ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

P. FOULON

Estimation de l'entropie des systèmes lagrangiens sans points conjugués

Annales de l'I. H. P., section A, tome 57, nº 2 (1992), p. 117-146
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1992__57_2_117_0>

© Gauthier-Villars, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 57, n° 2, 1992, p. 117-146. *Physique théorique*

Estimation de l'entropie des systèmes lagrangiens sans points conjugués

par

P. FOULON

Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique,
Laboratoire Propre LP 14 du C.N.R.S.,
plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex, France

RÉSUMÉ. — Nous généralisons aux flots déterminés par un lagrangien convexe sans points conjugués, la formule de l'entropie métrique de Freire et Mané et dans le cas à «courbure négative» la minoration de l'entropie de Osserman et Sarnak.

ABSTRACT. — We extend to Finsler flows without conjugate point the Freire and Mané entropy formula and in the negatively curved case the sharp entropy minoration of Osserman and Sarnak.

En utilisant notamment des résultats de A. Freire et R. Mañé [6], R. Osserman et P. Sarnak [13] ont récemment obtenu une nouvelle minoration de l'entropie métrique du flot géodésique des variétés riemanniennes compactes à courbure sectionnelle négative. Il existe des formules exactes pour l'entropie mais en règle générale elles sont difficilement exploitables. La minoration obtenue s'exprime uniquement en terme de courbure par le biais de l'endomorphisme de Jacobi et est la plus fine connue à ce jour.

Dans cet article nous élargissons le cadre riemannien pour nous intéresser au flot déterminé par un *lagrangien convexe*. Nous montrons qu'il

est alors possible de *généraliser* les résultats précédents à une *classe beaucoup plus large de systèmes* compacts à « *courbure négative* », les preuves y prennant par ailleurs un caractère naturel.

Ces résultats peuvent être obtenus grâce à de nouvelles grandeurs *cinématiques* que nous avons attachées aux *équations différentielles ordinaires du second ordre* [5]. Nous précisons un peu plus la nature de ces objets, qui généralisent à tout système, même dissipatif, une partie des notions fondamentales de la géométrie riemannienne comme la *dérivation covariante* et la courbure (notamment l'*endomorphisme de Jacobi*).

Si on se donne une variété M de dimension n (non nécessairement compacte), sur laquelle aucune métrique g n'est privilégiée, le fibré qui remplace naturellement le fibré unitaire UM est le fibré en sphères, ou fibré homogène $\sigma : \mathrm{HM} \to \mathrm{M}$, quotient du fibré tangent pointé $\mathring{\mathrm{T}}\mathrm{M}$ par les dilatations positives. *Une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène* est un champ de vecteurs sur HM, $\mathrm{X} : \mathrm{HM} \to \mathrm{THM}$ tel que, si $r : \mathrm{TM} \to \mathrm{HM}$ désigne l'application qui a tout vecteur associe la demi-droite qu'il engendre, alors $r \circ \mathrm{T}\sigma \circ \mathrm{X} = \mathrm{Id}_{\mathrm{HM}}$.

Toute solution d'un problème lagrangien régulier peut être représentée par un tel champ de vecteurs [4]. (Rappelons qu'un lagrangien est une fonction au moins C^2, $\mathrm{L} : \mathring{\mathrm{T}}\mathrm{M} \to \mathbb{R}$, et qu'au besoin en incorporant le temps parmi les variables on peut toujours rendre L positivement homogène de degré 1 sur les fibres de TM, choix qui sera toujours fait dans la suite).

La donnée d'une équation différentielle du second ordre X *sur le fibré homogène* (provenant ou non d'un problème variationnel) permet de décomposer l'espace tangent au fibré homogène en trois sous-fibrés supplémentaires :

$$\mathrm{THM} = \mathbb{R}\mathrm{X} \oplus \mathrm{VHM} \oplus h_{\mathrm{X}}\mathrm{HM}$$

VHM est le sous-fibré de rang $(n-1)$, tangent aux fibres, dit fibré vertical et $h_{\mathrm{X}}\mathrm{HM}$ est le sous-fibré horizontal de rang $(n-1)$ associé à X.

A l'aide de cette décomposition on peut construire deux opérateurs :

– *l'endomorphisme de Jacobi* $\vartheta_{\mathrm{X}} : \mathrm{THM} \to \mathrm{THM}$

– *la dérivation dynamique* γ_{X} qui est un opérateur différentiel d'ordre 1 agissant sur les champs de vecteurs sur HM, qui généralise la dérivation covariante habituelle mais *uniquement* le long des orbites du champ X.

Avant de décrire les résultats, donnons quelques propriétés spéciales au cas où X est déterminé par un lagrangien convexe L. On a alors une

mesure diffuse μ_L, invariante par le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ associé à X. On peut construire à partir de L une métrique riemannienne g sur HM (et non plus sur M comme dans le cas riemannien) pour laquelle les sous-fibrés de la décomposition sont orthogonaux, par rapport à laquelle ϑ_X est symétrique et telle que $\gamma_X g = 0$.

Rappelons [3] qu'un flot engendré par un champ de vecteurs X sur une variété riemannienne compacte (ici HM) est dit d'*Anosov* s'il donne naissance à une décomposition de THM en la somme directe de sous-fibrés F^+ dilatant, F^- contractant et de la droite $\mathbb{R}.X$.

Les principaux résultats de l'article sont les suivants :

THÉORÈME A. — *Sur une variété compacte* M, *le flot d'une équation différentielle du second ordre* X *provenant d'un lagrangien* L *convexe à endomorphisme de Jacobi* ϑ_X *négatif est un flot d'Anosov.*

De plus on peut considérer la distribution F^+ de rang $(n-1)$ comme étant le graphe d'une application $U^+ : VHM \to VHM$ pour laquelle on a

THÉORÈME B. — *Sur une variété compacte* M, *soit* L *un lagrangien convexe dont l'équation d'Euler-Lagrange* X *est à endomorphisme de Jacobi* ϑ_X *négatif. L'entropie métrique* $h_{\mu_L}(\varphi)$ *du flot* $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *de* X *est telle que*

$$h_{\mu_L}(\varphi) = \int_{HM} \mathrm{Tr}(U^+)\, d\mu_L.$$

et on a la minoration

$$h_{\mu_L}(\varphi) \geqq \int_{HM} \mathrm{Tr}((-\vartheta_X)^{1/2})\, d\mu_L$$

avec égalité si et seulement si $L_X \vartheta_X = 0$, *c'est-à-dire si l'endomorphisme de Jacobi est invariant par le flot. Les valeurs propres de* ϑ_X *sont alors des constantes et les directions propres sont* γ_X*-parallèles.*

Les espaces munis d'un lagrangien satisfaisant $L_X \vartheta_X = 0$. $\vartheta_X < 0$, contiennent notamment les variétés riemanniennes compactes localement symétriques [13]. (L'existence d'exemples non riemanniens est un problème ouvert).

Par contre toute perturbation lagrangienne C^2 du lagrangien de la longueur d'une métrique riemannienne, à courbure sectionnelle négative, sur une variété compacte, est encore à endomorphisme de Jacobi négatif, ce qui assure la non-trivialité de la généralisation.

Pour obtenir ces résultats nous étendons au cas lagrangien convexe le très intéressant théorème de A. Freire, R. Mañé pour les variétés riemanniennes compactes sans points conjugués. Ce théorème relie les propriétés ergodiques abstraites déduites de la théorie d'Osseledec-Pesin-Ruelle aux solutions-limites de l'équation de Jacobi, mises en évidence par L. W. Green [8] et P. Eberlein [3]. Nous obtenons ainsi le

THÉORÈME C. — *Sur une variété compacte* M, *soit* L *un lagrangien convexe, sans points conjugés, de dynamique* X.

(i) *pour presque tout z de* HM, *l'exposant de Liapounov* $\chi(z)$ *du flot* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *de* X *est donné par*

$$\chi(z)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{Tr} U_z^+(t)\,dt;$$

(ii) *si le flot* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est ergodique, alors l'entropie métrique* $h_{\mu_L}(\varphi)$ *est donnée par*

$$h_{\mu_L}(\varphi)=\int_{HM}\operatorname{Tr}(U^+)\,d\mu_L.$$

Pour la convenance du lecteur un court résumé introductif à la géométrie de Finsler est fourni en annexe.

Je tiens à remercier tout particulièrement J. P. Bourguignon qui a participé à l'élaboration des concepts utilisés dans ce travail.

1. L'ÉQUATION DE JACOBI

On suppose donnée une variété différentiable M de dimension n et une équation différentielle du second ordre X sur le fibré homogène HM. Par la suite $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ désignera le pseudo-groupe à un paramètre engendré par X et $T\varphi_t : THM \to THM$ l'application dérivée.

PROPOSITION 1.1. — *Soient z un point de* HM, Γ *l'orbite de* X *passant par z.* ξ *un vecteur de* $T_z HM$. *On pose* $\xi_t = T\varphi_t(\xi)$, *c'est un champ de vecteurs défini le long de l'orbite* Γ. *Le champ de vecteurs vertical* $v_X T\varphi_t(\xi) = v_X(\xi_t)$ *satisfait pour tout* $t\in\mathbb{R}$ *à l'« équation de Jacobi »*

$$(\gamma_X\gamma_X+\vartheta_X)(v_X(\xi_t))=0. \tag{1}$$

De plus

$$\Lambda_X(\xi_t)=\gamma_X(v_X(\xi_t)). \tag{2}$$

Remarque: Cette équation généralise l'équation de Jacobi classique de la géométrie riemannienne. Cependant elle agit ici sur le fibré vertical au fibré homogène.

Preuve: Sur $THM=\mathbb{R}X\oplus h_X HM\oplus VHM$, le champ de vecteurs ξ_t admet pour tout $t\in\mathbb{R}$ la décomposition $\xi_t=a_t.X+v_t+h_t$. La relation de définition $\xi_t=T\varphi_t(\xi)$ se réécrit localement $[X,\xi_t]=0$. Utilisant les définitions de ϑ_X et γ_X on a

$$[X,a_tX]=a_t'X$$
$$[X,v_t]=-H_X(v_t)+\gamma_X(v_t)$$
$$[X,h_t]=\gamma_X(h_t)+\vartheta_X(v_X(h_t))+p_X([X,h_t])$$

dont on déduit les trois équations

(i) $a'_t X + p_X [X, h_t] = 0$

(ii) $\gamma_X(v_t) + \vartheta_X(v_X(h_t)) = 0$

(iii) $\gamma_X(h_t) - H_X(v_t) = 0$

Pour (iii), la relation $[\gamma_X, v_X] = 0$ permet d'écrire

$$v_t = \gamma_X(v_X(h_t)),$$

c'est-à-dire la deuxième relation de la proposition. L'équation de Jacobi s'obtient en reportant cette relation dans (iii).

Dans toute la suite de cet article, nous supposerons que l'équation différentielle du second ordre X que l'on considère est la dynamique d'un lagrangien $L : \mathring{T}M \to \mathbb{R}$ positivement homogène de degré 1 strictement convexe sur les fibres de $\mathring{T}M$ supposé de classe au moins C^2. Dans [4] on a montré qu'à tout lagrangien L positivement homogène de degré 1 sur M est associé une forme $A \in \Omega^1 HM$, semi-basique (c'est-à-dire nulle sur VHM). On appelle A le semi-potentiel de L. Grâce à lui, on peut écrire simplement l'équation fondamentale du calcul des variations. Considérons pour cela un intervalle réel I et un chemin non singulier $c : I \to M$. Son relèvement $c' : I \to \mathring{T}M$ se transporte sur le fibré homogène en $\tilde{c} : I \to HM$, $\tilde{c} = r \circ c'$, on peut relever $\tilde{c}$ à nouveau en $\tilde{c}' : I \to THM$.

THÉORÈME [4]. — *Soit* L *un lagrangien positivement homogène de degré* 1, A *son demi-potentiel. Pour qu'un chemin* $c : I \to M$ *soit solution du problème variationnel, il faut que pour tout t dans* I, $\tilde{c}'(t)$ *soit solution de l'équation d'Euler Lagrange*

$$i_{\tilde{c}'(t)} \cdot dA(\tilde{c}(t)) = 0. \tag{3}$$

Le lagrangien L détermine un problème régulier si A est une forme de contact sur HM. *On supposera par la suite que c'est toujours le cas.*

On rappelle les résultats suivants qui se trouvent tous dans [4].

PROPOSITION [4]. — *Pour un lagrangien* L *positivement homogène de degré* 1 *définissant un problème régulier, les champs de vecteurs* $X' : HM \to THM$ *solutions de l'équation*

$$i_{X'} dA = 0$$

sont des équations différentielles du second ordre sur le fibré homogène.

La forme dA étant de rang maximal, les solutions X' sont colinéaires et donc admettent les mêmes orbites sur HM. Par définition la dynamique de L (ou équation d'Euler-Lagrange de L) est le champ de vecteurs X solution de $i_X dA = 0$ qui vérifie en plus la condition de normalisation $i_X A = 1$.

Les formes A, dA, la forme volume $\mu_L = A \wedge dA^{n-1}$ et la distribution $h_X HM \oplus VHM$ sont invariantes par ce champ de vecteurs particulier X [4]. On posera $\tau_X = h_X HM \oplus VHM$.

Les distributions h_XHM et VHM sont lagrangiennes pour dA. Les propriétés précédentes et la structure complexe I^X déterminée par X sur h_XHM $\oplus$ VHM permettent de munir le fibré homogène HM d'une métrique (pseudo)-riemannienne g donnée par :

$$g(\xi, \xi') = dA(I^X(\xi), \xi')$$
$$g(X, X) = 1, \qquad g(X, \xi) = 0.$$

pour ξ et ξ' dans h_XHM $\oplus$ VHM. On remarque que par construction h_XHM et VHM sont orthogonaux.

L'intérêt des lagrangiens convexes apparaît dans la proposition suivante.

PROPOSITION [4]. — *Pour un lagrangien* L *positivement homogène de degré* 1, *régulier et strictement convexe sur les fibres, la métrique* g *est riemannienne.*

On notera $g(\xi, \xi) = \|\xi\|^2$.

Rappelons quelques propriétés classiques de l'équation de Jacobi, ayant notamment pour objectif de fixer quelques notations. Pour cela, considérons z un point de HM et $E_1(z)$ un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de T_zHM. On peut associer à $E_1(z)$ un opérateur $j_1(t) : E_1(z) \to V_{\varphi_t(z)}$HM défini par $j_1(t) = v_X T\varphi_t / E_1(z)$. Il est solution de l'équation de Jacobi dans le sens suivant. Pour tout $\xi \in E_1(z)$, le vecteur $v_X \circ T\varphi_t(\xi) = j_1(t)\xi$ de $V_{\varphi_t(z)}$HM est d'après la proposition 1.1 solution de l'équation de Jacobi

$$(\gamma_X \gamma_X + \vartheta_X) j_1(t)(\xi) = 0.$$

Définissons $j_1'(t) : E_1(z) \to V_{\varphi_t(z)}$HM par $j_1'(t)(\xi) = \gamma_X(j_1(t)(\xi))$. Avec la même notation pour j'' on obtient

$$j_1''(t) + \vartheta_X j_1(t) = 0. \tag{4}$$

Toujours d'après (1.1), on déduit que

$$j_1'(t) = \Lambda_X T\varphi_t / E_1(z). \tag{5}$$

En utilisant la métrique g, on peut définir $j_1^*(t) : V_{\varphi_t(z)}$HM $\to E_1(z)$ par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_1^*(z) & V^*_{\varphi_t(z)}\mathrm{HM} \arrow[l, "j_1^T"'] \\
E_1(z) \arrow[u, "b_z"] & V_{\varphi_t(z)}\mathrm{HM} \arrow[l, "j_1^*"] \arrow[u, "\#_{\varphi_t(z)}"']
\end{tikzcd}$$

où $\#$ et b sont définis par g.

Si on considère au point z de HM deux sous-espaces vectoriels $E_1(z)$ et $E_2(z)$ de dimension $(n-1)$, la symétrie de ϑ_X permet pour tout $\xi \in E_1(z)$

et $\eta \in E_2(z)$ d'écrire que

$$g(j_2(t)\eta, \gamma_X \circ \gamma_X(j_1(t).\xi)) - g(j_1(t)\xi, \gamma_X \circ \gamma_X j_2(t)\eta) = 0.$$

Mais g étant γ-parallèle, on en déduit

$$L_X(g(j_2(t)\eta, \gamma_X(j_1(t)\xi)) - g(j_1(t)\xi, \gamma_X(j_2(t)\eta))) = 0,$$

soit, pour tout η et ξ respectivement dans $E_1(z)$ et $E_2(z)$,

$$L_X(g(\eta, j_2^*(t) j_1'(t) - j_2^{*\prime}(t) j_1(t)\xi) = 0.$$

L'opérateur $j_2^* j_1' - j_2^{*\prime} j_1(t) : E_1(z) \to E_2(z)$ est donc indépendant de t. Il ne dépend que de $E_1(z)$ et $E_2(z)$. En l'évaluant à l'instant $t=0$, et en utilisant $T\varphi_0 = \mathrm{Id}$, on obtient la relation

$$j_2^* j_1' - j_2^{*\prime} j_1(t) = (v_{X/E_2(z)})^* \circ (\wedge_{X/E_1(z)}) - (\wedge_{X/E_2(z)})^* \circ (v_{X/E_1(z)}). \tag{6}$$

Une autre version utile mais équivalente de ces relations consiste à écrire directement l'invariance de la 2-forme dA par $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$. D'où, pour deux vecteurs ξ et $\eta \in \tau_z HM$, la relation $dA_z(\xi, \eta) = dA(T\varphi_t(\xi), T\varphi_t(\eta))$ et à utiliser la structure complexe associée à X (*voir* [4])

$$g_z(I_z^X(\xi), \eta) = g_{\varphi_t(z)}(I_{\varphi_t(z)}^X(T\varphi_t(\xi)), T\varphi_t(\eta))$$

soit

$$I_z^X = T\varphi_t^* \circ I_{\varphi_t(z)}^X \circ T\varphi_t. \tag{7}$$

Remarquons encore que si $E_1(z) = E_2(z)$, pour tout ξ et η dans $E_1(z)$,

$$g(\xi, (j_1^* j_1' - j_1^{*\prime} j_1(t)\eta) = dA(\xi, \eta)$$

car

$$\begin{aligned} g(\xi, (j_1^* j_1' - j_1^{*\prime} j_1)(t)\eta) &= g(v_X(\xi), \wedge_X(\eta)) - g(\wedge_X(\xi), v_X(\eta)) \\ &= g(H_X v_X(\xi) + \wedge_X(\xi), H_X(\wedge_X(\eta) - v_X(\eta)) = g(\xi, I_X(\eta)). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $E_1(z)$ est lagrangien,

$$j_1^* j_1' = j_1^{*\prime} j_1. \tag{8 bis}$$

2. LAGRANGIENS CONVEXES SANS POINTS CONJUGUÉS - ENTROPIE

Dans cette partie nous allons nous attacher à étendre aux lagrangiens convexes le théorème II de A. Freire et R. Mane [6]. Ce théorème fournit une formule exacte pour l'entropie métrique du flot géodésique d'une variété riemannienne compacte sans points conjugués. Son grand intérêt provient du fait qu'il relie les distributions qui apparaissent dans le théorème d'Osseledec et qui sont déduites de la théorie ergodique, à des solutions-limites de l'équation locale de Jacobi.

Pour les points conjugués on retiendra dans le cas lagrangien la définition suivante :

DÉFINITION (2.1). — Soit X une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène, $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ son flot. Deux points z et $\varphi_\tau(z)$ de HM *sont conjugués le long du flot* s'il existe au moins un vecteur vertical $Y \in V_z HM$ tel que $T\varphi_\tau(Y)$ soit dans $V_{\varphi_\tau(z)} HM$.

Ainsi, on dira qu'un lagrangien est *sans points conjugués* si sa dynamique X est sans points conjugués (1). Autrement dit, si, pour tout z de HM et tout $t \neq 0$, le sous-espace vectoriel $T\varphi_t(V_z HM)$ est transverse à $V_{\varphi_t(z)} HM$.

Dans une première étape, nous allons construire les solutions-limites. Nous suivons la méthode de L. W. Green [8]. Étant donné un point z du fibré homogène, l'orbite de X passant par z et τ un réel, nous considèrerons [proposition (2.2)] l'espace vectoriel lagrangien $F_{z,\tau}(0)$ de $T_z HM$ tel, que par transport le long du flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de X, on ait

$$T\varphi_\tau(F_{z,\tau}(0)) = V_{\varphi_\tau(z)} HM.$$

Grâce à l'absence de points conjugués, nous montrerons (proposition (2.3) l'existence des deux sous-espaces vectoriels lagrangiens

$$F_z^+ = \lim_{\tau \to -\infty} F_{z,\tau}(0), \qquad F_z^- = \lim_{\tau \to +\infty} F_{z,\tau}(0).$$

Le long de l'orbite Γ les distributions F^+ et F^- sont partout transverses à VHM et invariantes par $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Nous pourrons alors les considérer comme étant les graphes de deux applications symétriques (relativement à g) $U_z^\pm : V_z HM \to V_z HM$ telles que

$$F_z^+ = \text{graphe}(U_z^+), \qquad F_z^- = \text{graphe}(U_z^-).$$

(1) Cette propriété est en fait vraie pour tous les champs de vecteurs solution de l'équation du calcul des variations indépendamment de la normalisation.

Nous observerons que, si on se fixe un point z la famille $U^+_{\varphi_t(z)}$ est, pour tout t réel, une solution de l'équation de Riccati

$$U'^+_{\varphi_t(z)} + U^{+2}_{\varphi_t(z)} + \vartheta_X = 0.$$

PROPOSITION (2.2). — *Soit* L *un lagrangien convexe de dynamique* X *sans points conjugués, z un point de* HM, τ *un réel non nul. Alors*

(i) *la distribution de rang* $n-1$

$$F_{z,\tau}(t) = T\varphi_{t-\tau}(V_{\varphi_\tau(z)}HM)$$

est lagrangienne, transverse à VHM *pour tout* $t \neq \tau$;

(ii) *elle détermine un opérateur* $J_{z,\tau}(t) : V_z HM \to V_{\varphi_t(z)} HM$ *inversible pour tout* $t \neq \tau$, *qui est une solution de l'équation de Jacobi et qui vérifie*

$$J_{z,\tau}(0) = \mathrm{Id}(V_z HM), \qquad J_{z,\tau}(\tau) = 0;$$

(iii) *pour tout* $t \neq \tau$, $F_{z,\tau}(t)$ *est le graphe de l'application symétrique* $U_{z,\tau}(t)$ *de* $V_{\varphi_t(z)}HM$ *dans lui-même donnée par*

$$U_{z,\tau}(t) \doteq J'_{z,\tau}(t) \circ J^{-1}_{z,\tau}(t); \tag{9}$$

(iv) *de plus,* $U_{z,\tau}(t)$ *est solution de l'équation de Riccati*

$$U'_{z,\tau}(t) + U^2_{z,\tau}(t) + \vartheta_X = 0 \tag{10}$$

(*où* $U'_{z,\tau}(t) = [\gamma_X, U_{z,\tau}(t)]$).

Preuve. — (i) pour $\tau = t$ la distribution $F_{z,\tau}(t)$ est telle que $F_{z,\tau}(\tau) = V_{\varphi_\tau(z)}(HM)$; elle est donc obtenue par simple transport de $V_{\varphi_\tau(z)}HM$. Le fait que $V_{\varphi_\tau(z)}HM$ soit lagrangien pour dA et l'invariance de dA entraînent que pour tout z, τ, t, $F_{z,\tau}(t)$ est lagrangien. D'autre part l'absence de points conjugués garantit que pour tout $t \neq \tau$, $F_{z,\tau}(t)$ est transverse à $V_{\varphi_t(z)}HM$.

(ii) De la transversalité pour tout $t \neq \tau$ de la distribution $F_{z,\tau}(t)$ au sous-fibré vertical VHM et des propriétés de l'endomorphisme vertical v_X, il résulte que la restriction $v_X/F_{z,\tau}(t) : F_{z,\tau}(t) \to V_{\varphi_t(z)}HM$ est inversible pour tout $t \neq \tau$. Si nous particularisons maintenant l'instant $t = 0$, pour tout $\tau \neq 0$ on possède un sous-espace vectoriel $F_{z,\tau}(0)$ de $\tau_z HM$ qui est lagrangien donc de dimension $n-1$; or nous avons vu qu'on pourrait lui associer un opérateur que nous noterons $j_{\tau,z}(t) : F_{z,\tau}(0) \to V_{\varphi_t(z)}HM$ qui est solution de l'équation de Jacobi pour tout t. Pour $0 \neq \tau$, en utilisant la

transversalité, on peut définir $J_{z,\tau}(t): V_z HM \to V_{\varphi_t(z)} HM$ par le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_{z,\tau}(0) \arrow[r, "j_{\tau,z}(t)"] \arrow[d, "v_X"'] & V_{\varphi_t(z)} HM \\ V_z HM \arrow[ur, "J_{z,\tau}(t)"'] & \end{tikzcd}$$

Avec ces notations, pour tout ξ dans $F_{z,\tau}(0)$ et tout $t \neq 0$,

$$v_X(T\varphi_t(\xi)) = J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi)). \tag{11}$$

Toujours d'après la transversalité $J_{z,\tau}(t)$ est inversible pour $t \neq \tau$ et $\tau \neq 0$, on définit comme précédemment pour $\tau \neq 0$

$$J'_{z,\tau}: \quad V_z HM \to V_{\varphi_t(z)} HM, \quad \text{par}$$
$$J'_{z,\tau}(t)(Y) = \gamma_X(J_{z,\tau}(t)(Y)) \quad \text{pour tout } Y \in V_z HM.$$

Dès lors, comme pour (4) $J_{z,\tau}(t)$ est une solution de l'équation de Jacobi vérifiant d'après (11) $J_{z,\tau}(0) = \mathrm{Id}(V_z HM)$, $J_{z,\tau}(\tau) = 0$.

(iii) D'après (5), pour tout $\xi \in F_{z,\tau}(0)$ et $\tau \neq 0$

$$\Lambda_X T\varphi_t(\xi) = J'_{z,\tau}(t)(v_X(\xi)).$$

Par conséquent, on peut écrire pour $\xi \in F_{z,\tau}(0)$, $\tau \neq 0$

$$T\varphi_t(\xi) = H_X(J_{z,\tau}(v_X(\xi))) + J'_{z,\tau}(t)(v_X(\xi)). \tag{12}$$

La distribution lagrangienne $F_{z,\tau}(t)$ est donc, pour tout $t \neq \tau$, $\tau \neq 0$, le graphe de l'application $U_{z,\tau}(t): V_{\varphi_t(z)} HM \to V_{\varphi_t(z)} HM$ donnée par

$$U_{z,\tau}(t) = J'_{z,\tau}(t) . J^{-1}_{z,\tau}(t).$$

D'après la relation (8 *bis*), $U_{z,\tau}(t)$ est symétrique.

(iv) Pour tout ξ dans $F_{z,\tau}(0)$ on peut, d'après l'inversibilité de $J_{z,\tau}(t)$ pour $t \neq \tau$ et l'équation de Jacobi, écrire

$$\gamma_X(J'_{z,\tau}(t) J^{-1}_{z,\tau}(t)(J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi)))) + \vartheta_X(J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi))) = 0,$$

soit

$$\gamma_X(U_{z,\tau}(t)(J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi)) + \vartheta_X(J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi))) = 0.$$

Si on pose $U'_{z,\tau}(t) = [\gamma_X, U_{z,\tau}(t)]$, il vient

$$U'_{z,\tau}(t)(J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi))) + U_{z,\tau}(t)\gamma_X(J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi))) + \vartheta_X(J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi))) = 0.$$

Soit

$$(U'_{z,\tau}(t) + U^2_{z,\tau}(t) + \vartheta_X)(J_{z,\tau}(t)(v_X(\xi))) = 0.$$

Mais, pour tout $t \neq \tau$, $J_{z,\tau}(t) \circ v_X$ est inversible et donc surjective.

Remarque. — Pour $\tau=0$, l'application de la définition donnée dans (i) de la proposition conduit à $F_{z,0}(t)=T\varphi_t(V_z HM)$; il s'agit donc du simple transport de $V_z HM$. On considèrera alors directement l'opérateur

$$J_z(t):\quad V_z HM \to V_{\varphi_t(z)} HM, \tag{13}$$

donné pour tout vecteur vertical Y dans $V_z HM$ par

$$J_z(t)(Y)=v_X \circ T\varphi_t(Y).$$

Pour tout $t\neq 0$ les résultats de proposition sont alors évidemment satisfaits sauf en ce qui concerne les conditions initiales. On a maintenant $J_z(0)=0$, $J'_z(0)=\mathrm{Id}(V_z HM)$. On notera $U_z(t)$ la solution de l'équation de Riccati correspondante.

Suivant L. W. Green et P. Eberlein ([8], [3]), nous pouvons alors énoncer la proposition suivante pour les solutions-limites.

PROPOSITION (2.3). — *Soit* L *un lagrangien convexe sans points conjugués de dynamique* X. *Il existe en chaque point z de* HM *deux sous-espaces vectoriels lagrangien* F_z^+ *et* F_z^- *de* $h_X HM \oplus VHM$

(i) $F_z^+ = \lim\limits_{\tau\to-\infty} F_{z,\tau}(0)$, $F_z^- = \lim\limits_{\tau\to+\infty} F_{z,\tau}(0)$;

(ii) *les distributions* $F^+_{\varphi_t(z)}$ *et* $F^-_{\varphi_t(z)}$ *sont transverses à* VHM *et invariantes par le flot* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$, *c'est-à-dire*

$$T\varphi_t(F_z^\pm)=F^\pm_{\varphi_t(z)}$$

(iii) *à ces deux espaces vectoriels sont associés respectivement les opérateurs*

$$J_z^\pm(t): V_z HM \to V_{\varphi_t(z)} HM$$

solutions partout inversibles de l'équation de Jacobi satisfaisant $J_z^\pm(0)=\mathrm{Id}(V_z(HM)$;

(iv) *les distributions* $F^\pm_{\varphi_t(z)}$ *pour* $t\in\mathbb{R}$ *sont les graphes des endomorphismes symétriques* $U_z^\pm(t)$ *de* $V_{\varphi_t(z)}HM$ *donnés par*

$$U_z^\pm(t)=J_z'^\pm(t)\circ J_z^{-1\pm}(t);$$

(v) *de plus* $U_z^\pm(t)$ *sont des solutions de l'équation de Riccati, définis pour tout* $t\in\mathbb{R}$,

$$U_z^{\pm\prime}(t)+U_z^{\pm 2}(t)+\vartheta_X=0.$$

Nous allons donner une preuve de 2.3 qui est très proche de celle de L. W. Green. Nous faisons ceci pour mettre l'accent sur certaines propriétés géométriques que nous utiliserons par la suite.

Démonstration de 2.3. — (i) Donnons le schéma de la démonstration de l'existence de $F_z^\pm$. Celle-ci se fait en trois étapes. On remplace tout d'abord des sous-espaces vectoriels par des graphes d'applications. Grâce à un lemme utilisant un argument de wronskien, on montre que les

applications sont croissantes (leur différence est un opérateur positif). Dans un troisième temps on majore cette suite. On peut résumer formellement ceci par le pincement

$$F_{z,-\varepsilon}(0) > F_{z,\tau}(0) > F_{z,\varepsilon}(0) \qquad \text{pour} \quad \tau > \varepsilon > 0.$$

Étudions F_z^- (la démonstration est identique pour F_z^+). D'après (iii) de 1.3, pour tout $z \in HM$, le sous-espace vectoriel $F_{z,\tau}(0)$ est le graphe de l'application $U_{z,\tau}(0) = J'_{z,\tau}(0)$.

Pour montrer que $\lim\limits_{\tau \to +\infty} = F_{z,\tau}(0) = F_z^-$ existe, il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{\tau \to +\infty} J'_{z,\tau}(0) = J_z'^{-}(0)$ existe ou de manière équivalente, que pour $\varepsilon > 0$ fixé $\lim\limits_{\tau \to +\infty} J'_{z,\tau}(0) - J'_{z,\varepsilon}(0)$ existe.

LEMME. — *Sous les hypothèses de* 2.3 *pour tout point z de* HM, *et pour* $\tau > \varepsilon > 0$

$$J'_{z,\tau}(0) - J'_{z,\varepsilon}(0) = \int_\varepsilon^\tau (J_z^*(u) \circ J_z(u))^{-1}\, du. \tag{14}$$

Preuve du lemme. — Pour cela, remarquons que le wronskien s'écrit pour tout t et $\tau \neq 0$

$$J_z^{*\prime}(t) . J_{z,\tau}(t) - J_z^*(t) J'_{z,\tau}(t) = +\mathrm{Id}\,(V_z\,HM).$$

Comme pour $t \neq 0$, $J_z(t)$ est inversible, cela permet d'exprimer $J_{z,\tau}(t)$ sous la forme

$$J_{z,\tau}(t) = J_z(t) \circ A_\tau(t), \tag{15}$$

et conduit aux relations

$$J'_{z,\tau}(t) = J'_z(t) \circ A_\tau(t) + J_z(t) \circ A'_\tau(t) \tag{15 bis}$$

avec

$$A'_\tau(t) = -(J_z^*(t) \circ J_z(t))^{-1}. \tag{16}$$

Puisque par constructin $A_\tau(\tau) = 0$, on déduit de (16) l'expression

$$A_\tau(t) = -\int_\tau^t (J_z^*(u) \circ J_z(u))^{-1}\, du. \tag{17}$$

Toujours d'après (16) $A'_\tau(t)$ est indépendant de τ et on obtient avec (15 *bis*)

$$J'_{z,\tau}(t) - J'_{z,\varepsilon}(t) = J'_z(t) \circ (A_\tau(t) - A_\varepsilon(t)),$$

soit, en tenant compte de $J'_z(0) = \mathrm{Id}\,(V_z\,HM)$, la relation cherchée.

Suite de la preuve de (i). — On a donc une famille d'opérateurs définis positifs «croissante» en τ. Il nous reste à majorer cette famille. Considérons pour celà l'opérateur $J_{z,-\varepsilon}(t)$.

Remarquons que par construction $J_{z,-\varepsilon}(0)-J_{z,\tau}(0)=0$. Posons $J'_{z,-\varepsilon}(0)-J'_{z,\tau}(0)=B$. Alors, pour tout réel t, on a

$$J_{z,-\varepsilon}(t)=J_{z,\tau}(t)+J_z(t).B.$$

Un nouveau calcul avec les wronskiens pour $(J_{z,-\varepsilon}, J_{z,\tau})$, $(J_{z,\tau}, J_z)$ et $(J_{z,-\varepsilon}, J_z)$ permet de montrer que B est symétrique, Montrons d'autre part que B est défini positif. En faisant $t=\tau$, on obtient

$$B=J_z(\tau)^{-1}J_{z,-\varepsilon}(\tau).$$

L'opérateur donné par

$$B^{-1}(t)=(J_{z,-\varepsilon}(t))^{-1}J_z(t)$$

satisfait à $B^{-1}(0)=0$ et $(B'^{-1})(0)=\mathrm{Id}(V_z HM)$. Il est donc défini positif pour des $t>0$ assez petits, mais, comme il est inversible, ceci est vrai pour tout $t>0$. Pour $\tau<\varepsilon$, nous avons donc obtenu la majoration

$$J'_{z,-\varepsilon}(0)-J'_{z,\varepsilon}(0)=B+\int_\varepsilon^\tau (J_z^*(U)J_z(U))^{-1}\,dU>J'_{z,\tau}(0)-J'_{z,\varepsilon}(0)$$

ce qui achève de prouver l'existence de $\lim_{\tau\to\infty} J'_{z,\tau}(0)$ et par conséquent l'existence de F_z. Remarquons au passage l'existence de l'intégrale $\int_\varepsilon^\infty (J_z^*(u)J_z(u))^{-1}\,du$, que nous réutiliserons ultérieurement.

Étant la limite d'une suite de sous-espaces vectoriels lagrangiens, F_z^- est naturellement lagrangien dans $\tau_X(z)$. Comme F_z^- peut s'écrire comme le graphe de l'application symétrique $\lim_{\tau\to 0} J'_{z,\tau}(0)=\lim_{\tau\to 0} U_{z,\tau}(0)$, il est transverse à $V_z HM$.

(ii) Pour montrer l'invariance de la distribution $F_{\varphi_t(z)}$, il suffit de fixer un t et d'utiliser l'application linéaire $T\varphi_t$

$$\lim_{\tau\to+\infty} T\varphi_t(F_{z,\tau}(0))=T\varphi_t(\lim_{\tau\to+\infty} F_{z,\tau}(0))=T\varphi_t(F_z^-).$$

Grâce aux définitions (i) de 2.2, on obtient

$$F^-_{\varphi_t(z)}=\lim_{\tau\to\infty} F_{\varphi_t(z),\tau}(0)=\lim_{\tau\to\infty} T\varphi_{-\tau}(V_{\varphi_\tau(\varphi_t(z))}HM).$$

Si on pose $\tau_1=\tau+t$,

$$F^-_{\varphi_t(z)}=\lim_{\tau_1\to\infty} T\varphi_{t-\tau_1}(V_{\varphi_{\tau_1}(z)}HM)=\lim_{\tau_1\to+\infty} T\varphi_t(F_{z,\tau_1}(0)).$$

(iii) L'opérateur $J_z^-(t)$ associé à F_z^- est donné par la construction générale, donc $J_z^-(0)=\mathrm{Id}(V_z HM)$. Son inversibilité est assurée par la transversalité de $F^-_{\varphi_t(z)}$ à VHM. En raison de la dépendance continue des solutions de l'équation de Jacobi par rapport aux conditions initiales. nous

avons

$$J_z^-(t) = \lim_{\tau \to \infty} J_{z,\tau}(t)$$
$$J_z'^-(t) = \lim_{\tau \to \infty} J'_{z,\tau}(t).$$

(iv) et (v) sont évidents. Notons cependant que l'application $U_z^-(t)$ est symétrique puisque $F^-_{\varphi_t(z)}$ est lagrangien. □

Comme propriété générale des lagrangiens sans points conjugués on peut encore citer le lemme suivant :

LEMME. — Sous les hypothèses de 2.3, on a, pour tout z de HM

$$U^{\pm}_{\varphi_t(z)}(0) = U^{\pm}_z(t).$$

Preuve. — Appliquons le même raisonnement que pour (iii) de

$$F_{\varphi_t(z),\tau}(0) = T\varphi_{-\tau}(V_{\varphi_{\tau+t}(z)}HM) = (\text{graphe}(U_{\varphi_t(z),\tau}(0)))$$

En posant $\tau_1 = \tau + t$, on obtient

$$F_{\varphi_t(z),\tau}(0) = T\varphi_t(T\varphi_{-\tau_1}(V_{\varphi_{\tau_1}(z)}HM)) = T\varphi_t(F_{z,\tau_1}(0)) = \text{graphe}(U_{z,\tau_1}(t)),$$

soit $U_{\varphi_t(z),\tau}(0) = U_{z,\tau+t}(t)$,
d'où l'égalité cherchée par passage à la limite.

Si on fait sur *l'endomorphisme de Jacobi l'hypothèse supplémentaire* qu'il existe un nombre réel K positif tel que

$$\vartheta_X > -K^2, \text{ pour tout } z \text{ de HM}$$

(qui signifie que, pour tout ξ dans τ_X, $g(\xi, \vartheta_X(\xi)) > -K^2 g(\xi, \xi)$) on obtient comme P. Eberlein et L. W. Green une propriété géométrique importante sur les distributions F^+ et F^-. (Bien que plus générale, la démonstration que nous donnons simplifie quelque peu celle de P. Eberlein).

PROPOSITION 2.4. — *Soit* L *un lagrangien convexe sans points conjugués. S'il existe un nombre réel* $K > 0$, *tel que pour tout z de* HM, $\vartheta_X > -K^2$ *alors, pour tous t et z,*

$$\| U_z^{\pm}(t) \|_\infty \leqq K.$$

Remarque. — Si M est compacte, l'hypothèse est automatiquement vérifiée.

Sous cette hypothèse, pour tout z de HM et tout ξ dans $F_z^{\pm}$, en faisant $t = 0$ dans la formule du (iv) de la proposition 2.3 on voit que

$$\| \Lambda_X(\xi) \| \leqq K \| v_X(\xi) \|.$$

Preuve de 2.4. — Soit z un point de HM et $Y \in V_z HM$ avec $\| Y \| = 1$.

Définissons le long de l'orbite Γ de X passant par z le champ de vecteurs vertical Y_t obtenu par transport γ_X-parallèle de Y, c'est-à-dire $\gamma_X(Y_t) = 0$. Considérons l'expression $g(Y_t, U_z^+(t)(Y_t))$. Elle est définie pour tout t réel,

donc si on choisit un d réel, pour $t_0 > d$ suffisamment proche de d, on a $g(Y_{t_0} . U_z^+ (t_0)(Y_{t_0})) < K \coth(K(t_0 - d))$. Montrons qu'alors, pour tout $t > t_0 > d$, l'inégalité $g(Y_t, U_z^+ (t)(Y_t)) \leqq K \coth(K(t-d))$ est satisfaite. Raisonnons par l'absurde et appelons t_1 l'instant où l'égalité est réalisée pour la première fois. Remarquons que la fonction $f(t) = K \coth(K t - d)$ est solution de l'équation de Ricatti $f'(t) + f^2(t) - K^2 = 0$, que

$$\frac{d}{dt} g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t) = g(Y_t, U_z'^+ (t) Y_t)$$

puisque $\gamma_X(Y_t) = 0$. Comme U^+ est solution d'une équation de Riccati, on a d'après la remarque

$$\frac{d}{dt} g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t) + g(Y_t, U_z^{+2} (t) Y_t) + g(Y_t, \vartheta_X(Y_t)) = 0.$$

Soustrayons les deux équations. On obtient

$$\frac{d}{dt}(g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t) - f(t)) + (g(Y_t, U_z^{+2} (t) Y_t) - f(t)^2) + (g(Y_t, \vartheta_X(Y_t)) + K^2) = 0.$$

D'après les hypothèses, le troisième terme est > 0. A l'instant t_1, $f(t_1) = g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t)$. Utilisant $\|Y_t\|^2 = 1$, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la symétrie de U^+

$$g(Y_t, U_z^{+2} (t) Y_t) = g(U_z^+ (t) Y_t, U_z^+ (t) Y_t) \geqq (g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t))^2.$$

Donc $\frac{d}{dt}(g(Y_t, U_t^+ (t) Y_t) - f(t))_{t_1} < 0$ ce qui est contradictoire. Le choix de d a été arbitraire et donc, pour tout t et tout $d < t$, on a

$$g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t) < K \coth(K(t-d)).$$

Si on prend une suite $d_n \to -\infty$, on obtient

$$g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t) \leqq \lim_{d_n \to -\infty} K \coth(K(t - d_n)) = K.$$

Pour la borne inférieure, choisissons un nombre réel t et supposons qu'il existe $d > t$ tel que $g(Y_t, U_z^+ (t)(Y_t)) < K \coth(K(t-d))$. Avec un raisonnement identique au précédent, on voit que ceci reste vrai pour tout $d > t' > t$ et donc $g(Y_t', U_z^+ (t') Y_t')$ diverge quand $t' \to d$ au moins comme $K \coth(K(t-d))$ ce qui est contradictoire. Donc pour tout $d > t$,

$$g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t) > K \coth(K(t-d)).$$

On conclut en prenant une suite $d_n \to \infty$

$$g(Y_t, U_z^+ (t) Y_t) > \lim_{n \to \infty} K \coth(K(t - d_n)) = -K. \quad \square$$

Après avoir étudié les propriétés géométriques des lagrangiens convexes sans points conjugués, pour faire le lien avec la théorie ergodique il est nécessaire de rappeler quelques résultats de la théorie d'Osseledec [16].

Nous supposerons maintenant que la variété M est compacte sans bord et nous normalisons la mesure diffuse μ_L par $\mu_L(16)=1$.

D'après Osseldec pour un C^1-flot $\varphi : \mathbb{R} \times N \to N$, sur une variété compacte N sans bord, il existe un sous-ensemble Λ de N satisfaisant $\mu^c(\Lambda)=0$ pour toute mesure de probabilité μ invariante par φ et tel que, pour tout z de Λ, il existe une décomposition unique de $T_z N = Z^0(z) \oplus Z^+(z) \oplus Z^-(z)$ vérifiant

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} \log \| T\varphi_t(\xi) \| = 0, && \xi \in Z^0(z); \\ &\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} \log \| T\varphi_t(\xi) \| > 0, && \xi \in Z^+(z); \\ &\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} \log \| T\varphi_t(\xi) \| < 0, && \xi \in Z^-(z); \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

de plus la limite

$$\chi(z) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} \log | \det (T\varphi_t / S) | \tag{21}$$

existe, elle est appelée « *exposant de Liapounov* » et est indépendante de S, pour tous $z \in \Lambda$ et tout sous-espace vectoriel $Z^+(z) \subset S \subset Z^0(z) \oplus Z^+(z)$. D. Ruelle [16] a prouvé que, si μ est une mesure de probabilité invariante par φ, l'entropie métrique $h_\mu(\varphi)$ satisfait

$$h_\mu(\varphi) \leqq \int_N \chi(z)\, d\mu. \tag{22}$$

Si le flot φ est C^2 et si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors d'après Ya. Pesin [Pn]

$$h_\mu(\varphi) = \int_N \chi(z)\, d\mu. \tag{23}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'annoncer la généralisation du Théorème de Freire et Mané [6].

THÉORÈME 2.5. — *Sur une variété compacte* M, *soit* L *un lagrangien convexe, sans points conjugués, de dynamique* X.

(i) *L'exposant de Liapounov* $\chi(z)$ *du flot* $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *de* X *est donné pour presque tout* $z \in HM$ *par*

$$\chi(z) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Tr} U_z^+(t)\, dt;$$

(ii) *Si le flot* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est ergodique, alors l'entropie métrique* $h_{\mu_L}(\varphi)$ *est telle que*

$$h_{\mu_L}(\varphi)=\int_{HM}\operatorname{Tr}(U^+)\,d\mu_L.$$

Ce théorème montre le lien profond qui existe entre les propriétés de mélangeabilité globale du système et les propriétés géométriques locales de la distribution $F^+(z)$. C'est aussi un intéressant pont entre deux disciplines, théorie ergodique abstraite et calcul variationnel. Enfin, du point de vue du physicien, bien que les lagrangiens que l'on considère soient encore très particuliers, le fait qu'on puisse s'affranchir du cadre riemannien fait espérer qu'il s'agira là d'un premier maillon d'une série d'idées nouvelles utilisables dans le cadre des systèmes dynamiques.

Démonstration du Théorème. — Nous allons tout de suite donner un lemme.

LEMME 1. — Sur l'ensemble Λ, les distributions Z^- et VHM sont transverses.

Preuve. — Supposons qu'en un point z de Λ, il existe dans $Z^-(z)\cap V_z HM$ au moins un vecteur Y avec $\|Y\|=1$. Il y a un nombre $0<\lambda<1$ tel que, pour ε choisi, il existe $T\in\mathbb{R}$ avec

$$\|T\varphi_t(Y)\|<\lambda^t,\qquad t>T.$$

Utilisant $\|T\varphi_t(Y)\|\geqq\|v_X(T\varphi_t(Y))\|=\|J_z(t)Y\|$, on obtient pour $t>T$ la relation

$$\lambda^t>\inf_{\substack{\eta\in V_z HM\\ \|\eta\|=1}}\|J_z(t)Y\|$$

soit aussi pour $t>T$

$$\lambda^{2t}>\inf_{\substack{n\in V_z HM\\ \|\eta\|=1}}g(\eta,J_z^*(t)J_z(t)\eta)=\frac{1}{\|(J_z^*(t)J_z(t))^{-1}\|^2}$$

d'où $\|(J_z^*(t)J_z(t))^{-1}\|>\lambda^{-2t}$.

Mais l'opérateur $(J_z^*(t)J_z(t))^{-1}$ étant symétrique, défini positif pour tout $t>0$, on peut écrire pour $t>T$

$$\operatorname{Tr}\int_T^t(J_z^*(u)J_z(u))^{-1}\,du=\int_T^t\operatorname{Tr}(J_z^*(u)J_z(u))^{-1}\,du\geqq\int_T^t\|(J_z^*(u)J_z(u))^{-1}\|\,du.$$

L'inégalité précédemment obtenue est donc contradictoire avec l'existence (*voir* preuve de 1.4) de l'opérateur $\int_T^\infty(J_z^*(u)J_z(u))^{-1}\,du$.

Suite de la preuve. — Les lemmes 2 et 3 qui suivent sont les points clefs de la démonstration. Ils mettent en évidence les relations géométriques liant les distributions Z^+, Z^0, Z aux solutions-limites F^+ et F^-.

LEMME 2. — *Pour presque tout $z \in \Lambda$ on a l'inclusion*

$$F_z^+ \subset Z^0(z) + Z^+(z).$$

La démonstration que nous donnons ici est très proche de celle de Freire et Mañé [6].

Première étape. — Associons à la décomposition invariante

$$T_z HM = Z^-(z) \oplus Z^0(z) \oplus Z^+(z)$$

les projections $\mathrm{Id}(T_z HM) = p_z^- + p_z^0 + p_z^+$. (Elles sont aussi invariantes, c'est-à-dire par exemple $T\varphi_t \circ p^+(z) = p^+(\varphi_t(z)) \circ T\varphi_t$).

Utilisons le lemme 1 pour remarquer qu'il existe $E(z) \subset Z^0(z) \oplus Z^+(z)$ tel que $V_z HM$ est le graphe d'une application $L(z) : E(z) \to Z^-(z)$ suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_z HM \arrow[r, "p_z^-"] \arrow[d, "p_z^0 + p_z^+"'] & Z^-(z) \\
Z^0(z) \oplus Z^+(z) \arrow[ur, "L(z)"'] &
\end{tikzcd}$$

La transversalité implique que $p^0 + p^+$ est injective et donc inversible sur $E(z) = (p^0 + p^+)(V_z HM)$. Nous emploierons par la suite l'espace $F_{z,-\tau}(0)$, $\tau \in \mathbb{R}$ pour lequel on peut former le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V_{\varphi_{-\tau}(z)} HM \arrow[rr, "T\varphi_\tau"] \arrow[dr, "p^-_{\varphi_{-\tau}(z)}"] \arrow[dd, "p^0_{\varphi_{-\tau}(z)} + p^+_{\varphi_{-\tau}(z)}"'] & & F_{z,-\tau}(0) \arrow[dl, "p_z^-"'] \arrow[dd, "p_z^+ + p_z^-"] \\
& Z^-(\varphi_{-\tau}(z)) \arrow[r, "T\varphi_\tau"] & Z^-(z) \\
Z^0_{\varphi_{-\tau}(z)} \oplus Z^+_{\varphi_{-\tau}(z)} \arrow[ur, "L_{\varphi_{-\tau}(z)}"'] & & Z^0_z \oplus Z_z \arrow[ul, "L_\tau(z)"'] \arrow[ll, "T\varphi_{-\tau}"]
\end{tikzcd}$$

et donc

$$F_{z,-\tau}(0) = \text{graphe}\left\{ L_\tau(z) = (T\varphi_\tau / Z^-_{\varphi_{-\tau}(z)}) \circ L_{\varphi_{-\tau}(z)} \circ (T\varphi_{-\tau}/Z^0_z \oplus Z^+_z) \right\}$$

Deuxième étape: Soit $\varepsilon > 0$. Prenons un sous-ensemble compact $K \subset \Lambda$, tel que $\mu_L(K) \geqq 1 - \varepsilon$ vérifiant

(*a*) $\sup \{ \| L(z) \|, z \in K \} < +\infty$

(*b*) il existe T, $T > 0$, et a et b, $0 < a < 1 < b < a^{-1}$, tels que

$$\| T\varphi_t / Z^-(z) \| \leqq a^t$$
$$\| T\varphi_{-t} / Z^+(z) \oplus Z^0(z) \| \leqq b^t$$

pour tout $z \in K$, et $t \geqq T$.

Dans ces conditions, prenons une suite $\tau_n > T$, $\tau_n \to \infty$, $\varphi_{-\tau_n}(z) \in K$; alors

$$\| L_{\tau_n}(z) \| \leqq a^{\tau_n} b^{\tau_n} \| L_{\varphi_{-\tau_n}(z)} \|$$

mais $\| L_{\varphi_{-\tau_n}(z)} \|$ est borné d'où $\lim_{n \to \infty} \| L_{\tau_n}(z) \| = 0$. Ceci prouve $F^+_z = \text{graphe}(0) \subset Z^0_z \oplus Z^+_z$.

Le nombre ε est arbitraire; donc, en prenant une suite croissante K_n de compacts et en posant $\Omega = \bigcup K_n$, on a $\mu_L(\Omega) = 1$. La propriété est donc presque partout vraie sur HM.

LEMME 3. — *Pour tout $z \in \Lambda$, on a l'inclusion*

$$Z^+(z) \subset F^+_z.$$

Preuve. — Considérons la décomposition $T_z HM = F^+_z \oplus F^{+\perp}_z$ (l'orthogonal $\perp$ est pris relativement à g) et la projection associée $p^\perp(z)$. Pour $\eta \in Z^+(z)$, on peut trouver $a > 1$ et $T < 0$ tels que, pour $t < T$, $\| T\varphi_t(\eta) \| < a^t \| \eta \|$. Supposons que $\eta = Z + \xi$ avec $p^\perp(z)\eta = \xi \neq 0$. Grâce à la relation 7 on peut écrire

$$g(\xi, \xi) = g(\xi, T\varphi_t^* \circ (I^X_{\varphi_t(z)}) \circ T\varphi_t \circ (I^X_z)^{-1}(\xi))$$
$$= g(T\varphi_t(\xi), I^X_{\varphi_t(z)} \circ T\varphi_t \circ (I^X_z)^{-1}(\xi)).$$

Or $I^{X-1}_z(\xi) \in F^+_z$, d'où $T\varphi_t((I^X_z)^{-1})(\xi) \in F^+_{\varphi_t(z)}$, donc

$$g(\xi, \xi) = g(p^\perp T\varphi_t(\xi), I^X_{\varphi_t(z)} \circ T\varphi_t \circ (I^X_z)^{-1}(\xi)).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que I^X_z est une structure complexe compatible avec g, on a

$$g(\xi, \xi) \leqq \| p^\perp T\varphi_t(\xi) \| \, \| T\varphi_t((I^X_z)^{-1})(\xi)) \|.$$

Soit, pour $t < T < 0$,

$$\| T\varphi_t(\eta) \| \geqq \| p^\perp T\varphi_t(\eta) \| = \| p^\perp T\varphi_t(\xi) \| \geqq \frac{g(\xi, \xi)}{\| (I^X_z)^{-1}(\xi) \|} a^{-t} = \| \xi \| a^{-t}$$

ce qui est contradictoire.

Pour terminer la preuve du théorème, remarquons que, puisque $T\varphi_t/F_z^+ : F_z^+ \to F_{\varphi_t(z)}^+$, il faut faire attention à la définition du déterminant. Si on considère deux espaces vectoriels W_1, W_2 munis de métriques et un opérateur $\Phi : W_1 \to W_2$ l'objet qui satisfait les propriétés habituelles des déterminants est donné par

$$|\det \Phi| = \sqrt{\det(\Phi^* \Phi)}$$

La transversalité de F_z^+ à $V_z HM$ permet d'écrire

$$T\varphi_t/F_z^+ = ((v_X/F_{\varphi_t(z)}^+)^{-1}) \circ J_z^+(t) \circ v_X/F_z^+$$

soit

$$\det(T\varphi_t/F_z^+) = \det((v_X/F_{\varphi_t(z)}^+)^{-1}) \det(J_z^+(t)) \det(v_X/F_z^+)$$

Par construction, v_X est un opérateur borné. De plus, pour $z \in HM$ et $Y \in V_z HM$, $(v_X/F_z^+)^{-1}(Y) = H_X(Y) + U_z^+(Y)$, donc $(v_X/F_z^+)^{-1}$ est borné.

Par conséquent, pour $t \in \Omega \subset HM$, $\mu_L(\Omega) = 1$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log|\det(T\varphi_t/F_z^+)| = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log|\det(J_{(z)}^+(t)|,$$

mais en raison de l'identité classique

$$\frac{d}{dt} \log|\det(J_z^+(t))| = \operatorname{Tr}(J_z'^+(t) J_z^{+-1}(t)) = \operatorname{Tr} U_z^+(t) = \operatorname{Tr} U_{\varphi_t(z)}^+,$$

d'où

$$x(z) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log(\det(T\varphi_t/F_z^+)) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Tr}(U_{\varphi_\tau(z)}^+) \, d\tau$$

(ii) résulte du théorème ergodique et de la formule de Pesin-Ruelle pour l'entropie.

3. MINORATION DE L'ENTROPIE D'UN SYSTÈME LAGRANGIEN A ENDOMORPHISME DE JACOBI NÉGATIF

Dans cette partie, nous considérons une variété M sur laquelle on suppose donné un lagrangien L positivement homogène de degré 1, convexe sur les fibres, tel que l'*endomorphisme de Jacobi* ϑ_X associé à sa dynamique X est *négatif*. Sous ces hypothèses plus restrictives, nous allons pouvoir amplifier l'analyse précédente. Nous prouverons dans le cas compact que, le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de X est un nouvel exemple de flot d'Anosov. Un tel flot est non seulement sans points conjugués mais il est, d'après Sinai mélangeant. Nous pourrons donc lui appliquer la partie (ii) du théorème 2.5.

Grâce à la formule qu'elle donne pour son entropie métrique, nous étendrons au cas des lagrangiens convexes le théorème de minoration obtenu par R. Osserman et P. Sarnak [13] dans le cas riemannien.

Commençons tout d'abord par la proposition suivante :

3.1. PROPOSITION. — *Sur une variété* M *un lagrangien* L *convexe dont la dynamique* X *est à endomorphisme de Jacobi* $\vartheta_X < 0$, *est sans points conjugués.*

Preuve. — La proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant.

LEMME. — Soit L un lagrangien convexe à $\vartheta_X < 0$, z un point de HM, ξ un vecteur de $\tau_X(z)$. La fonction définie, pour tout réel t, par

$$f_\xi(t) = \| v_X(T\varphi_t(\xi)) \|^2$$

est convexe .

Démonstration du lemme. — Le champ de vecteurs défini le long de l'orbite Γ de X passant par z, par $Y_t = v_X(T\varphi_t(\xi))$ est pour tout réel t solution de l'équation de Jacobi.

A l'aide des identités

$$L_X(g(Y_t, \gamma_X(Y_t))) = \| \gamma_X(Y_t) \|^2 + g(Y_t, \gamma_X \circ \gamma_X(Y_t))$$

et

$L_X(g(Y_t, Y_t)) = 2g(Y_t, \gamma_t(Y_t))$, on obtient en utilisant l'équation de Jacobi $\gamma_X \circ \gamma_X(Y_t) = -\vartheta_X(Y_t)$ la relation

$$\frac{1}{2} L_X^2 \| Y_t \|^2 = \| \gamma_X(Y_t) \|^2 - g(Y_t, \vartheta_X(Y_t)) > 0.$$

Fin de la preuve. — Pour un vecteur vertical $Y \in V_z HM$, $f_Y(0) = 0$ et d'après le lemme, f_Y ne peut s'annuler une deuxième fois.

Écrite dans le cadre du fibré homogène la définition d'un flot d'Anosov devient

3.2. DÉFINITION. — *Soit* $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *un flot complet sur une variété riemannienne* HM *de dimension* $\geqq 3$. *Ce flot est dit d'Anosov si les conditions suivantes sont satisfaites* :

1. *le champ de vecteurs* X *définissant* φ_t *n'est jamais nul*;
2. *quelque soit z dans* HM, $T_z HM$ *se décompose en*

$$T_z HM = \mathbb{R} X \oplus F_z^+ \oplus F_z^-$$

et il existe trois nombres positifs a, b, c tels que

(i) *sur* F_z^- :

$$\| T\varphi_t(\xi) \| \leqq a \| \xi \| e^{-ct}, t \geqq 0; \ \| T\varphi_t(\xi) \| \geqq b \| \xi \| e^{-ct}, t \leqq 0$$

(ii) *sur* F_z^+ :

$$\| T\varphi_t(\xi) \| \leqq a \| \xi \| e^{ct}, t \leqq 0; \ \| T\varphi_t(\xi) \| \geqq b \| \xi \| e^{ct}, t \geqq 0$$

3.3. THÉORÈME. — *Sur une variété* M, *soit* L *un lagrangien positivement homogène de degré un, strictement convexe sur les fibres de* HM *de dynamique* X_L. *Si le flot* $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *associé à* X_L *est complet et s'il existe deux nombres* $K > k > 0$ *tels que*

$$-K^2 < \vartheta_{X_L} < -k^2,$$

alors le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *est un flot d'Anosov.*

Dans le cas où M est compacte, on a le corollaire évident :

3.4. COROLLAIRE. — *Sur une variété compacte* M, *le flot* $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *déterminé sur le fibré homogène* HM *par un lagrangien positivement homogène de degré* 1, *convexe, à endomorphisme de Jacobi négatif est un flot d'Anosov.*

A ce stade l'étude devrait pouvoir être poursuivie pour dégager les contraintes topologiques, liées à l'existence d'un lagrangien convexe à endomorphisme de Jacobi négatif par exemple sur le π_1 de la variété supposée compacte. Il est probable que des résultats assez proches de ceux du cas riemannien apparaissent, mais nous n'abordons pas ce problème ici.

Preuve. — Sous les seules hypothèses d'absence de points conjugués et $\vartheta_X > -K^2$, nous avons déjà obtenu l'estimée $-K < U^{\pm}(z) < K$. Nous allons maintenant utiliser $\vartheta_X < -k^2$ pour obtenir le lemme.

LEMME. — Sous les hypothèses du théorème,

$$K > U^+ > k, \qquad -K < U^- < -k.$$

Démonstration du lemme. — Considérons $z \in HM$; de $J_z(0) = 0$, $J_z'(0) = \mathrm{Id}(V_z HM)$, il résulte que, pour $t_0 > 0$ suffisamment petit, $U_z(t_0) = J_z'(t_0) \circ J_z^{-1}(t_0) > k\,\mathrm{Id}$. Ceci signifie que pour tout vecteur $Y \in V_z HM$, $\| Y \| = 1$ le champ de vecteurs $Y(t)$ obtenu par transport γ_X-parallèle le long de l'orbite Γ de X passant par z satisfait à l'instant t_0 l'inégalité $g(Y(t_0), U_z(t_0)(Y(t_0))) > k$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un temps $t_1 > t_0$ tel que pour la première fois l'inégalité $U_z(t) > k\,\mathrm{Id}$ n'est plus satisfaite. Il existe alors un vecteur $\bar{Y}$ de $V_z HM$ réalisant à l'instant t_1 l'égalité $\langle \bar{Y}(t_1), U_z(t_1)\bar{Y}(t_1) \rangle = k$. De plus $\bar{Y}(t_1)$ réalise à l'instant t_1 la borne inférieure des $g(Y(t_1), U_z(t_1)Y(t_1))$ parmi les vecteurs tels que $\| Y(t_1) \| = 1$. C'est donc en ce point un vecteur propre de $U_z^+(t_1)$ de valeur

propre k. D'après l'équation de Ricatti, on peut écrire pour tout $Y(t)$

$$\frac{d}{dt} g(Y(t), (U_z(t) - k\,\mathrm{Id})\,Y(t)) = -g(Y(t), (\vartheta_X + k^2\,\mathrm{Id})\,Y(t)) - g(Y(t), (U_z^2(t) - k^2\,\mathrm{Id})\,Y(t)).$$

Appliquée à $\bar{Y}$, cette relation nous montre qu'à l'instant t_1

$$\frac{d}{dt} g(\bar{Y}(t), U_z(t) - k\,\mathrm{Id})\,\bar{Y}(t))_{t=t_1} > 0$$

ce qui est contradictoire et donc $U_z(t) > k\,\mathrm{Id}$, $t > 0$. Un raisonnement identique permet d'obtenir $U_z(t) < -k\,\mathrm{Id}$, $t < 0$. Par construction de $U_{z,\tau}(t)$, on obtient de même pour tout $t > \tau$

$$U_{z,\tau}(t) > k\,\mathrm{Id}, \qquad \text{et} \qquad U_{z,\tau}(t) < -k\,\mathrm{Id}.$$

d'où, pour tout t,

$$U_z^+(t) = \lim_{\tau \to -\infty} U_{z,\tau}(t) \geqq k\,\mathrm{Id},$$
$$U_z^-(t) = \lim_{\tau \to +\infty} U_{z,\tau}(t) \leqq -k\,\mathrm{Id}.$$

suite de la preuve.

Considérons $z \in HM$ et $\xi \in F^+(z)$. La distribution $F^+_{\varphi_t(z)}$ étant le graphe de $U^+_{\varphi_t(z)}$, nous avons

$$\gamma_X(v_X T\varphi_t(\xi)) = \Lambda_X(v_X T\varphi_t(\xi)) = U^+_{\varphi_t(z)}(v_X T\varphi_t(\xi)).$$

En utilisant le lemme ceci permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}\|v_X T\varphi_t(\xi)\|^2 = 2g(v_X T\varphi_t(\xi), U^+_{\varphi_t(z)}(v_X T\varphi_t(\xi))) \geqq 2k\|v_X T\varphi_t(\xi)\|^2$$

soit, pour tout t,

$$\frac{d}{dt}\log\|v_X T\varphi_t(\xi)\| \geqq k.$$

Et toujours d'après le lemme, pour tout t,

$$\|T\varphi_t(\xi)\| = (\|v_X T\varphi_t(\xi)\|^2 + \|\Lambda_X(T\varphi_t(\xi)\|^2)^{1/2} \leqq (1+K^2)^{1/2}\|v_X T\varphi_t(\xi)\|.$$

On obtient donc les deux séries d'inégalités : pour $t \geqq 0$, $\xi \in X^+(z)$

$$\|T\varphi_t(\xi)\| \geqq \|v_X T\varphi_t(\xi)\| \geqq \|v_X(\xi)\|e^{kt} \geqq (1+K^2)^{-1/2}\|\xi\|e^{kt}$$

$t \leqq 0$, $\xi \in X^+(z)$

$$(1+K^2)^{1/2}\|\xi\|e^{kt} \geqq (1+K^2)^{1/2}\|v_X(\xi)\|e^{kt} \geqq (1+K^2)^{1/2}\|v_X T\varphi_t(\xi)\| \geqq \|T\varphi_t(\xi)\|$$

Les relations pour F_z^- sont obtenues de la même façon.

Minoration de l'entropie

Les éléments nécessaires à la généralisation du résultat d'Osserman et Sarnak sont maintenant réunis.

THÉORÈME 3.5. — *Sur une variété compacte* M, *soit* L *un lagrangien convexe dont l'équation d'Euler-Lagrange* X *est à endomorphisme de Jacobi* ϑ_X *négatif. L'entropie métrique* $h(\varphi)$ *du flot* $(\varphi_t(_{t\in\mathbb{R}}$ *de* $X\mu_L$ *est telle que*

$$h_{\mu_L}(\varphi)=\int_{HM}\mathrm{Tr}(U^+)\,d\mu_L$$

et on a la minoration

$$h_{\mu_L}(\varphi)\geqq\int_{HM}\mathrm{Tr}((-\vartheta_X)^{1/2})\,d\mu_L$$

avec égalité si et seulement si $L_X\vartheta_X=0$, *c'est-à-dire si l'endomorphisme de Jacobi est invariant par le flot. Les valeurs propres de* ϑ_X *sont alors des constantes et les directions propres sont* γ_X*-parallèles.*

Remarque. — Les espaces munis d'un lagrangien satisfaisant $L_X\vartheta_X=0$, $\vartheta_X<0$ contiennent notamment les variétés riemanniennes compactes localement symétriques [13]. L'existence d'exemples non riemanniens est un problème ouvert.

Preuve. — D'après 3.4, $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot d'Anosov sur HM. Sinaï a prouvé que de tels fots sont très fortement ergodiques. On peut donc appliquer (ii) de 2.5 pour écrire

$$h_{\mu_L}(\varphi)=\int_{HM}\mathrm{Tr}(U^+)\,d\mu_L.$$

La suite de la démonstration est maintenant une simple transcription de la preuve d'Osserman-Sarnak.

Utilisant l'inversibilité globale de U^+ prouvée par la relation $U^+>k\,\mathrm{Id}$ et l'équation de Ricatti, on obtient

$$U^{+\prime}(U^+)^{-1}+U^++\vartheta_X(U^+)^{-1}=0,$$

soit

$$\mathrm{Tr}(U^{+\prime}(U^+)^{-1})+\mathrm{Tr}\,U^++\mathrm{Tr}(\vartheta_X U^{+-1})=0.$$

Mais, en raison de l'invariance de μ_L,

$$\int_{HM}\mathrm{Tr}(U'^+U^{+-1})\,d\mu_L=\int_{HM}L_X(\log|\det U^+|)\,d\mu_L=0,$$

et il vient donc

$$h_{\mu_L}(\varphi)=\int_{HM} \mathrm{Tr}(U^+)\,d\mu_L=-\int_{HM} \mathrm{Tr}(\vartheta_X(U^+)^{-1})\,d\mu.$$

Considérons $(-\vartheta_X)^{1/2}$ l'endomorphisme ayant mêmes directions propres que ϑ_X et dont les valeurs propres sont les $\sqrt{-\vartheta_X^i}$ et munissons les opérateurs symétriques définis positifs du produit scalaire habituel

$$\langle U|V\rangle_1=\int_{HM} \mathrm{Tr}(UV)\,d\mu_L.$$

Il nous reste à écrire l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}\int_{HM} \mathrm{Tr}((-\vartheta_X)^{1/2})\,d\mu_L&=\int_{HM} \mathrm{Tr}((U^+)^{1/2}((-\vartheta_X)^{1/2}(U^+)^{-1/2})\,d\mu_L\\&=\langle(-\vartheta_X)^{1/2}(U^+)^{-1/2},(U^+)^{1/2}\rangle_1\\&\leqq\|(U^+)^{-1/2}(-\vartheta_X)^{1/2}\|_1\,\|(U^+)^{1/2}\|_1\\=\left(\int_{HM} \mathrm{Tr}(-\vartheta_X U^{+-1})\,d\mu_L\right)^{1/2}&\left(\int_{HM} \mathrm{Tr}(U^+)\,d\mu_L\right)^{1/2}=\int_{HM} \mathrm{Tr}(U^+)\,d\mu_L\end{aligned}$$

L'égalité n'a lieu que s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel A positif tel que

$$(-\vartheta_X)^{1/2}(U^+)^{-1/2}=A(U^+)^{1/2}.$$

Mais, d'après ce qui précède, $\int_{HM} \mathrm{Tr}\,U^+\,d\mu_L=\int_{HM} \mathrm{Tr}(-\vartheta_X(U^+)^{-1})\,d\mu_L$ d'où $A=1$ et $-\vartheta_X=U^{+2}$.

En reportant ceci dans l'équation de Riccati, il vient $(U^+)'=0$ et donc $L_X\vartheta_X=[\gamma_X,\vartheta_X]=0$. □

ANNEXE

About Finsler geometry

Variational problem

Let us consider (M,F) where $F:TM\to R$ is a Finsler metric and $\sigma:HM\to M$, the bundle of oriented half-lines $(HM\equiv{}^\circ TM/R^+)$ where $^\circ TM$ is the tangent bundle without zero vectors. The associated variational problem is for given x, y in M to find the critical values among paths: $c:[0,1]\to M$ with $c(0)=x, c(1)=y$ of the functional,

$$I(x,y,c)=\int_{[0,1]} F(c(t),c'(t))\,.\,dt \tag{1}$$

the function F is positively homogenous in degree one along the fibers, then there exists a unique [4] one form A on HM such that;

$$I(x, y, c) = \int_C A$$

Where C is the canonical lifted path of c on HM (obtained by taking in each point the tangent half-line).

From [4] we have.

LEMME 1. — *The corresponding flow* φ_t *on* HM *with generator* $X : HM \to THM$ *must then up to a choice of normalisation satisfy the following equations.*

$$i_X dA = 0; \qquad A(X) = 1. \tag{2}$$

If F is regular, strictly convex among different Fibers, then A is a contact form and X is the associated Reeb field. Let VHM be the vertical bundle over HM. The one form A is semi-basic that is

$$A/VHM = 0 \tag{3}$$

Second order differential equations

The vector field X is a "second order differential equation". Let r be the map that sends each non zero vector into his corresponding half-line and $T\sigma$ the tangent map to the projection σ.

DÉFINITION. — A second order differential equation on M is a vector field X without singularities on HM such that

$$r \circ T\sigma \circ X = \text{Identity of HM}; \tag{4}$$

or equivalently;

the integral curves of X are canonical lifted curves of M.

Remark. — The same construction can be done for the projectivised bundle PTM.

Dynamical approach (see [5]). — At this step, we can construct a dynamical derivative and a Jacobi endomorphism for any C^2, second order differential equation X without making any use of Finsler geometry.

(For instance, X will not be suppose to have an invariant volume form.)

The key Lemma is the following.

LEMME 2. — *Let* $X : HM \to THM$ *be a second order differential equation,* Y_1 *and* Y_2 *two vertical vector fields on* HM. *If in one point* $z \in HM$, *there exist two Reals a, b, such that*

$$a X(z) + Y_1(z) + b[X, Y_2](z) = 0$$

then $b Y_2(z) = 0$ *and* $a = 0$

Furthermore if $Y_2(z)$ is not nul, then $b=0$ and also $Y_1(z)=0$.

A direct application is:

COROLLAIRE 3. — *Let* $X: HM \to THM$ *a second order differential equation. There exists on each fiber of* THM *a "vertical endomorphism"* v_X, *such that for any vertical vector* Y *in* $V_z HM$.

(i) $v_x(X)=0$,

(ii) $v_x([X, Y^*])=-Y$, (5)

(iii) $v_x(Y)=0$,

Y^* *is any* C^1 *vertical extension of* Y.

The horizontal distribution and the pseudo-complex structure (see, [5])

LEMME 4. — *Let* $z \in HM$ *and* Y *in* $V_z HM$, Y^* *a* C^2 *vertical extension of* Y. *The following operator*

$$H_X(Y)=-[X, Y^*]_{(z)}-1/2\, v_X([X,[X, Y^*])_{(z)}; \tag{6}$$

acting on vertical vector fields is an injective 0-*order differential operator maping* $V_z HM$ *into* $T_z HM$.

The distribution,

$$h_X HM = H_X(VHM); \tag{7}$$

is transverse to $RX \oplus VHM$ and will be called The "*orthogonal horizontal*" distribution.

The definition formula (6) may seem rather mysterious, but the second term on the right is from (5) the good correction term to the ordinary Lie derivative. So the first flow variation of the vertical bundle gives rise to the horizontal distribution we will observe that the second will build the Jacobi endomorphism.

Hence the tangent bundle splits as

$$THM = RX \oplus VHM \oplus h_X HM \tag{8}$$

with the corresponding projectors

$$P_X + P_v + P_h = Id. \tag{9}$$

From the definitions one can easily deduce the commutation relations,

$$V_X \circ H_X = Id/VHM, \qquad H_X \circ V_X = Id/h_X HM \tag{10}$$

It is equivalent to say that on the bundle $VHM \oplus h_X HM$ the linear operator I_X defined by

$$\left.\begin{array}{ll} I_X(h)=V_X(h) & \text{for } h \in h_X HM, \\ I_X(Y)=-H_X(Y) & \text{for } Y \in VHM \end{array}\right\} \tag{11}$$

is a pseudo-complex structure.

We can sum up the structure in the following picture,

Dynamical derivative and Jacobi endomorphism

From now: X is the flow generator, Y is a vertical vector field and h is horizontal.

The dynamical derivative γ_X of a second order differential equation is the 1-order differential operator splitting-preserving and defined by the following equations:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_X(Y) = P_V[X, Y] = -1/2\, V_X([X, [X, Y]) \\ \gamma_X(X) = 0 \\ \gamma_X(h) = P_h[X, h], \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

from this we can deduce,

$$[\gamma_X, I_X] = 0. \tag{13}$$

The "Jacobi endomorphism" at a point z in HM is a linear operator θ_X on T_zHM, splitting preserving, commuting with I_X, such that

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \theta_X(X) = 0 \\ &\text{(ii)}\ \theta_X(Y) = P_V[X, H_X(Y)]. \end{aligned} \tag{14}$$

The Jacobi equation

PROPOSITION 5. — Let X a second order differential equation on HM φ_t the corresponding flow, $z \in$ HM, $Z \in T_z$HM, $Z_t = T\varphi_t(Z) = a_t X + h_t + Y_t$. Then the following equations are satisfied

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ L_x a = P_x[X, h] \\ &\text{(ii)}\ \gamma_X(Y) = -\theta x(v_X(h)) \\ &\text{(iii)}\ \gamma_X(h) = H_X(Y) \end{aligned} \tag{15}$$

the equations (ii) and (iii) can be combined into the "Jacobi equation".

$$(\gamma_X \circ \gamma_X + \theta_X)(v_X(h)) = 0 \tag{16}$$

Finsler case

Now we can use the contact form A.

LEMME 6. — *There exists a Riemannian metric g on* HM. *Such that*

(i) the splitting is orthogonal

(ii) $g(X, X) = 1$

(iii) on ker A, $g = dA(I_x, \ )$

(iv) g is γ_X invariant

(v) θ_X is symetric with respect to g.

For a Riemannian metric γ_X is the covariant derivative along the flow and θ_X projects down on the classical Jacobi endomorphism. In the Finsler case one can consider on HM the levy-Civita connection of the metric g. The fibers are totally geodesic in the Riemannian case but not in the general case.

RÉFÉRENCES

[1] D. V. ANOSOV, Geodesic Flows on Closed Riemann Manifolds with Negative Curvature, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. **90**, 1960.

[2] V. I. ARNOLD et A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[3] P. EBERLEIN, When is a Geodesic Flow of Anosov Type. I, *J. Diff. Geometry*, Vol. **8**, 1973, p. 437-463.

[4] P. FOULON, *Contribution à l'étude géométrique des problèmes de la dynamique lagrangienne*, Preprint Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France, octobre 1983.

[5] P. FOULON, Géométrie des équations différentielles du second ordre, *Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, vol. **45**, n° 1, 1986, p. 1-28.

[6] A. FREIRE et R. MANE, On the Entropy of the Geodesic Flow in Manifolds without Conjugate Points, *Invent. Math.*, vol. **69**, 1982, p. 375-392.

[7] C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Herman, 1969.

[8] L. W. GREEN, A theorem of E. Hopf, *Michigan Math. J.*, 5, 1958, p. 31-34.

[9] J. KLEIN, Espaces variationnels et mécaniques, *Annales de l'Institut Fourier*, t. **XII**, 1962, p. 1-124.

[10] J. KLEIN, Geometry of Sprays. Lagrangian Case. Principle of Least Curvature, *Proceedings of the I.U.T.A.M.-I.S.I.M.M. Symposium on Modern developments of Sciences of Turin*, 7/11/982.

[11] P. LIBERMANN, Sur quelques propriétés de géométrie homogène, *Colloque de Balaruc*, 1984, Travaux en cours (Herman).

[12] A. MANNING, Curvature Bounds for the Entropy of the Geodesic Flow on a Surface, *J. Lond. Math. Soc.*, (2), 24, 1981, p. 351-357.

[13] R. OSSERMAN et P. SARNAK, A New Curvature Invariant and Entropy of Geodesic Flows, *Invent. Math.*, vol. **77**, 1984, p. 455-462.

[14] Ya. B. PESIN, Geodesic Flows with Hyperbolic Behaviour of the Trajectories and Objects Connected with them, *Russian Math. Surveys*, vol. **36**, 4, 1981, p. 1-59.

[15] Ya. B. PESIN, Formulae for the entropy of a geodesic flow on a compact Riemannian manifold without conjugate points, *Mat. Zametki*, 24, 1978, 553-570 MR 801: 58059 = *Math. Notes*, 24, 1978, p. 796-805.

[16] D. RUELLE, Ergodic theory of differentiable dynamical systems, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 50, 1979, p. 27-58.

(*Manuscrit reçu le* 12 *septembre* 1990.)