}\, dx_a \qquad (6.3)$$

avec

$$r(x_a, \xi_a) = e^{i(o_{a,i}(x_a,\, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\,\omega_a) - o_{b,j}(x_a,\, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\,\theta_b))}$$
$$\times (m_{b,j}(x_a, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\,\theta_b))^*\, W_{a,i}(x_a, \sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\,\omega_a)$$

Or on sait, de par les propriétés (4.3) et (4.6), que $r(x_a, \xi_a)$ est un symbole de classe $S\left(\langle x_a \rangle^{-1}, \dfrac{dx_a^2}{\langle x_a \rangle^{2\rho}}\right)$ et au vu de l'égalité (6.3), il est clair que $M_2$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathscr{D}_1$ si $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$ et sur $\mathscr{D}_2$ si $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$.

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que dans ce dernier cas on a bien l'inégalité (2.7). Pour cela nous rappelons ci-dessous un résultat de [I-K2] (théorème 4.1):

LEMME 6.5. — *Soient* $0<\nu<n$, $0<\delta \leq 1$, $t(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *un symbole de classe* $S\left(\langle x \rangle^{-\nu}, \dfrac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\delta}}\right)$, *et* $\phi$ *la fonction définie par:*

$$\phi(\xi) = \int e^{-ix.\xi}\, t(x, \xi)\, dx$$

*Alors*:

$$|\phi(\xi)| \leq C\, |\xi|^{-((n-\nu)/\delta)} \qquad pour \quad |\xi| \to 0$$

Ce lemme appliqué à (6.3), avec $\xi = (\sqrt{\lambda-\varepsilon_\alpha}\,\omega_a - \sqrt{\lambda-\varepsilon_\beta}\,\theta_b)$ donne alors directement l'inégalité (2.7) et achève ainsi la démonstration du théorème 2.3.

# A APPENDICE

## A.1

On montre ici que $\forall \varepsilon$ il existe $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in S(\mathbb{R}^n)$

$$2\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq \varepsilon (u, \mathrm{Op}^w(\langle x \rangle^\delta \langle D_x \rangle) u)$$
$$C_\varepsilon \|\mathrm{Op}^w(\langle x \rangle^{-N_0/2} \langle D_x \rangle^{-N_0/2}) u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

D'après le calcul symbolique :

$$\mathrm{Op}^w(\langle x \rangle^\delta > \langle D_x \rangle) = (\mathrm{Op}^w(\langle x \rangle^{\delta/2} \langle D_x \rangle^{1/2}))^2 + \mathrm{Op}^w(R(x, D_x))$$

avec $R(x, \xi) \in S\left(\langle x \rangle^{\delta-2} \langle \xi \rangle^{-1}, \dfrac{dx^2}{\langle x \rangle^2} + \dfrac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2}\right)$.

Donc $\mathrm{Op}^w(R(x, D_x)) \in B(L^2(\mathbb{R}^n))$ et il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall u \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(u, \mathrm{Op}^w(\langle x \rangle^\delta \langle D_x \rangle) u) \geqq \|\mathrm{Op}^w(\langle x \rangle^{\delta/2} \langle D_x \rangle^{1/2}) u\|^2 - K\|u\|^2$$

En utilisant alors le fait que les opérateurs $\mathrm{Op}^w(\langle x \rangle^{\delta/2} \langle D_x \rangle^{1/2})$ et $\mathrm{Op}^w(\langle x \rangle^{-N_0/2} \langle D_x \rangle^{-N_0/2}) u$ ont des normes graphes équivalentes à $\|\cdot\|_{\delta/2,\, 1/2}$ et $\|\cdot\|_{-N_0/2,\, -N_0/2}$ et le fait que pour tout $\varepsilon_0 > 0$ il existe $C_0$ tel que pour tout $u \in S(\mathbb{R}^n)$ :

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq \varepsilon_0 \|u\|^2_{\delta/2,\, 1/2} + C_0 \|u\|^2_{-N_0/2,\, -N_0/2}$$

on obtient le résultat énoncé en choisissant $\varepsilon_0 < \varepsilon (K+1)^{-1}$.

## A.2

On démontre dans ce paragraphe que $\tilde{A}$ est essentiellement auto-adjoint sur $S(\mathbb{R}^n)$. Pour cela nous utilisons le théorème du commutateur de Nelson dont nous en rappelons ci-dessous l'énoncé que l'on peut trouver par exemple dans [R-S] :

THÉORÈME 1.4. — *Soient* N *un opérateur auto-adjoint et* T *un opérateur symétrique sur un domaine* $\mathscr{D}$ *qui est un cœur pour* N, *tels que* :

(i) $N \geqq 1$

(ii) $\|T\phi\| \leqq C\|N\phi\|\ \forall \phi \in \mathscr{D}$

(iii) $|(N\phi, T\phi) - (T\phi, N\phi)| \leqq C_1 \|N^{1/2}\phi\|^2\ \forall \phi \in \mathscr{D}$

*alors* T *est essentiellement auto-adjoint sur* $\mathscr{D}$.

Dans notre cas prenons $N = \mathrm{Op}^w(\langle x \rangle \langle D_x \rangle) + C_0$, $T = \tilde{A}$ et $\mathscr{D} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. N est elliptique dans la classe $S\left(\langle x \rangle \langle \xi \rangle, \dfrac{dx^2}{\langle x \rangle^2} + \dfrac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2}\right)$, est donc essentiellement auto-adjoint sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et a pour domaine de fermeture l'espace de Sobolev $H^{1,1}$. Il est clair que, pour $C_0$ assez grand,

$N \geqq 1$ et que pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|\tilde{A}\phi\| \leqq C_1 \|N\phi\|$. Les conditions (i) et (ii) sont donc satisfaites.

D'autre part, en utilisant le calcul symbolique dans la classe

$$S\left(\langle x\rangle\langle\xi\rangle, \frac{dx^2}{\langle x\rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2\langle x\rangle^{2\delta-2}}\right),$$

il vient:

$$[\tilde{A}, N] - \mathrm{Op}^w(\{\tilde{a}(x, D_x), \langle x\rangle\langle D_x\rangle\}) \in S\left(\langle x\rangle^{(4-4\delta)}, \frac{dx^2}{\langle x\rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2\langle x\rangle^{2\delta-2}}\right)$$

On estime le crochet de Poisson $\{\tilde{a}(x, D_x), \langle x\rangle\langle D_x\rangle\}$ en utilisant l'expression exacte de $\tilde{a}(x, \xi)$:

$$\tilde{a}(x, \xi) = x.\xi(1-\chi)\left(\frac{2x.\xi}{\sigma\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle}\right) + \frac{\sigma}{2}\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle\chi\left(\frac{x.\xi}{\sigma\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle}\right) + C\langle x\rangle^{-N_0}\langle\xi\rangle^{-N_0}$$

Comme $\chi'$, la dérivée de $\chi$, est à support compact, tous les termes de la forme $x.\xi\chi'\left(\frac{x.\xi}{\sigma\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle}\right)$ sont de taille $\langle x\rangle^\delta\langle\xi\rangle$ et on vérifie sans difficulté que:

$$\{\tilde{a}(x, \xi), \langle x\rangle\langle\xi\rangle\} \in S\left(\langle x\rangle\langle\xi\rangle, \frac{dx^2}{\langle x\rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2\langle x\rangle^{2\delta-2}}\right)$$

Ainsi

$$[\tilde{A}, N] \in S\left(\langle x\rangle\langle\xi\rangle, \frac{dx^2}{\langle x\rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2\langle x\rangle^{2\delta-2}}\right)$$

ce qui prouve que les opérateurs N et $\tilde{A}$ vérifient bien la dernière condition du théorème. Il en suit que $\tilde{A}$ est essentiellement autoadjoint sur $S(\mathbb{R}^n)$.

C.Q.F.D.

## A.3

Nous étudions ici le comportement des opérateurs $(\tilde{A}-z)^{-N}$ sur les espaces de Sobolev $H^{p,p}$, $(p \in \mathbb{R})$.

L'opérateur pseudo-différentiel $\tilde{A}$ n'est pas elliptique dans sa classe. On peut cependant, lui construire un inverse approché. Posons en effet:

$$b(x, \xi) = (\tilde{a}(x, \xi))^{-1}$$

On vérifie que:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta} \langle x \rangle^{-\delta-|\alpha|(2\delta-1)+|\beta|(1-\delta)} \langle \xi \rangle^{1-|\beta|}$$

soit

$$b(x,\xi) \in S\left(\langle x \rangle^{-\delta} \langle \xi \rangle^{-1}, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2(2\delta-1)}} + \frac{d\xi^2}{\langle x \rangle^{2(\delta-1)} \langle \xi \rangle^2}\right)$$

Ainsi

$$\mathrm{Op}^w(b(x, D_x))\tilde{A} = I + \mathrm{Op}^w(t(x, D_x))$$

avec

$$t(x,\xi) \in S\left(\langle x \rangle^{3-4\delta} \langle \xi \rangle^{-1}, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2(2\delta-1)}} + \frac{d\xi^2}{\langle x \rangle^{2(\delta-1)} \langle \xi \rangle^2}\right)$$

En écrivant:

$$(\tilde{A}-z)^{-1} = \mathrm{Op}^w(b(x, D_x))(1 + z(\tilde{A}-z)^{-1}) - \mathrm{Op}^w(t(x, D_x))(\tilde{A}-z)^{-1}$$

il vient:

$$(\tilde{A}-z)^{-1} \in B(L^2, H^{4\delta-3,1})$$

avec

$$\|(\tilde{A}-z)^{-1}\|_{L^2, H^{4\delta-3,1}} \leqq C\left|\frac{z}{\mathrm{Im}(z)}\right| \tag{A.1}$$

Pour estimer alors l'action de $(\tilde{A}-z)^{-1}$ sur les espaces de Sobolev $H^{p,p}$ nous allons évaluer les commutateurs de $(\tilde{A}-z)^{-1}$ avec les opérateurs:

$$B_{p,p} = (\mathrm{Op}^w \langle x \rangle^p \langle D_x \rangle^p))$$

Le calcul symbolique donne:

$$[B_{p,p}, \tilde{A}] = \mathrm{Op}^w(\{\langle x \rangle^p \langle D_x \rangle^p, \tilde{a}(x, D_x)\} + r(x, D_x))$$

avec

$$r(x,\xi) \in S\left(\langle x \rangle^{p+4-6\delta} \langle \xi \rangle^{q-2}, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2 \langle x \rangle^{2\delta-2}}\right)$$

et

$$\{\langle x \rangle^p \langle \xi \rangle^p, \tilde{a}(x,\xi)\} \in S\left(\langle x \rangle^p \langle \xi \rangle^p, \frac{dx^2}{\langle x \rangle^{2\delta}} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2 \langle x \rangle^{2\delta-2}}\right)$$

En écrivant:

$$B_{p,p}(\tilde{A}-z)^{-1} u = (\tilde{A}-z)^{-1} B_{p,p} u - (\tilde{A}-z)^{-1} [B_{p,p}, \tilde{A}](\tilde{A}-z)^{-1} u \tag{A.2}$$

et en utilisant l'équation (A.1), on montre que pour tout $p>0$ l'opérateur $(\tilde{A}-z)^{-1}$ est borné de $H^{p,p}$ dans $H^{p+(4\delta-3),\,p+(4\delta-3)}$ et de norme majorée par $C\left|\frac{z}{\operatorname{Im}(z)}\right|^{q(p)}$.

En effet posons $\eta=4\delta-3$ et raisonnons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\eta<p\leqq(k+1)\eta$,;

Pour $k=0$ l'équation (A.1) et le calcul symbolique ci-dessus montre que si $u\in H^{p,p}$ (et $0<p\leqq\eta$) les deux termes de droite de (A.2) sont dans $H^{\eta,\eta}$. Il vient ainsi $(\tilde{A}-z)^{-1}u\in H^{p+\eta,\,p+\eta}$.

Supposons maintenant $(k+1)\eta<p\leqq(k+2)\eta$ et que l'on ait établi notre affirmation jusqu'au rang $k$. Pour tout $u\in H^{p,p}(\subset H^{(k+1)\eta,\,(k+1)\eta})$ on a $(\tilde{A}-z)^{-1}u\in H^{(k+2)\eta,\,(k+2)\eta}$ et ainsi $[B_{p,p},\tilde{A}]\,(\tilde{A}-z)^{-1}u\in L^2$. Les deux termes de droite de (A.2) sont donc dans $H^{\eta,\eta}$ et par conséquent $(\tilde{A}-z)^{-1}u\in H^{p+\eta,\,p+\eta}$. Les estimations de norme se déduisent directement de la récurrence et de l'estimation (A.1).

C.Q.F.D.

En itérant N fois on obtient $(\tilde{A}-z)^{-N}\in B(H^{p,p},\,H^{p+N(4\delta-3),\,p+N(4\delta-3)})$ avec une norme majorée par $K\left|\frac{z}{\operatorname{Im}(z)}\right|^{q_1(N)}$, pour tout $p\geqq 0$.

Le résultat s'étend par un argument de dualité aux valeurs négatives de $p$.

## A.4

On montre ici le lemme suivant:

LEMME 1.6. — *Pour tout* $l\in\mathbb{N}$ *tout multi-indice* $\tau\in\mathbb{N}^l$ *et tout l-uplet de multi-indices,* $\kappa\in M^l$, M *désignant l'ensemble des multi-indices, les opérateurs, que nous noterons* $(\Gamma_\alpha)^\tau(x^a)^\kappa\pi_\alpha$, *définis par:*

$$(\Gamma_\alpha)^\tau(x^a)^\kappa\pi_\alpha=\left(\prod_{i=1}^{l}(\Gamma_\alpha)^{\tau_i}(x^a)^{\kappa_i}\right)\pi_\alpha$$

*sont dans* $B(L^2(X^a))$.

*Remarques sur les notations:*

. On rappelle que $\Gamma_\alpha=(H^a-\varepsilon_\alpha)^{-1}(1-\pi_\alpha)$.

. La valeur zéro étant permise pour les coefficients $\tau_i$ et $\kappa_i$ plusieurs multi-indices peuvent définir les mêmes opérateurs $(\Gamma_\alpha)^\tau(x^a)^\kappa\pi_\alpha$. Pour des raisons d'écriture on supposera par la suite, sans perte de généralité, que $\tau_1=0$ et $\tau_i=1$, pour tout $0<i\leqq l$.

Venons en maintenant à la démonstration. $\varepsilon_\alpha$ étant une valeur propre isolée de $H^a$, pour un contour $\Xi$ suffisamment proche de $\varepsilon_\alpha$

$$\Gamma_\alpha=(H^a-\varepsilon_\alpha)^{-1}(1-\pi_\alpha)=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Xi\frac{dz}{(z-\varepsilon_\alpha)(z-H^a)}$$

et $(\Gamma_\alpha)^\tau (x^a)^\varkappa \pi_\alpha = \int_\Xi dz_2 \ldots dz_l$

$$(x^a)^{\varkappa_1}\frac{1}{(z_2-\varepsilon_\alpha)(z_2-H^a)}(x^a)^{k_2}\ldots\frac{1}{(z_l-\varepsilon_\alpha)(z_l-H^a)}(x^a)^{\varkappa_l}\pi_\alpha$$

Il nous suffit donc d'étudier des termes de la forme :

$$M_{\tau\varkappa}=(x^a)^{\varkappa_1}\frac{1}{(z_2-\varepsilon_\alpha)(z_2-H^a)}(x^a)^{\varkappa_2}\ldots\frac{1}{(z_l-\varepsilon_\alpha)(z_l-H^a)}(x^a)^{\varkappa_l}\pi_\alpha$$

Dans la suite pour $k \in \mathbb{N}$ nous noterons par $(x^a)^k$ tout terme de la forme $(x^a)^\eta$ avec $|\eta|=k$ étant entendu qu'une telle notation n'est bien sûr pas biunivoque. Pour $p \geqq 0$ notons par $I_p$ tout terme de la forme $(x^a)^p (H^a-z)^{-1}$, et prenons la convention $I_p=0$ pour $p<0$. Il vient alors, par un simple calcul de commutateur :

$$I_p=(H^a-z)^{-1}(x^a)^p-\frac{i}{2}p(H^a-z)^{-1}(D_{x^a})I_{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}(H^a-z)^{-1}I_{p-2}$$

et par récurrence :

$$I_p=\sum_{\substack{i,\,j\in\mathbb{N}^p\\ |i|+2|j|\leq p}} C_{ij}((H^a-z)^{-1}(D_{x^a}))^i(H^a-z)^{-j}(x^a)^{p-|i|-2|j|}$$

On en déduit que les $M_{\tau\varkappa}$ s'écrivent de la forme :

$$M_{\tau\varkappa}=\sum_{\substack{i,\,j,\,k\in\mathbb{N}^p\\ |i|+2|j|\leq|\varkappa|\\ |k|\leq|\tau|}}\tilde{C}_{ij}((H^a-z)^{-1}(D_{x^a}))^i(H^a-z)^{-(j+k)}(x^a)^{|\varkappa|-|i|-2|j|}\pi_\alpha$$

$\psi_\alpha$, le vecteur propre de $H^a$ sur lequel se fait la projection $\pi_\alpha$ étant à décroissance exponentielle en $x^a$ les opérateurs $(x^a)^N \pi_\alpha$ sont bornés pour tout N. Le résultat suit alors immédiatement.


## REMERCIEMENTS

Cet article entre dans le cadre de ma thèse, préparée sous la direction de Christian Gérard, que je remercie pour ses nombreux conseils et idées, et pour avoir su orienter mes recherches.

Je tiens aussi à remercier E. Skibsted pour une idée qu'il m'a transmise, idée particulièrement utile pour la construction des opérateurs d'onde.

## RÉFÉRENCES

[F-H] R. FROESE et I. HERBST, Exponential Bounds and Absence of Positive Eigenvalues for N-Body Schrödinger Operators, *Com. Math. Phys.*, vol. **87**, 1982, p. 429-447.

[G] C. GÉRARD, Sharp Propagation Estimates for N-particle Systems, 1991, *Duke. Math. Journal*, vol. **67**, 1992, p. 483-515.

[Ho] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Partial Differential Operators*, vol. **3**, Springer-Verlag, New York, 1985.

[H-S] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper, Springer, *Lecture Notes in Physics*, n° 345, 1989, p. 118-197.

[I-K1] H. ISOZAKI et H. KITADA, Scattering Matrices for Two-Body Schrödinger Operators, *Scientific Papers of the College of Arts and Sciences*, Tokyo University, vol. **35**, 1985, p. 81-107.

[I-K2] H. ISOZAKI et H. KITADA, Micro-Local Resolvent Estimates for 2-Body Schrödinger Operators, *J. Funct. Anal.*, vol. **57**, 1984, p. 270-300.

[J] A. JENSEN, Propagation Estimates for Schrödinger Type Operators, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **291-1**, 1985, p. 129-144.

[M] E. MOURRE, Opérateurs conjugués et propriétés de propagation, *Com. Math. Phys.*, vol. **91**, 1981, p. 279-300.

[R-S] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. **1-4**, Academic, London 1975, 1978, 1979 et 1980.

[Sk] E. SKIBSTED, Smoothness of N-body scattering amplitudes, *Rev. Math. Phys.*, vol. **4**, n° 4, 1992, p. 619-658.

[W] X. P. WANG, Asymptotiques Semi-classiques pour les Opérateurs de Schrödinger et de Dirac, *Thèse d'état*, 1986, non publiée.

[W2] X. P. WANG, Time-delay operators in semiclassical limit. II. Short-Range Potentials, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **322-1**, 1990, p. 395-414.

(*Manuscrit reçu le* 1er *avril* 1992;
*version révisée reçue le* 15 *juin* 1992.)