

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A.-M. CHARBONNEL

Comportement semi-classique des systèmes ergodiques

Annales de l'I. H. P., section A, tome 56, n° 2 (1992), p. 187-214

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1992__56_2_187_0

© Gauthier-Villars, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Comportement semi-classique des systèmes ergodiques

par

A.-M. CHARBONNEL

U.R.A.-C.N.R.S. n° 758,

D.M.I. Faculté des Sciences et des Techniques Université de Nantes,
44072 Nantes Cedex 03, France

RÉSUMÉ. — On considère ici ν opérateurs $Q_j(h)$ agissant sur $\mathbb{R}^n$, dépendant d'un petit paramètre h , et commutant deux à deux. On se place en une valeur $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$ fixée de l'énergie, possédant un voisinage compact ne contenant pas de valeur critique du symbole principal joint q_0 des opérateurs, et dont l'image réciproque par q_0 est compacte. Sous l'hypothèse que le flot global Φ^t des hamiltoniens q_0^i , $i=1, \dots, \nu$ est ergodique sur la fibre $q_0^{-1}(\lambda)$, on démontre l'existence d'une famille de fonctions propres $(\psi(h))_{h>0}$, normalisées, communes aux opérateurs $Q_j(h)$, associées à une famille de valeurs propres $(\lambda(h))_{h>0}$, $(\lambda(h) \in \mathbb{R}^\nu)$ telles que $\lambda(h)$ converge vers λ quand h tend vers 0, vérifiant pour tout ouvert D de $\mathbb{R}^n$, le résultat suivant :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\psi(h)\|_{L^2(D)}^2 = \int_{(x, \xi) \in q_0^{-1}(\lambda), x \in D} d\sigma_\lambda.$$

où $d\sigma_\lambda$ désigne la mesure de Liouville sur la fibre $q_0^{-1}(\lambda)$.

Ce résultat de concentration des fonctions propres a été obtenu par Y. Colin de Verdière, A. Schnirelmann et S. Zelditch pour le Laplacien sur une variété Riemannienne compacte, et par B. Helffer, A. Martinez et D. Robert pour un opérateur agissant sur $\mathbb{R}^n$.

ABSTRACT. — We consider here ν operators $Q_j(h)$ acting on $\mathbb{R}^n$, depending on a small parameter h , and commuting together. Let $\lambda \in \mathbb{R}^\nu$ be a fixed value of the energy which has a compact neighbourhood V with no critical value of the joint principal symbol q_0 and such that $q_0^{-1}(V)$ is compact. We assume that the global flow Φ^t of the hamiltonians q_0^i ,

$i=1, \dots, v$ is ergodic on the surface $q_0^{-1}(\lambda)$. Then we prove the existence of a family of normalized eigenvectors $(\psi(h))_{h>0}$, associated with a family of eigenvalues $(\lambda(h))_{h>0}$, $(\lambda(h) \in \mathbb{R}^v)$, such that $\lim_{h \rightarrow 0} \lambda(h) = \lambda$, and satisfying

for all open set D of $\mathbb{R}^n$, the following result:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\psi(h)\|_{L^2(D)}^2 = \int_{(x, \xi) \in q_0^{-1}(\lambda), x \in D} d\sigma_\lambda,$$

where $d\sigma_\lambda$ denotes the Liouville measure on $q_0^{-1}(\lambda)$.

This concentration result for the eigenvectors was obtained by Y. Colin de Verdière, A. Schnirelmann et S. Zelditch for the Laplacian on a Riemannian compact manifold, and by B. Helffer, A. Martinez et D. Robert for one operator acting on $\mathbb{R}^n$.

INTRODUCTION

Considérant le laplacien sur une variété riemannienne compacte, Y. Colin de Verdière [C.V.] a prouvé, à la suite des travaux de A. Schnirelman [Sch] et de S. Zelditch [Ze], un résultat de concentration des fonctions propres, traduisant l'ergodicité du flot géodésique sur la variété. B. Helffer, A. Martinez et D. Robert [He-Ma-Ro] ont démontré un analogue de ce résultat dans le cadre semi-classique, *i.e.* pour les valeurs propres d'un opérateur pseudo-différentiel agissant sur $\mathbb{R}^n$, dépendant d'un petit paramètre h , situées dans une zone d'énergie compacte dans laquelle le flot classique de l'opérateur est ergodique. Nous étudions ici le problème analogue, pour plusieurs opérateurs qui commutent entre eux.

Nous considérons un système de v opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$ ($v \leq n$), dépendant d'un petit paramètre h , proportionnel à la constante de Planck en mécanique quantique (*cf.* [He-Ro] [1]), soit :

$$Q_i(h) = q_i^w(h, x, hD_x), \quad i=1, \dots, v, \quad (0.1)$$

commutant deux à deux ; de manière plus précise, on suppose que leur symbole de Weyl q_i admet un développement asymptotique sous la forme :

$$q_i(h, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} h^j q_j^i(x, \xi). \quad (0.2)$$

$q_0 = (q_0^1, \dots, q_0^v)$ désigne le symbole principal joint. On se place en une valeur $\lambda \in \mathbb{R}^v$ de l'énergie, non valeur critique de q_0 , telle que sur la

variété $\Sigma_\lambda = q_0^{-1}(\lambda)$, supposée compacte, le flot global des hamiltoniens $(q_0^i)_{i=1, \dots, v}$ soit ergodique (cf, par exemple, [Ar-Av]).

Comme conséquence du résultat principal de ce travail, nous prouverons l'existence d'une famille de fonctions propres $(\psi(h))_{h>0}$, communes aux opérateurs $Q_i(h)$, pour $i=1, \dots, v$, normalisées, associées à une famille de valeurs propres $(\lambda(h))_{h>0}$, $\lambda(h) \in \mathbb{R}^v$, telles que $\lambda(h)$ converge vers λ quand h tend vers 0, vérifiant, pour tout ouvert D de $\mathbb{R}^n$, le résultat suivant :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\psi(h)\|_{L^2(D)}^2 = \int_{\substack{(x, \xi) \in \Sigma_\lambda \\ x \in D}} \quad (R)$$

où σ_λ est la mesure de Liouville sur Σ_λ .

Dans sa thèse (cf. [Vo]), A. Voros étudie les propriétés de systèmes ergodiques quantiques, c'est-à-dire de systèmes d'opérateurs dont le flot classique est ergodique, possédant une résolution spectrale régulière, et dont le spectre satisfait en outre à des propriétés de non dégénérescence (cf. [Vo], définition 9.2.1). Dans le cas où v est strictement inférieur à n , l'existence de tels systèmes ne semble pas encore mise en évidence (voir cependant des travaux récents de A. Knauf [Kn]), peut-être parce que la reconnaissance du caractère ergodique d'un système physique n'est pas aisée ; l'étude de leurs propriétés pourrait permettre d'obtenir des critères de comportement ergodique pour un système physique. Par contre, si v est égal à n , le flot global est ergodique dès que le système satisfait aux conditions du théorème de Liouville (systèmes complètement intégrables, dont les surfaces d'énergie sont compactes et connexes), et l'existence des coordonnées action-angles nous permet de démontrer directement (R) pour toute famille de fonctions propres $(\psi(h))_{h>0}$, normalisées, communes aux opérateurs $Q_i(h)$ pour $i=1, \dots, v$, associées à des valeurs propres $\lambda(h)$ convergeant vers λ quand h tend vers 0.

Nous obtenons ce résultat de concentration des fonctions propres à partir de l'estimation d'une expression analogue à la fonction de comptage des valeurs propres dans un compact dépendant de h (voir théorème 1.2).

1. CONTEXTE ET RÉSULTATS

On considère v opérateurs pseudo-différentiels fortement h -admissibles (cf. [He-Ro] [1] et [Cha]), soit $Q_i(h)$, $i=1, \dots, v$, associés à un h -symbole de Weyl

$$q_i : (h, x, \xi) \rightarrow q_i(h, x, \xi) \in C^\infty([0, h_0] \times \mathbb{R}^{2n})$$

de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} Q_i(h) &= \text{op}_h^w q_i \\ \text{i. e. :} \\ Q_i(h) \psi(x) &= (2\pi h)^{-n} \\ &\times \iint e^{ih^{-1}(x-y, \xi)} q_i\left(h, \frac{x+y}{2}, \xi\right) \psi(y) dy d\xi \\ &\text{pour toute fonction } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Les symboles vérifient les hypothèses de h -admissibilité forte, soit :

Le symbole q_i de l'opérateur $Q_i(h)$ admet un développement asymptotique sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} q_i(h, x, \xi) &\sim \sum_{j \geq 0} h^j q_j^i(x, \xi) \quad (1.2) \\ \text{au sens des opérateurs fortement admissibles ; en particulier :} \\ q_0^i &\in S_{\Phi, \varphi}([1 + \sum_{1 \leq i \leq v} (q_0^i)^2]^{1/2}) \quad (1.3) \end{aligned} \right\} \quad (H1)$$

où $S_{\Phi, \varphi}(p)$ est la classe de symboles dont on rappelle la définition :

DÉFINITION 1.1. — *Classe de symboles fortement admissibles.* — Soit $\Phi, \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ des fonctions poids au sens de Beals (cf. [Be]) telles que la métrique associée

$$g_{(x, \xi)}(y, \eta) = \frac{|y|^2}{\varphi^2(x, \xi)} + \frac{|\eta|^2}{\Phi^2(x, \xi)}$$

satisfasse aux hypothèses de Hörmander (cf. [Ho]).

On suppose de plus l'existence de constantes $\delta : 0 < \delta \leq 1$, $C_0 > 0$, $C_1 > 0$, telles que l'on ait :

$$C_0(1 + |x|^2 + |\xi|^2)^\delta \leq \Phi(x, \xi) \varphi(x, \xi) \leq C_1(1 + |x|^2 + |\xi|^2).$$

On se donne aussi une fonction p continue de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^+$, qui soit σ -tempérée au sens de Hörmander pour la métrique g : (cf. [Ho]). Alors on désigne par $S_{\Phi, \varphi}(p)$ la classe des symboles :

$$S_{\Phi, \varphi}(p) = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) ; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2n}, \exists C_{\alpha\beta} > 0 : |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} p \varphi^{-|\alpha|} \Phi^{-|\beta|}, \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

On suppose que les opérateurs commutent deux à deux :

$$[Q_i(h), Q_j(h)] = 0 \quad \text{sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \forall i, j = 1, \dots, v, \quad \forall h > 0. \quad (H2)$$

Par ailleurs, on se place en une valeur λ de l'énergie vérifiant :

$$\lambda \text{ possède un voisinage compact } K_0 \text{ ne contenant pas de valeur critique de } q_0 = (q_0^1, \dots, q_0^v) \text{ et tel que } q_0^{-1}(K_0) \text{ soit compact.} \quad (\Lambda)$$

On suppose que les symboles principaux des opérateurs $Q_i(h)$ sont minorés. On sait dans ce cas que les opérateurs possèdent dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ une réalisation autoadjointe unique, que l'on note encore $Q_i(h)$. Nous avons étudié ce contexte dans [Cha]; nous avons montré que, sous les hypothèses (H1) et (H2), les mesures spectrales de ces réalisations commutent deux à deux; nous avons défini alors dans ce cadre une notion de spectre conjoint, noté $\Lambda^{Q(h)}$, pour les v -opérateurs, et prouvé que la partie de $\Lambda^{Q(h)}$ située dans le compact K_0 est purement discrète, et composée d'une suite de valeurs propres $(\lambda_j(h))_{j \in \mathbb{N}}$, que nous avons localisées, sous certaines hypothèses, au voisinage des points d'un réseau. On note $(\varphi_j(h))_{j \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions propres normalisées associées, communes aux opérateurs $Q_1(h), \dots, Q_v(h)$.

Pour $\mu \in K_0$, on note S_μ la mesure euclidienne sur la fibre $\Sigma_\mu = q_0^{-1}(\mu)$, et σ_μ la mesure de Liouville sur cette même fibre :

$$d\sigma_\mu = \left[\int_{\Sigma_\mu} \frac{dS_\mu}{\|dq_0^1 \wedge \dots \wedge dq_0^v\|} \right]^{-1} \times \frac{dS_\mu}{\|dq_0^1 \wedge \dots \wedge dq_0^v\|}, \quad (1.4)$$

où $\|dq_0^1 \wedge \dots \wedge dq_0^v\|$ est la norme euclidienne dans l'espace des v -formes linéaires alternées sur $\mathbb{R}^{2n}$ du produit extérieur des gradients des hamiltoniens q_0^i .

Soit Φ^t le flot global des hamiltoniens $(q_0^i)_{i=1, \dots, v}$:

$$\Phi^t(x, \xi) = \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_v^{t_v}(x, \xi) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^v, \quad (1.5)$$

où $\Phi_i^{t_i}$ désigne le flot de l'hamiltonien q_0^i , i.e. quand t_i décrit $\mathbb{R}$, $\Phi_i^{t_i}(x, \xi)$ décrit la courbe intégrale du champ hamiltonien $(\partial q_0^i / \partial \xi, -\partial q_0^i / \partial x)$ de point initial (x, ξ) .

On se donne un opérateur $A(h) = Op_h^w a$, associé par la formule (1.1) à un h -symbole de Weyl $a: (x, \xi) \rightarrow a(x, \xi)$, appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et borné ainsi que toutes ses dérivées. On note $S(1)$ la classe des symboles de ce type. On se donne aussi une famille de compacts $(K(h))_{h>0}$ ayant la forme suivante :

$$K(h) = \lambda + K_1 h' + V(h) \quad (\text{HK})$$

où K_1 désigne un compact fixe, d'intérieur non vide, contenant l'origine, r est un réel tel que : $0 < r < 1$, et $V(h)$ un voisinage de l'origine contenu dans une boule de rayon $O(h^{r+r'})$, avec $r' > 0$.

Remarque. — Les compacts $K(h)$ sont centrés au point λ où on fait l'étude, et doivent se contracter sur λ , quand h tend vers 0; il est naturel de choisir des compacts $K(h) - \lambda$ qui soient ou bien des dilatés d'un compact fixe, ou bien des transformés par difféomorphisme de tels compacts.

Par ailleurs, étant donné ce que l'on sait de la localisation du spectre conjoint de tels opérateurs, il aurait été naturel de pouvoir obtenir des

estimations de quantités comme le nombre d'éléments de $\Lambda^{Q(h)}$ situés dans un compact, pour des compacts de « taille » h^v , puisque le réseau auprès duquel se situe le spectre conjoint, au moins sous certaines conditions, a une maille de l'ordre de h . Néanmoins, les calculs faits ici, en particulier la démonstration de la proposition 3.4, utilisent de manière cruciale la condition $r < 1$. Pour démontrer un résultat analogue dans le cas où r est égal à 1, il faudrait raffiner encore les estimations, en utilisant des arguments du même type que ceux de V. Petkov et D. Robert [Pe-Ro]. Pour un seul opérateur, B. Helffer, A. Martinez et D. Robert démontrent, grâce aux résultats de [Pe-Ro], une estimation comme celle du théorème 1.2, pour un compact de taille h . Par contre, les résultats ne sont probablement pas tout à fait les mêmes, pour plusieurs opérateurs, dans le cas $r < 1$ et dans le cas $r = 1$, où il semble qu'un terme supplémentaire vienne perturber le terme principal.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Sous les hypothèses (H1), (H2), (Λ) et (HK), pour tout symbole $a \in S(1)$, on a :*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \langle A(h) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle}{\#(\Lambda^{Q(h)} \cap K(h))} = \int_{\Sigma_\lambda} a d\sigma_\lambda.$$

Grâce à ce théorème, nous prouvons, sous l'hypothèse d'ergodicité, le résultat (R) annoncé dans l'introduction sur la concentration des fonctions propres communes au système d'opérateurs (cf. théorème 2.8, § 2).

Pour démontrer le théorème 1.1, nous allons faire une estimation, pour h tendant vers 0, de la somme $\sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \langle A(h) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle$ avec un reste égal à un $O(h^{-n} \text{vol } K(h))$, que nous obtenons par un calcul direct inspiré de [He-Ro] [2].

Nous démontrons ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Sous les hypothèses (H1), (H2), (Λ) et (HK), pour toute fonction $a \in S(1)$, on a l'estimation suivante :*

$$\sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \langle A(h) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle = (2\pi h)^{-n} \int_{q_0^{-1}(K(h))} a dx d\xi + h^{-n} R(h),$$

avec $R(h) = o_{h \rightarrow 0} [\text{Vol } K(h)]$.

Plus précisément, si K était un compact fixe, on aurait :

$$R(h, K) = O_{h \rightarrow 0}(h), \quad \text{i. e. } |R(h, K)| \leq C_K h, \quad \text{pour } h \leq h_0.$$

Mais la constante C_K n'est pas bornée si K décrit une famille de compacts se contractant sur λ . Sous l'hypothèse (HK), on obtient :

$$|R(h)| \leq Ch^s \text{Vol } K(h),$$

pour tout s tel que $0 < s \leq r'$ et $r + s < 1$.

Le théorème 1.1 est une conséquence directe de ce résultat.

Dans ce paragraphe 2, nous nous plaçons dans le contexte ergodique : nous étudions d'abord le cas des systèmes intégrables où le résultat est une conséquence directe de l'existence des coordonnées action-angles ; puis, dans le cas où v est strictement inférieur à n , nous démontrons le résultat (R) à partir du théorème 1.1. Enfin, dans le dernier paragraphe, nous démontrons le théorème 2, et nous en déduisons le théorème 1.1.

2. LE CONTEXTE ERGODIQUE

On suppose que le système d'opérateurs satisfait à l'hypothèse d'ergodicité (HE) :

Le flot global des hamiltoniens $(q_0^i)_{i=1, \dots, v}$ est ergodique sur Σ_λ , i. e. :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol } B(0, R)} \int_{B(0, R)} a \circ \Phi^t(x, \xi) dt = \int_{\Sigma_\lambda} a d\sigma_\lambda \quad (\text{HE})$$

pour presque tout $(x, \xi) \in \Sigma_\lambda$ (au sens de la mesure σ_λ), et pour tout $a \in C^0(\Sigma_\lambda)$, où $B(0, R)$ désigne la boule de $\mathbb{R}^v$ centrée en 0 et de rayon R .

Remarque. — Lorsque l'on a un contexte de plusieurs opérateurs qui commutent, le flot de chacun d'eux ne peut pas être ergodique, puisqu'il existe alors des fonctions, non constantes presque partout, qui sont constantes sur ses trajectoires. Pour la même raison, le flot global d'un certain nombre d'hamiltoniens ne peut pas être ergodique si on a oublié un hamiltonien en involution avec eux. Il est donc nécessaire de considérer le flot global du nombre maximal d'hamiltoniens indépendants en involution.

Suivant que le nombre des opérateurs considérés est strictement inférieur ou bien égal à la dimension de l'espace, l'hypothèse d'ergodicité a des conséquences différentes.

PROPOSITION 2.1. — (i) *Sous l'hypothèse (HE), pour presque tout $(x, \xi) \in \Sigma_\lambda$ (au sens de la mesure σ_λ), la trajectoire du flot global issue de (x, ξ) est partout dense dans la fibre.*

(ii) *Sous l'hypothèse (HE), si v est strictement inférieur à n , l'ensemble des points de la fibre d'où part une trajectoire périodique est de mesure σ_λ nulle.*

Démonstration. — (i) En effet, soit $(x, \xi) \in \Sigma_\lambda$ tel que l'on ait l'égalité de (HE).

Supposons l'existence d'un point $(y, \eta) \in \Sigma_\lambda$ possédant un voisinage W dans Σ_λ ne rencontrant pas la trajectoire du flot global passant par (x, ξ) . On peut alors construire une boule non vide V contenue dans W , et une fonction a continue, positive, égale à 1 sur V et à support dans W . On aurait alors :

$$\int_{B(0, R)} a \circ \Phi^t(x, \xi) dt = 0, \quad \forall R \quad (2.1)$$

$$\int_{\Sigma_\lambda} a d\sigma_\lambda \geq \sigma_\lambda(V) > 0, \quad (2.2)$$

ce qui est impossible.

(ii) Si v est strictement inférieur à n , alors une trajectoire périodique ne peut pas être dense dans la fibre, puisque l'on a :

$$\dim \{ \Phi^t(x, \xi) \}_{t \in B(0, R)} = v \quad (2.3)$$

ce qui implique :

$$\text{codim} \{ \Phi^t(x, \xi) \}_{t \in B(0, R)} = 2n - v, \quad (2.4)$$

alors que la codimension de la fibre est égale à v .

Sous l'hypothèse (HE), l'ensemble des points de la fibre d'où part une trajectoire périodique est donc de mesure nulle. ■

PROPOSITION 2.2. — *Si v est égal à n , l'hypothèse (HE) est vérifiée dès que le système d'opérateurs $(Q_1(h), \dots, Q_v(h))$ satisfait aux hypothèses du théorème de Liouville, i.e. si c'est un système intégrable à fibres compactes et connexes, tel que le déterminant des périodes soit non nul.*

Démonstration. — Dans le contexte du théorème de Liouville, on peut définir l'action I du système au voisinage de Σ_λ . Alors le système d'opérateurs $[P_j = I_j(Q_1, \dots, Q_v)]_{j=1, \dots, v}$ a un flot global $\tilde{\Phi}$ périodique, de période égale à $(2\pi, \dots, 2\pi)$.

($t \in \mathbb{R}^v \rightarrow \tilde{\Phi}^t$ désigne le flot global des hamiltoniens $p_0^i = I_i(q_0)$ pour $i = 1, \dots, v$.)

Si le déterminant $\left| \frac{\partial I_i}{\partial q_0^j} \right|_{i, j=1, \dots, v}$ est non nul au voisinage de la fibre Σ_λ , alors on peut utiliser les coordonnées action-angles, et on obtient :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} a \circ \tilde{\Phi}^t(x, \xi) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_n} a d\varphi_1 \dots d\varphi_n, \quad (2.5)$$

où $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ désignent les angles et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ un système de cycles de base du tore auquel la fibre est difféomorphe ; on peut d'ailleurs choisir comme cycles de base les trajectoires des nouveaux hamiltoniens

$(p_0^i)_{i=1, \dots, n}$. De plus la mesure $(2\pi)^n d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n$ coïncide avec la mesure de Liouville sur la fibre, puisqu'elles sont obtenues toutes les deux en normalisant la mesure quotient de $dx \wedge d\xi$ par $dp_0^1 \wedge \dots \wedge dp_0^n$. (2.5) devient alors :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} a \circ \tilde{\Phi}^t(x, \xi) dt = \int_{\Sigma_\lambda} a d\tilde{\sigma}_\lambda \quad (2.6)$$

où $\tilde{\sigma}_\lambda$ désigne la mesure de Liouville sur la fibre $\Sigma_\lambda = p_0^{-1}[I(\lambda)]$, qui coïncide avec σ_λ .

On en déduit alors aisément de (2.6) l'égalité de (HE) pour tout $(x, \xi) \in \Sigma_\lambda$ ■

Nous allons maintenant démontrer le résultat annoncé dans l'introduction

Tout d'abord nous allons faire une réduction au cas où le symbole a est à support compact au voisinage de la surface d'énergie λ :

LEMME 2.3. — Soit $\psi(h)$ une fonction propre commune aux opérateurs $(Q_i(h))_{i=1, \dots, v}$, normalisée, associée à la vapeur propre $\lambda(h)$ telle que $\lambda(h)$ converge vers λ quand h tend vers 0.

Alors, pour tout symbole $a \in S(1)$ tel que $\text{supp } a \cap q_0^{-1}(\lambda) = \emptyset$, on a :

$$\langle \text{op}_h^w a \psi(h), \psi(h) \rangle = O(h).$$

Preuve. — Soit

$$b_h(x, \xi) = a \times \left[\sum_{i=1}^v [q_0^i(x, \xi) - \lambda^i(h)]^2 \right]^{-1}.$$

$\sum_{i=1}^v [q_0^i(x, \xi) - \lambda^i(h)]^2$ est minorée par une constante strictement positive pour h suffisamment petit, quand (x, ξ) décrit le support de a .

Alors $\text{op}_h^w b_h$ définit un opérateur pseudo-différentiel fonction de $Q_1(h), \dots, Q_v(h)$, d'après le calcul fonctionnel h -admissible établi dans [Cha].

On a en particulier

$$\left\| \text{op}_h^w a - \text{op}_h^w b_h \circ \sum_{i=1}^v (Q_i(h) - \lambda^i(h))^2 \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2)} = O(h),$$

ce qui démontre le lemme puisque l'on a évidemment

$$\sum_{i=1, \dots, v} [Q_i(h) - \lambda^i(h)]^2 \varphi(h) = 0. \quad \blacksquare$$

En itérant la construction précédente, on démontre en fait que $\langle \text{op}_h^w a \psi(h), \psi(h) \rangle$ est un $O(h^\infty)$.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser un argument de type Egorov que l'on déduit facilement par itération du cas d'un seul opérateur (cf. [Ro]) :

PROPOSITION 2.4. — *Pour tout $a \in S(1)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^v$, on a :*

$$\| e^{ih^{-1}t \cdot Q(h)} \text{op}_h^w a e^{-ih^{-1}t \cdot Q(h)} - \text{op}_h^w a \circ \Phi^t \|_{\mathcal{L}(L^2)} = O(h),$$

$h \rightarrow 0$

avec le 0 uniforme sur tout borné par rapport à t et où $e^{ih^{-1}t \cdot Q_v(h)}$ désigne l'opérateur $e^{ih^{-1}t_1 \cdot Q_1(h)} \circ \dots \circ e^{ih^{-1}t_v \cdot Q_v(h)}$, et Φ^t le flot global $\Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_v^{t_v}$.

Pour démontrer le résultat annoncé dans l'introduction, la démarche est différente suivant que l'on est dans le cas $v < n$ ou dans le cas $v = n$. Nous allons commencer par étudier le cas $v = n$, pour lequel nous allons nous placer dans le contexte du théorème de Liouville. Le résultat (R) en est alors une conséquence directe :

Premier cas : $v = n$

Si le système d'opérateurs est intégrable, à fibres compactes et connexes, et s'il possède des coordonnées action-angles, l'hypothèse (HE) est satisfaite. On se place dans ce contexte, et on démontre le résultat annoncé (R) pour toute famille de fonctions propres normalisées communes aux opérateurs $(Q_i(h))_{i=1, \dots, n}$, associées à une famille de valeurs propres convergeant vers λ quand h tend vers 0 :

THÉORÈME 2.5. — *Si $v = n$, sous les hypothèses (H1) (H2) et (Λ), et si le système d'opérateurs satisfait aux conditions du théorème de Liouville, alors, pour toute famille $(\varphi(h))_{h>0}$ de fonctions propres normalisées, communes aux opérateurs $(Q_i(h))_{i=1, \dots, n}$, associées à des valeurs propres $(\lambda(h))$ telles que la famille $\lambda(h)$ converge vers λ quand h tend vers 0, on a, pour tout symbole $a \in S(1)$:*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \langle \text{op}_h^w a \varphi(h), \varphi(h) \rangle = \int_{\Sigma_\lambda} a d\sigma_\lambda.$$

Démonstration. — Dans le contexte du théorème de Liouville, on note I une fonction appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, coïncidant avec l'action dans un voisinage de λ . Alors la relation $P_j = I_j(Q_1, \dots, Q_n)$, pour $j = 1, \dots, n$, définit un opérateur pseudo-différentiel h -admissible. On note $p_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n)$ les nouveaux hamiltoniens, $\tilde{\Phi}^t$ leur flot global, dont on sait que les trajectoires sont périodiques de période $(2\pi, \dots, 2\pi)$.

Alors, en notant $e^{ih^{-1}t \cdot P(h)}$ le composé des opérateurs $e^{ih^{-1}t_j \cdot P_j(h)}$ pour $j = 1, \dots, n$, et en utilisant la proposition 2.4, on peut écrire, pour toute fonction propre $\varphi(h)$ normalisée, commune aux opérateurs

$(Q_i(h))_{i=1, \dots, n} :$

$$\begin{aligned} \langle \text{op}_h^w a \varphi(h), \varphi(h) \rangle &= \langle e^{ih^{-1}t \cdot P(h)} \text{op}_h^w a e^{-ih^{-1}t \cdot P(h)} \varphi(h), \varphi(h) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \text{op}_h^w (a \circ \tilde{\Phi}^t) dt \varphi(h), \varphi(h) \right\rangle + O(h) \\ &= \langle B(h) \varphi(h), \varphi(h) \rangle + O(h), \quad (2.7) \end{aligned}$$

où $B(h)$ désigne l'opérateur

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \text{op}_h^w (a \circ \tilde{\Phi}^t) dt_1 \dots dt_n.$$

D'après le lemme 2.3, on peut toujours supposer a à support compact au voisinage de Σ_λ . On a alors :

$$B(h) = \text{op}_h^w \left[\int_{\Sigma_\mu} a d\tilde{\sigma}_\mu \right] \quad (2.8)$$

où $\mu = p_0(x, \xi)$ [cf. (2.6)].

Alors (2.7) peut s'écrire, si $\tilde{a}(x, \xi)$ désigne le symbole $\int_{\Sigma_\mu} a d\tilde{\sigma}_\mu$.

$$\langle \text{op}_h^w a \varphi(h), \varphi(h) \rangle = \langle \tilde{a}(P) \varphi(h), \varphi(h) \rangle + O(h), \quad (2.9)$$

car $\tilde{a}(P)$ a pour symbole principal $\tilde{a}(p_0)$. Mais $\tilde{a}(P) \varphi(h) = a(I(\lambda)) \varphi(h)$, et on a donc :

$$\langle \text{op}_h^w a \varphi(h), \varphi(h) \rangle = \tilde{a}[I(\lambda(h))] + O(h). \quad (2.10)$$

Le second membre de (2.10) converge vers

$$\tilde{a}[I(\lambda)] = \int_{q_0^{-1}(\lambda)} a d\sigma_\lambda$$

quand h tend vers 0, ce qui donne le résultat. ■

Remarque. — Comme le suggère le rapporteur, on peut aussi démontrer le théorème ci-dessus, et même le préciser, par une méthode BKW :

En effet, on sait, cf. [Cha], que la partie du spectre conjoint des opérateurs $P_j = I_j(Q_1, \dots, Q_n)$ qui se trouve dans l'image par l'action I du compact K_0 , se situe près des points du réseau $\{\gamma + (\tau + \alpha/4)h\}_{\tau \in \mathbb{Z}^n}$, où $\gamma = (\gamma_j)_{j=1, \dots, n}$, γ_j étant l'opposé de la moyenne, sur une trajectoire du flot hamiltonien de $p_0^j = I_j(q_1, \dots, q_n)$, du lagrangien de cet hamiltonien, et $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, et que, « près » de chaque point du réseau appartenant à $I(K_0)$, se trouve un élément et un seul de ce spectre conjoint.

De plus, pour tout triplet $(\mu, \tau, h) \in K_0 \times \mathbb{Z}^n \times]0, h_0]$ satisfaisant aux conditions de quantification

$$I(\mu) = \gamma + (\tau + \alpha)h \quad (*)$$

on peut construire (cf. [Fe-Ma]), sous les hypothèses du théorème de Liouville, des quasi-modes ${}^\circ\psi_{(\mu, \tau, h)}$ normalisés dans $\mathcal{L}^2$, approchant les fonctions propres communes, au sens où il existe une vraie fonction propre et une seule, commune aux opérateurs $(Q_j)_{j=1, \dots, n}$, soit $\psi_{(\mu, \tau, h)}$, vérifiant :

$$\| {}^\circ\psi_{(\mu, \tau, h)} - \psi_{(\mu, \tau, h)} \|_{\mathcal{L}^2} = O(h^\infty)$$

où le O est uniforme par rapport à (μ, τ, h) vérifiant (*).

On peut alors retrouver le résultat du théorème 2.5, et même un résultat plus précis à savoir un développement asymptotique de $\langle \text{op}_h^w a \varphi(h), \varphi(h) \rangle$ au lieu de la limite seule, en développant $\langle \text{op}_h^w a {}^\circ\psi_{(\mu, \tau, h)}, {}^\circ\psi_{(\mu, \tau, h)} \rangle$ par la méthode de la phase stationnaire (cf. [Du]).

Deuxième cas : $v < n$

Interprétation du résultat

Les résultats de [He-Ma-Ro] permettent d'interpréter le résultat du théorème 1.1 comme une convergence au sens des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^{2n}$:

On note μ_j^h la mesure de probabilité définie de la façon suivante :

$$\int a d\mu_j^h = \langle \text{op}_h^w a \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle, \quad (2.11)$$

où $\text{op}_h^w a$ désigne l'opérateur de h -symbole anti-wick égal à a . $\text{op}_h^w a$ vérifie les propriétés suivantes :

LEMME 2.6 (cf. par exemple [He-Ma-Ro]). — (1) La h -quantification anti-wick respecte la positivité :

$$a \geq 0 \Rightarrow \text{op}_h^w a \geq 0$$

(2) Pour tout symbole $a \in S(1)$, on a :

$$\| \text{op}_h^w a - \text{op}_h^w a \|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2)} = O(h) \quad h \rightarrow 0$$

Le résultat du théorème 1.1 peut s'énoncer alors de la façon suivante :

PROPOSITION 2.7. — Sous les hypothèses (H1), (H2), (A) et (HK) on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j \in S(K, h)} d\mu_j^h}{\# S(K, h)} = d\sigma_\lambda \quad (2.12)$$

au sens de la convergence vague des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^{2n}$, où $S(K, h)$ désigne l'ensemble des indices j tels que $\lambda_j \in \Lambda^Q \cap K(h)$.

Nous obtenons alors, sur la concentration des valeurs propres, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.8. — *Supposons $v < n$.*

Alors, sous les hypothèses (H1), (H2), (Λ), (HK) et (HE), il existe un ensemble d'indices $M(h) \subset S(K, h)$ tel que :

$$(1) \frac{\# M(h)}{\# S(K, h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1;$$

(2) *Pour tout $a \in S(1)$ et pour toute application*

$$j : h \in]0, h_1] \rightarrow j(h) \in M(h),$$

on a :

$$\langle \text{op}_h^w a \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\lambda} a d\sigma_\lambda,$$

la convergence étant uniforme par rapport à l'application j .

(3) *Si Π est la projection : $(x, \xi) \in T^* \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(x, \xi) = x \in \mathbb{R}^n$, on a, pour tout ouvert D de $\mathbb{R}^n$:*

$$\| \varphi_{j(h)}(h) \|_{L^2(D)}^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sigma_\lambda[\Pi^{-1}(D)],$$

pour toute application $j : h \in]0, h_1] \rightarrow j(h) \in M(h)$.

Démonstration du théorème 2.8

Point (3). Le résultat de concentration (3) découle facilement des points (1) et (2) :

Grâce au lemme 2.3, on peut supposer D relativement compact.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, identique à 1 sur D , telle que

$$\left| \int_{\Sigma_\lambda} (\chi \circ \Pi) d\sigma_\lambda - \sigma_\lambda[\Pi^{-1}(D)] \right| < \varepsilon/2. \quad (2.13)$$

avec

$$\left| \| \varphi_{j(h)}(h) \|_{L^2(D)}^2 - \langle \chi \varphi_{j(h)}(h), \varphi_{j(h)}(h) \rangle \right| < \varepsilon/2 \quad (2.14)$$

pour h suffisamment petit, et pour toute application j à valeurs dans $S(K, h)$.

L'application du point (2) au symbole $a(x, \xi) = \chi(x)$ donne alors :

$$\left| \| \varphi_{j(h)}(h) \|_{L^2(D)}^2 - \sigma_\lambda[\Pi^{-1}(D)] \right| < \varepsilon \quad (2.15)$$

pour h suffisamment petit. ■

Démonstration des points (1) et (2)

On utilise le résultat du théorème 1.1.

En suivant la démarche de [He-Ma-Ro], on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 2.10. — *Sous les hypothèses (H1), (H2), (A), (HE), et si v est strictement inférieure à n , on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall a \in S(1), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\# \left\{ j \in S(K, h); \left| \int a d\mu_j^h - \int a d\sigma_\lambda \right| < \varepsilon \right\}}{\# S(K, h)} = 1$$

Démonstration. — On reprend celle de [He-Ma-Ro], à ceci près qu'on utilise le flot global des hamiltoniens $q_0^1, \dots, q_0^v$.

On introduit la fonction F_R égale à :

$$F_R(x, \xi) = \frac{1}{\text{Vol } B(0, R)} \int_{B(0, R)} a \circ \Phi^t(x, \xi) dt, \quad (2.16)$$

où Φ^t désigne le flot global des hamiltoniens $q_0^1, \dots, q_0^v$. On a alors :

$$\left| \int a d\mu_j^h - \int a d\sigma_\lambda \right| \leq \left| \int (a - F_R) d\mu_j^h \right| + \left| \int F_R - \int a d\sigma_\lambda \right| d\mu_j^h \quad (2.17)$$

Le premier terme est égal à :

$$\begin{aligned} b_{j,R}^h &= \int a d\mu_j^h - \int \left[\frac{1}{\text{Vol } B(0, R)} \int_{B(0, R)} a \circ \Phi^t dt \right] d\mu_j^h \\ &= \langle \text{op}_h^{Aw} a \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\text{Vol } B(0, R)} \int_{B(0, R)} \langle \text{op}_h^{Aw} a \circ \Phi^t \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle dt \end{aligned}$$

Mais on peut écrire $\langle \text{op}_h^{Aw} a \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle e^{ih^{-1}t \cdot Q(h)} \text{op}_h^{Aw} a e^{-ih^{-1}t \cdot Q(h)} \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle &= \frac{1}{\text{Vol } B(0, R)} \\ &\times \int_{B(0, R)} \langle e^{ih^{-1}t \cdot Q(h)} \text{op}_h^{Aw} a e^{-ih^{-1}t \cdot Q(h)} \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle dt, \end{aligned} \quad (2.18)$$

ce qui, d'après la proposition 2.4, permet d'avoir :

$$\left. \begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \forall R, \quad \exists h_{R,\varepsilon}: \quad \forall h: 0 < h < h_{R,\varepsilon}, \\ \forall j \in S(K, h): |b_{j,R}^h| < \varepsilon/2. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Soit alors $T(K, h, \varepsilon)$ l'ensemble des indices j pour lesquels on a :

$$\left| \int a d\mu_j^h - \int a d\sigma_\lambda \right| < \varepsilon.$$

$\#T(K, h, \varepsilon)$ vérifie :

$$\frac{\#T(K, h, \varepsilon)}{\#S(K, h)} \geq \frac{1}{\#S(K, h)} \times \# \{j \in S(K, h); |C_{j, R}^h| < \varepsilon/2\}, \quad (2.20)$$

où $C_{j, R}^h$ désigne le second terme de (2.17).

Notons

$$\Omega(R, \varepsilon) = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}; \left| F_R(x, \xi) - \int a d\sigma_\lambda \right| < \varepsilon/4 \right\}.$$

On a :

$$\sigma_\lambda[\Omega(R, \varepsilon)] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1. \quad (2.21)$$

En effet, si on choisit une suite croissante de nombres positifs, soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et si on note A_n l'ensemble suivant :

$$A_n = \bigcap_{\{R > S_n\}} \Omega(R, \varepsilon), \quad (2.22)$$

on forme ainsi une suite croissante d'ensembles pour lesquels on a :

$$\sigma_\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_\lambda(A_n). \quad (2.23)$$

Par ailleurs, l'ergodicité du flot global sur Σ_λ prouve l'existence d'une partie $B \subset \Sigma_\lambda$ vérifiant (2.24) et (2.25) :

$$\sigma_\lambda(B) = 0 \quad (2.24)$$

$$\Sigma_\lambda \setminus B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \quad (2.25)$$

On a donc $\sigma_\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$, ce qui conduit à (2.21).

Nous pouvons alors écrire :

$$\left. \begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists h_{\delta, \varepsilon}, \quad \exists R_{\delta, \varepsilon}, \\ &\forall R \text{ fixé} > R_{\delta, \varepsilon}, \quad \forall h : 0 < h < h_{\delta, \varepsilon} : \\ &\frac{\sum_{j \in S(K, h)} \mu_j^h(\Omega(R, \varepsilon))}{\#S(K, h)} \geq 1 - \delta. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

En effet, pour tous $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $R > 0$, on construit une fonction continue $a_{R, \varepsilon}^\delta$ vérifiant :

$$\left. \begin{aligned} &\left| \sum_{j \in S(K, h)} \left[\int a_{R, \varepsilon}^\delta d\mu_j^h - \mu_j^h(\Omega(R, \varepsilon)) \right] \times \frac{1}{\#S(K, h)} \right| < \delta/4 \\ &\text{et} \\ &\left| \int a_{R, \varepsilon}^\delta d\sigma_\lambda - \sigma_\lambda(\Omega(R, \varepsilon)) \right| < \delta/4. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Par ailleurs, d'après (2.21), on a :

$$\exists R_{\delta, \varepsilon} > 0 : \quad \sigma_\lambda(\Omega(R, \varepsilon)) \geq 1 - \delta/4, \quad \forall R \geq R_{\delta, \varepsilon}. \quad (2.28)$$

et l'estimation du théorème 1.1 permet d'écrire :

$$\left. \begin{array}{c} \exists h_{\delta, \varepsilon} : \quad \forall h \, 0 < h < h_{\delta, \varepsilon} \\ \left| \frac{1}{\# S(K, h)} \sum_{j \in S(K, h)} \int a_{R, \varepsilon}^\delta d\mu_j^h - \int a_{R, \varepsilon}^\delta d\sigma_\lambda \right| < \delta/4 \end{array} \right\} \quad (2.29)$$

pour R fixé $\geq R_{\delta, \varepsilon}$.

On a ainsi (2.26).

Soit $S^\delta = \{j \in S(K, h); \mu_j^h(\mathbb{R}^{2n} \setminus \Omega(R, \varepsilon)) < \sqrt{\delta}\}$. S^δ vérifie :

$$\# S^\delta \geq (1 - \sqrt{\delta}) [\# S(K, h)]. \quad (2.30)$$

En effet, on peut écrire :

$$\sum_{j \in S(K, h)} \mu_j^h(\Omega(R, \varepsilon)) = \sum_{j \in S^\delta} + \sum_{j \notin S^\delta}, \quad (2.31)$$

et on a donc :

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \# S(K, h) &\leq \sum_{j \in S(K, h)} \mu_j^h(\Omega(R, \varepsilon)) \\ &\leq (\# S^\delta) + (1 - \sqrt{\delta}) [\# S(K, h) - \# S^\delta], \end{aligned} \quad (2.32)$$

ce qui donne (2.30).

Mais, pour $j \in S^\delta$, on a :

$$\begin{aligned} c_{j, R}^h &= \int \left| \frac{1}{B(0, R)} \int_{B(0, R)} a \circ \Phi^t dt - \int a d\sigma_\lambda \right| d\mu_j^h \\ &= \int_\Omega + \int_{\mathbb{R}^{2n} \setminus \Omega} \leq \varepsilon/4 + 2\sqrt{\delta} \|a\|_\infty \end{aligned} \quad (2.33)$$

Choisissons alors δ tel que $\sqrt{\delta} < \frac{\varepsilon}{8\|a\|_\infty}$. On a :

$$\# T(K, h, \varepsilon) \geq \# \{j, c_{j, R}^h < \varepsilon/2\} \# S^\delta \geq (1 - \sqrt{\delta}) \# S(K, h).$$

On en déduit, pour R convenablement choisi $\geq R_{\delta, \varepsilon}$, que l'on a :

$$\frac{\# T(K, h, \varepsilon)}{\# S(K, h)} \geq 1 - \sqrt{\delta}.$$

La proposition 2.10 est ainsi démontrée. ■

Le travail fait dans [He-Ma-Ro], sans aucune modification, permet de construire, pour a donné dans $S(1)$, un ensemble d'indices $M(h)$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

$$\frac{\# M(h)}{\# S(K, h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

$$\langle \text{op}_h^w a \varphi_{j(h)}(h), \varphi_{j(h)}(h) \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\lambda} a d\sigma_\lambda \quad (2.37)$$

pour toute application $j : h \rightarrow j(h) \in M(h)$, puis de construire un ensemble d'indices $M(h)$ convenant pour tout symbole $a \in S(1)$.

On obtient ainsi le théorème 2.8. ■

3. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1.1 ET 1.2

(i) *Démonstration du théorème 1.2* : On se place sous les hypothèses du théorème 1.2, et on cherche à estimer

$$\mathcal{A}(h) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \langle A(h) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle.$$

On commence par ramener l'estimation de cette quantité à celle d'une expression du même genre avec un opérateur pseudo-différentiel dont le h -symbole de Weyl est minoré par un nombre strictement positif, et qui peut alors s'écrire, modulo $O(h)$, comme le carré d'un opérateur pseudo-différentiel.

LEMME 3.1 (Réduction). — *On peut ramener la quantité à estimer $\mathcal{A}(h)$ à celle d'une expression du type :*

$$\mathcal{C}(h) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \|C(h) \varphi_j(h)\|^2,$$

où $C(h)$ est un opérateur pseudo-différentiel h -admissible : $C(h) = \text{op}_h^w c$, dont le symbole c appartient à la classe $S(1)$, et est minoré sur $\mathbb{R}^{2n}$ par une constante C_0 strictement positive.

Preuve. — $a \in S(1)$ est minoré par une constante a_0 . Choisissons δ_0 tel que $a_0 + \delta_0$ soit strictement positif. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \langle A(h) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle \\ &= \sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \langle (A(h) + \delta_0 I) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle - \delta_0 N_K(h). \end{aligned} \quad (3.1)$$

$B(h) = A(h) + \delta_0 I$ vérifie la condition requise, et $N_K(h)$ est de la même forme avec un symbole égal à 1, donc vérifiant les bonnes conditions.

On écrit alors $a + \delta_0 = c^2$, où on choisit $c(x, \xi) \geq \sqrt{a_0 + \delta_0}$ pour tout (x, ξ) . $C(h) = \text{op}_h^w c$ est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et $B(h)$ s'écrit :

$$B(h) = [C(h)]^2 + h D(h). \quad (3.2)$$

Quitte à restreindre, par une troncature, le support de c à un voisinage d'un compact fixe contenant tous les $K(h)$, on peut supposer que $D(h)$ est lui aussi borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, avec une norme majorée indépendamment de h .

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \langle B(h) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle \\ = \sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 + R_1(h), \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec $|R_1(h)|$ majorée par un terme de la forme $D_0 h N_K(h)$, où D_0 est une constante.

Étude de l'expression

$$\sum_{\lambda_j \in \Lambda^{Q(h)} \cap K(h)} \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 = \mathcal{C}(h).$$

On utilise la démarche de [He-Ro] [2] qui est basée sur une estimation fine de l'expression :

$$S(h) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_h(\lambda_j) \|C(h) \varphi_j(h)\|^2, \quad (3.4)$$

où $\chi_h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est égale à 1 sur $K(h)$, et a son support dans un voisinage $U(h)$ de $K(h)$ que l'on choisit de la forme :

$$U(h) = \lambda + K_1 h^r + B(0, \varepsilon_0 h^{r+s}), \quad (3.5)$$

où $B(0, T)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon T , et où s vérifie : $s \leq r'$ et $r+s < 1$.

La différence entre $S(h)$ et $\mathcal{C}(h)$ est donnée par le lemme suivant :

LEMME 3.2 :

$$R_K(h) = |\mathcal{C}(h) - S(h)| \text{ vérifie : } \frac{h^n R_K(h)}{\text{vol } K(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$$

Plus précisément $R_K(h)$ satisfait à la majoration :

$$|R_K(h)| \leq C_0 h^{-n} h^s \text{Vol } K(h),$$

où C_0 est une constante strictement positive.

Pour démontrer le lemme, et également pour estimer $S(h)$, on introduit des fonctions ρ et θ possédant les propriétés suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^v), \quad \rho \text{ paire}, \quad \text{supp } \rho \subset B(0, \varepsilon), \\ \text{et pour tout } \varepsilon > 0 \text{ on a :} \\ \exists \varepsilon_1 > 0: \quad \rho(t) = 1, \quad \forall t: |t| \leq \varepsilon_1. \\ \exists \varepsilon_2 > 0, \quad \exists \delta_0 > 0: \quad \theta(\tau) = (2\pi)^{-v} \hat{\rho}(-\tau) \geq \delta_0, \\ \forall \tau: \quad |\tau| \leq \varepsilon_2 \\ \theta \text{ positive sur } \mathbb{R}^v \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

On désigne par θ_h la fonction égale à :

$$\theta_h(\tau) = \left(\frac{1}{h}\right)^v \theta\left(\frac{\tau}{h}\right), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^v. \quad (3.7)$$

Toute cette partie s'appuie sur la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3. — Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^v)$, $0 \leq f \leq 1$, égale à 1 sur un borné U_0 contenant les supports des fonctions χ_h pour $h \leq h_0$, et ne contenant aucune valeur critique de q_0 [cf. (A)]. On a l'estimation suivante :

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} f(\lambda_j) \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 \theta_h(\lambda_j - \tau) = \sum_{j=0}^N I_j(\tau) h^{-n+j} + 0 \quad (h^{-n+N+1})$$

où le 0 est borné uniformément par rapport à τ quand τ décrit un borné.

De plus

$$I_0(\tau) = (2\pi)^{-n} \int_{q_0^{-1}(\tau)} \frac{c^2 dS_\tau}{\|dq_0^1 \wedge \dots \wedge dq_0^v\|}, \quad \text{pour tout } \tau \text{ dans } U_0.$$

Démonstration. — Notons $I_\tau(h)$ l'expression à estimer, soit :

$$I_\tau(h) = \sum_{j \in \mathbb{N}} f(\lambda_j) \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 \theta_h(\lambda_j - \tau).$$

$I(h)$ est égal :

$$I_\tau(h) = (2\pi h)^{-v} \int e^{ih^{-1}t \cdot \tau} \text{Tr}[C(h)^2 f(Q(h)) e^{-ih^{-1}t \cdot Q(h)}] \rho(t) dt,$$

où $\text{Tr}[C(h)^2 f(Q(h)) e^{-ih^{-1}t \cdot Q(h)}]$ est la trace, au sens des distributions sur $\mathbb{R}^v$, de l'opérateur $C(h)^2 f(Q(h)) e^{-ih^{-1}t \cdot Q(h)}$. On peut encore écrire :

$$I_\tau(h) = (2\pi h)^{-v} \text{Tr} \int e^{ih^{-1}t \cdot \tau} C(h)^2 f(Q(h)) e^{-ih^{-1}t \cdot Q(h)} \rho(t) dt.$$

On approche l'opérateur $f(Q(h)) e^{-ih^{-1}t \cdot Q(h)}$ par un opérateur intégral de Fourier dont l'amplitude est à support compact, de sorte que sa trace est l'intégrale du noyau sur la diagonale. L'étude du comportement de cette intégrale quand h tend vers 0 est alors tout à fait identique à celle

qui a été faite dans [Cha] pour obtenir l'expression des multiplicités des éléments du spectre conjoint. Elle se fait en utilisant le théorème de la phase stationnaire; l'étude de la variété critique montre que t est nécessairement une période du flot global des hamiltoniens q_0^i pour $i = 1, \dots, v$. On choisit alors le support de ρ de façon à ce qu'il ne contienne comme période que $t = 0$. On obtient alors :

$$I_\tau(h) = (2\pi)^{-n} h^{-n} \left[\int_{q_0^{-1}(\tau)} c^2 / \|dq_0^1 \wedge \dots \wedge dq_0^v\| dS_\tau + \sum_{j \geq 1} h^j g_j(\tau) \right] \pmod{O(h^\infty)},$$

où les fonctions g_j sont bornées sur tout compact, et le 0 est uniforme par rapport à τ dans U_0 .

De cette proposition découlent, pour l'estimation de $S(h)$, les résultats suivants : f étant une fonction comme dans la proposition 3.3, on note N_h la mesure égale à :

$$N_h = \sum_{j \in \mathbb{N}} \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 f(\lambda_j) \delta_{\lambda_j}. \quad (3.8)$$

Si $\tilde{\chi}_h$ désigne la fonction $x \rightarrow \chi_h(-x)$, on peut écrire $S(h)$ sous la forme :

$$S(h) = (\tilde{\chi}_h * N_h)(0). \quad (3.9)$$

[on rappelle que χ_h est la fonction définie en (3.4)].

PROPOSITION 3.4. — Avec les notations précédentes, on obtient les estimations :

- (i) $S(h) - [\theta_h * (\tilde{\chi}_h * N_h)](0) = O(h^\infty)$,
- (ii) $[\theta_h * (\tilde{\chi}_h * N_h)](0) = \sum_{j=0} A_j^h h^{-n+j} + R_N(h) h^{-n+N+1}$,

où $A_j^h = (I_j * \tilde{\chi}_h)(0)$, et où $R_N(h)$ est majoré indépendamment de h pour $h \leq h_0$, h_0 suffisamment petit, et est de la forme :

$$R_N(h) = \int \tilde{R}_N(h, \tau) \tilde{\chi}_h(\tau) d\tau,$$

si $\tilde{R}_N(h, \tau)$ est le reste dans la proposition 3.3.

Nous allons commencer par démontrer le lemme 3.2, puis la proposition 3.4, et nous en déduirons le théorème 1.2.

Démonstration du lemme 3.2. — Il découle du lemme suivant :

LEMME 3.5. — Pour tout borné U_0 contenant $K(h)$ pour tout $h \leq h_0$, pour tout $\tau \in U_0$, et pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^v)$, telle que $0 \leq f \leq 1$, on a

l'estimation suivante :

$$\sum_{\substack{\lambda_j \in \Lambda^Q(h) \\ \|\lambda_j - \tau\| \leq h}} \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 f(\lambda_j) = 0 \quad (h^{-n+v}).$$

où le 0 est uniforme par rapport à τ dans U_0 .

Démonstration du lemme 3.5. — Les propriétés des fonctions θ permettent d'écrire, pour tout τ :

$$\sum_{\substack{\lambda_j \in \Lambda^Q(h) \\ \|\lambda_j - \tau\| \leq \varepsilon_2 h}} \|C \varphi_j(h)\|^2 f(\lambda_j) \leq \frac{1}{\delta_0} \sum_{\substack{\lambda_j \in \Lambda^Q(h) \\ \|\lambda_j - \tau\| \leq \varepsilon_2 h}} \|C \varphi_j(h)\|^2 f(\lambda_j) \theta\left(\frac{(\lambda_j - \tau)}{h}\right).$$

Recouvrons la boule de centre τ et de rayon h par un nombre fini $N(\varepsilon_2)$ de boules de rayon $\varepsilon_2 h$. On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda_j \in \Lambda^Q(h) \\ \|\lambda_j - \tau\| \leq h}} \|C \varphi_j(h)\|^2 f(\lambda_j) \\ \leq \frac{1}{\delta_0} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon_2)} \sum_{\|\lambda_j - \tau_i\| \leq \varepsilon_2 h} \|C \varphi_j(h)\|^2 f(\lambda_j) \theta\left(\frac{(\lambda_j - \tau_i)}{h}\right) \end{aligned}$$

On estime alors le second membre en utilisant la proposition 3.3, ce qui donne

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} f(\lambda_j) \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 \theta\left(\frac{(\lambda_j - \tau)}{h}\right) = I(\tau) h^{-n+v} + O(h^{-n+v+1}).$$

avec un O uniforme par rapport à τ dans U_0 . La somme se majore par $C h^{-n+v}$, et on obtient ainsi le lemme 3.5. ■

Revenons alors au lemme 3.2 :

On recouvre $U(h) \setminus K(h)$ par un nombre $N(h)$ de boules de rayon h . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} R_K(h) = |\mathcal{C}(h) - S(h)| &\leq \left\{ \sum_{\lambda_j \in \Lambda^Q(h) \cap [U(h) \setminus K(h)]} \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 \right. \\ &\leq \sum_{i=1, \dots, N(h)} \sum_{\lambda_j \in \Lambda^Q(h) \cap B(\tau_i, h)} \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 \left. \right\} \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$R_K(h) \leq N(h) \times C h^{-n+v} \quad (\text{où } C \text{ est indépendant de } \tau \in U_0).$$

Par ailleurs, on peut trouver un recouvrement de $U(h) \setminus K(h)$ vérifiant la condition suivante : il existe $C_0 > 0$ tel que l'on ait :

$$N(h) \leq C_0 h^{v(r-1)} h^s. \quad (3.11)$$

En effet, l'union des boules de rayon h recouvre une bande débordant de $(U(h) \setminus K(h))$ d'un volume au plus égal à $C h^{r(v-1)} h$, où C est une

constante. On en déduit la majoration (3.11), car on a :

$$N(h) h^v \leq \tilde{C} h^{r(v-1)} h^{r+s}.$$

(3.10) et (3.11) donnent sur $R_K(h)$, la majoration :

$$R_K(h) \leq C_0 h^{-n} h^{rv+s} \quad \text{avec } C_0 > 0, \quad (3.12)$$

qui fournit bien, puisque le volume de $K(h)$ est supérieur à $C_1 h^{rv}$, le résultat du lemme 3.2. ■

Démonstration de la proposition 3.4. — Soit μ un paramètre indépendant de h ; on considère la famille de compacts $K(\mu)$, et les données qui lui sont associées $S(\mu)$ et $U(\mu)$ en (3.4) et (3.5), dans lesquelles on remplace h par μ . Soit alors $S_\mu(h) = (\tilde{\chi}_\mu * N_h)(0)$. Nous allons estimer, quand h tend vers 0, le comportement du produit de convolution $(\tilde{\chi}_\mu * N_h)(m)$, où m décrit un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^v$.

Estimation de $[\theta_h * (\tilde{\chi}_\mu * N_h)](m)$

Comme toutes les convolutions ont un sens, on peut écrire :

$$[\theta_h * (\tilde{\chi}_\mu * N_h)](m) = [\tilde{\chi}_\mu * (\theta_h * N_h)](m). \quad (3.14)$$

La proposition 3.3 donne l'estimation de $(\theta_h * N_h)(\tau)$:

$$(\theta_h * N_h)(\tau) = \sum_{j=0}^N I_j(\tau) h^{-n+j} + R_N(\tau, h) (h^{-n+N+1}), \quad (3.15)$$

d'où l'on déduit :

$$[\tilde{\chi}_\mu * (\theta_h * N_h)](m) = h^{-n} \left[\sum_{j=0}^N (I_j * \tilde{\chi}_\mu)(m) h^j + h^{N+1} (R_N * \tilde{\chi}_\mu)(m) \right] \quad (3.16)$$

et on a :

$$|(R_N(h) * \tilde{\chi}_\mu)(m)| \leq C_0, \quad \forall \mu \leq \mu_0, \quad \forall h \leq h_0. \quad (3.17)$$

En effet :

$$(R_N(h) * \tilde{\chi}_\mu)(m) = \int R_N(h, \tau - m) \tilde{\chi}_\mu(\tau) d\tau$$

$\tilde{\chi}_\mu$ est majorée par 1 et à support dans U_0 , et $R_N(h, \tau, -m)$ est borné car τ décrit $V + U_0$ où V est le voisinage de 0 décrit par m .

Pour $[\theta_h(\chi_\mu * N_h)](m)$, on a un développement asymptotique modulo $O(h^\infty)$, dont les coefficients sont égaux à $(I_j * \chi_\mu)(m)$. ■

Estimation de $(\theta_h \star \tilde{\chi}_\mu)(m) - [\theta_h \star (\tilde{\chi}_\mu \star N_h)](m)$

Posons $M_h = (\tilde{\chi}_\mu \star N_h)$. On a alors, en notant $\Delta(m)$ la quantité à estimer :

$$\Delta(m) = \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^\nu \int \hat{\rho} \left(-\frac{\tau}{h} \right) [M_h(m) - M_h(m - \tau)] d\tau. \quad (3.18)$$

Si on pose $\tau = \sigma h$, il vient :

$$\Delta(m) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int \hat{\rho}(-\sigma) (M_h(m) - M_h(m - \sigma h)) d\sigma. \quad (3.19)$$

Mais on a :

$$M_h(m) - M_h(m - \sigma h) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int [e^{imt} - e^{i(m-h\sigma)t}] \hat{M}(t) dt$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Delta(m) &= \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}} \iint \hat{\rho}(-\sigma) [e^{imt} - e^{i(m-h\sigma)t}] \hat{M}(t) dt d\sigma \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int e^{imt} \left[\frac{1}{(2\pi)^\nu} \int \hat{\rho}(-\sigma) (1 - e^{-ih\sigma t}) d\sigma \right] \hat{M}(t) dt. \end{aligned}$$

L'expression entre crochets vaut $\rho(0) - \rho(ht) = 1 - \rho(ht)$. On obtient alors :

$$\Delta(m) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int e^{imt} (1 - \rho(ht)) \hat{M}(t) dt. \quad (3.20)$$

Après changement de variable :

$$\Delta(m) = \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^\nu \int e^{imt h^{-1}} \hat{M} \left(\frac{t}{h} \right) (1 - \rho(t)) dt.$$

$\hat{M} \left(\frac{t}{h} \right)$ est égal à $\mathcal{F} \left(\tilde{\chi}_\mu \star N_h \left(\frac{t}{h} \right) \right)$:

$$\hat{M} \left(\frac{t}{h} \right) = \tilde{\chi}_\mu \left(-\frac{t}{h} \right) \sum_{j \in \mathbb{N}} f(\lambda_j) \|C(h) \varphi_j(h)\|^2 e^{-i\lambda_j(t/h)}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \Delta(m) &= \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^\nu \int e^{im \cdot (t/h)} \hat{\chi}_\mu \left(-\frac{t}{h} \right) \\ &\quad \sum_{j \in \mathbb{N}} f(\lambda_j) \|C \varphi_j\|^2 e^{-i\lambda_j(t/h)} (1 - \rho(t)) dt \quad (3.21) \end{aligned}$$

Or $\hat{\chi}_\mu$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^v)$. On va pouvoir estimer $\frac{t^\alpha}{h^{|\alpha|}} \hat{\chi}_\mu \left(-\frac{t}{h} \right)$ et en déduire une estimation de $\Delta(m)$ en fonction de h et de μ :

$$\begin{aligned} \frac{t^\alpha}{h^{|\alpha|}} \hat{\chi}_\mu \left(-\frac{t}{h} \right) &= \frac{t^\alpha}{h^{|\alpha|}} \int e^{i(t/h) \cdot \xi} \chi_\mu(\xi) d\xi \\ &= \int (e^{i(t/h) \cdot \xi})^{(\alpha)} (-i)^{|\alpha|} \chi_\mu(\xi) d\xi \\ &= i^{|\alpha|} \int e^{i(t/h) \cdot \xi} \chi_\mu^{(\alpha)}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Chaque dérivation de χ_μ fait perdre $\mu^{-(r+s)}$. On en déduit alors :

$$\left| \frac{t^\alpha}{h^{|\alpha|}} \hat{\chi}_\mu \left(-\frac{t}{h} \right) \right| \leq C_\alpha \text{vol } U_0 \mu^{-|\alpha|(r+s)}, \quad (3.22)$$

où C_α est une constante positive. Ce qui donne :

$$\left| \left(1 + \frac{|t|^2}{h^2} \right)^N \hat{\chi}_\mu \left(-\frac{t}{h} \right) \right| \leq C_N (\text{vol } U_0) \mu^{-2N(r+s)}. \quad (3.23)$$

Utilisons l'estimation (3.17) dans (3.15). Nous obtenons alors, puisque $1 - \rho(t)$ est identiquement nul dans la boule de centre O et de rayon ε_1 , la majoration :

$$\begin{aligned} |\Delta(m)| &\leq \frac{1}{(2\pi h)^v} \left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{h^2} \right)^{-N} \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^v} \left(1 + \frac{|t|^2}{h^2} \right)^N \left| \hat{\chi}_\mu \left(-\frac{t}{h} \right) \right| |1 - \rho(t)| dt \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} f(\lambda_j) \|C \varphi_j\|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

soit :

$$\begin{aligned} |\Delta(m)| &= \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^v h^{2N} \varepsilon_1^{-2N} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} f(\lambda_j) \|C \varphi_j\|^2 \right) \int_{\mathbb{R}^v} \left(1 + \frac{|t|^2}{h^2} \right)^{-v} (1 - \rho(t)) dt \\ &\quad \times C_N (\text{vol } U_0) \mu^{-2(N+v)(r+s)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comme f est à support dans un compact fixe, une estimation grossière de la quantité $\sum_{j \in \mathbb{N}} f(\lambda_j) \|C \varphi_j(h)\|^2$ montre qu'elle est égale à un $O(h^{-n})$.

Par ailleurs $\left(1 + \frac{|t|^2}{h^2} \right)^{-v} (1 - \rho(t))$ est intégrable sur $\mathbb{R}^v$, et l'intégrale est majorée par $C_v h^{2v}$, car $1 - \rho(t)$ est à support dans le complémentaire de

la boule centrée en O et de rayon ε_1 . On en déduit finalement :

$$|\Delta(m)| \leq C_N \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^v h^{2N+2v} \varepsilon_1^{-2N} h^{-n} \text{vol } U_0 \mu^{-(2N+2v)(r+s)} \quad (3.26)$$

pour tout m dans un voisinage de O .

On obtient alors pour $\Delta(0)$ l'estimation suivante :

$$|\Delta(0)| \leq C_N(\varepsilon_1) h^{2N+v} h^{-n} \mu^{-2(N+v)(r+s)}, \quad \forall \mu \leq \mu_0, \quad \forall h \leq h_0. \quad (3.27)$$

Les constantes étant uniformes par rapport à μ dans $]0, \mu_0]$, on peut donner à μ la valeur h , et il vient :

$$|\Delta(0)| \leq C_N(\varepsilon_1) h^{-n} h^{(2N+v)-(2N+2v)(r+s)}. \quad (3.28)$$

On obtient donc :

$$\forall N_0, \quad \exists C_{N_0} : \quad |h^n \Delta(0)| \leq C_{N_0} h^{N_0(1-(r+s))} h^{-v(r+s)}. \quad (3.29)$$

Il suffit en effet de choisir N tel que $2N+v \geq N_0$. On a alors :

$$\frac{|h^n \Delta(0)|}{\text{vol } K(h)} \leq \tilde{C}_{N_0} h^{N_0(1-(r+s))} h^{-v(r+s)} h^{-rv},$$

car $\text{vol } K(h) \geq C h^{rv}$.

Il suffit alors de choisir $N_0 > \frac{v(2r+s)}{1-(r+s)}$ pour prouver que la différence

$\Delta(m)$ contribue au reste. C'est même un $O(h^\infty)$.

La proposition 3.4 est ainsi démontrée. ■

Fin de la démonstration du théorème 1.2

Le théorème 1.2 découle de la proposition 3.4 :

Il s'agit de calculer le premier terme et de démontrer que le reste s'écrit sous la forme $h^{-n} o_{h \rightarrow 0}[\text{vol } K(h)]$.

Calcul du premier terme

Il vient de $A_0^h h^{-n} = h^{-n} (I_0 \star \tilde{\chi}_h)(0)$:

$$A_0^h h^{-n} = (2\pi)^{-n} h^{-n} \int \left[\int_{q_0^{-1}(\tau)} a \frac{dS \tau}{\|dq_0^1 \wedge \dots \wedge dq_0^n\|} \right] \chi_h(\tau) d\tau. \quad (3.30)$$

Comme χ_h est égale à 1 sur $K(h)$, on obtient :

$$\begin{aligned} A_0^h h^{-n} &= (2\pi h)^{-n} \int_{q_0^{-1}(K(h))} a dx d\xi \\ &\quad + (2\pi h)^{-n} \int_{q_0^{-1}(U(h) \setminus K(h))} (\chi_h \circ q_0) \cdot a dx d\xi. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Le premier terme de cette somme est égal au terme principal de l'estimation du théorème 1.2. Montrons que le deuxième contribue au reste :

χ_h est majoré par 1, a est borné, et q_0 n'a pas de valeur critique dans $K(h)$; on obtient donc, pour l'intégrale qui figure dans le second terme, la majoration suivante

$$\int_{q_0^{-1}[U(h) \setminus K(h)]} (\chi_h \circ q_0) a \, dx \, d\xi \leq M \operatorname{vol}[U(h) \setminus K(h)]$$

On sait alors que $\operatorname{vol}[U(h) \setminus K(h)] = o(\operatorname{vol} K(h))$. En effet :

$$\frac{\operatorname{vol}[U(h) \setminus K(h)]}{\operatorname{vol} K(h)} \leq C \frac{h^{(v-1)r} h^{r+s}}{h^{rv}} \leq C h^s.$$

Estimation du reste

$$\begin{aligned} R_0(h) h^{-n+1} &= \left[\int \chi_h(\tau) \tilde{R}_0(h, \tau) \, d\tau \right] h^{-n+1} \\ &= \left[\int_{K(h)} \tilde{R}_0(h, \tau) \, d\tau + \int_{U(h) \setminus K(h)} \chi_h(\tau) \cdot \tilde{R}_0(h, \tau) \, d\tau \right] h^{-n+1}. \end{aligned}$$

L'expression entre crochets est majorée par $C \operatorname{vol} K(h)$, où C est une constante positive, et $R_0(h) h^{-n+1}$ est bien égal à $h^{-n} o(\operatorname{vol} K(h))$. ■

(ii) *Démonstration du théorème 1.1 à partir du théorème 1.2.* — Soit $S(K, h)$ l'ensemble des indices $j \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_j \in \Lambda^Q \cap K$. Le théorème 1.2 donne :

$$\sum_{j \in S(K, h)} \langle A(h) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle = (2\pi h)^{-n} \int_{q_0^{-1}(K)} a \, dx \, d\xi + h^{-n} r_a(K, h) \quad (3.32)$$

où $r_a(K, h)$ vérifie :

$$\frac{r_a(K, h)}{\operatorname{vol} K} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

On a le même résultat pour $\#(\Lambda^Q \cap K)$ qui correspond à $a = 1$.

On en déduit alors :

$$\frac{\sum_{j \in S(K, h)} \langle A(h) \varphi_j(h), \varphi_j(h) \rangle}{\#(\Lambda^Q \cap K)} = \frac{(2\pi)^{-n} \int_{q_0^{-1}(K)} a \, dx \, d\xi + r_a(K, h)}{(2\pi)^{-n} \int_{q_0^{-1}(K)} dx \, d\xi + r_1(K, h)} \quad (3.33)$$

Si on divise haut et bas par le volume de K , on obtient comme limite du quotient :

$$\int_{q_0^{-1}(\lambda)} a d\sigma_\lambda.$$

En effet, d'après l'estimation des deux restes, le quotient converge vers le quotient des limites des termes principaux. Par ailleurs, comme q_0 n'a pas de valeur critique dans K , on a :

$$\frac{1}{\text{Vol } K(h)} \int_{q_0^{-1}(K(h))} a dx d\xi \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{q_0^{-1}(\lambda)} \frac{a dS_\lambda}{\|dq_0^1 \wedge \dots \wedge dq_0^v\|} \quad (3.34)$$

où S_λ est la mesure euclidienne sur $q_0^{-1}(\lambda)$. ■

RÉFÉRENCES

- [Ar] V. ARNOLD, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique*, Éditions MIR, Moscou, 1974.
- [Ar-Av] V. ARNOLD et A. AVEZ, *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [As-Fu] F. ASADA et D. FUJIWARA, On Some Oscillatory Integral Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$, *Jap. J. Math.*, vol. **4**, 1978, p. 299-361.
- [Be] R. BEALS, A General Calculus of Pseudodifferential Operators, *Duke Math. J.*, vol. **42**, 1975, p. 1-42.
- [Cha] A. M. CHARBONNEL, Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent, *Asymptotic Analysis*, vol. **1**, 1988, p. 227-261.
- [C.V.] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Ergodicité et fonctions propres du laplacien, Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer, 1984-1985, n° XIII, *Comm. Math. Phys.*, vol. **102**, 1985, p. 497-502.
- [Du] J.-J. DUISTERMAAT, Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities, *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. **27**, 1974, p. 207-281.
- [Fe-Ma] M. V. FEDORIUK et V. P. MASLOV, *Semi-classical Approximation in Quantum Mechanics*, Reidel, Dordrecht, 1981.
- [He-Ma-Ro] B. HELFFER, A. MARTINEZ et D. ROBERT, Ergodicité et limite semi-classique, *Comm. Math. Phys.*, vol. **109**, 1987, p. 313-326.
- [He-Ro] [1] B. HELFFER et D. ROBERT, Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et opérateurs admissibles, *J. Funct. Anal.*, Vol. **53**, 1983, p. 246-268.
- [He-Ro] [2] B. HELFFER et D. ROBERT, Riesz Means of Bound States and Semi-classical limit connected with a Lieb-Thirring's conjecture, *Asymptotic Anal.*, vol. **3**, 1990.
- [Ho] L. HORMANDER, The Weyl Calculus of Pseudodifferential Operators, *C.P.A.M.*, 1979, vol. **32**, p. 359-443.
- [Kn] A. KNAUF, Ergodic and Topological Properties of Coulombic Periodic Potentials, *Comm. Math. Phys.*, Vol. **110**, 1987, p. 89-112.
- [Pe-Ro] V. PETKOV et D. ROBERT, Asymptotique semi-classique du spectre d'hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques, *Comm. Partial Differ. Equations*, vol. **10**, 1985, p. 365-390.

- [Ro] D. ROBERT, *Autour de l'approximation semi-classique*, Birkhauser, Boston, 1987.
- [Sch] A. SCHNIRELMAN, Ergodic properties of eigenfunctions, *Usp. Math. Nauk*, vol. **29**, 1974, p. 181-182.
- [Vo] A. VOROS, *Développements semi-classiques*, Thèse, Orsay, 1977.
- [Ze] S. ZELDITCH, Selberg trace formulae, pseudos and equidistribution theorems for closed geodesics and Laplace eigenfunctions, *Pseudodifferential operators*, Oberwolfach, 1986, p. 467-479, *Lecture Notes in Mathematics*, 1256, Springer, Berlin-New York, 1987.

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1990 ;
corrigé le 11 juin 1991.)