ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

E. MOURRE

Remarques sur le caractère algébrique du procédé pseudo-différentiel et de certaines de ses extensions (I)

Annales de l'I. H. P., section A, tome 53, nº 3 (1990), p. 259-282

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1990__53_3_259_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 53, n° 3, 1990, p. 259-282. *Physique théorique*

Remarques sur le caractère algébrique du procédé pseudo-différentiel et de certaines de ses extensions (I)

par

E. MOURRE

C.N.R.S. Luminy, Case 907, CPT,
13288 Marseille Cedex 9, France

RÉSUMÉ. — Soit **a**, une algèbre associative et $(D_i)_i$ une famille dérivations qui commutent; on constate que le procédé pseudo-différentiel permet de munir des sous espaces vectoriels $\tilde{\mathbf{a}} \subset \mathbf{a}$ de nouvelles structures d'algèbres associatives. On constate l'existence d'une structure de groupe commutatif attachée à une famille de déformations engendrée par les dérivations $(D_i)_i$. En particulier le procédé pseudo différentiel est reversible. La notion d'inverse formel pour une des lois associatives construites, est attachée à tout élément inversible dans **a**. Si **a** est algèbre associative et involutive et D_i des dérivations qui commutent avec la conjugaison de **a** alors on construit les algèbres involutives déformées. Parmi les extensions possibles du procédé pseudo différentiel, on mentionne la notion de déformation d'algèbre quotient mais elle est exceptionnelle. L'extension la plus naturelle du procédé de déformation d'une algèbre **a**, est la notion de déformation de sous algèbres contraintes, qui est abordée dans cette note.

ABSTRACT. — Let **a** be an associative algebra, and $(D_i)_i$ a family of commuting derivations. We show that the pseudo-differential process leads to associative algebraic structures for vector subspaces $\tilde{\mathbf{a}} \subset \mathbf{a}$. There is also a structure of abelian group associated to a family of deformations generated by the derivations $(D_i)_i$. In particular, the pseudo-differential process is reversible. The notion of formal inverse for one of the above associative law is associated to any invertible element in **a**. If **a** is an associative and involutive algebra with derivations D_i commuting with the conjugacy of

a, one can construct involutive deformations. Among the possible extensions of the pseudo-differential process we mention the notion of deformation of quotient algebra which is however exceptional. The most natural extension of the process of deformation of an algebra **a** is the notion of deformation of a constrained sub-algebra which is described in this paper.

INTRODUCTION

Le calcul pseudo-différentiel ordinaire sur R^n, donne une réponse possible à la question suivante:

Soit l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, des fonctions sur R^{2n} à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la structure d'algèbre commutative ordinaire: munir un sous espace vectoriel d'une nouvelle loi bilinéaire telle que l'on obtienne une algèbre associative.

La réponse donnée par le calcul pseudo-différentiel a été analysée avec beaucoup de précisions ([1] et [2]).

Mais ce que nous remarquons ici, c'est qu'en fait, le calcul pseudo différentiel fournit un procédé particulier pour répondre à la question plus générale suivante.

Soit **a** une algèbre associative sur $\mathbb{C}$, construire un sous espace vectoriel de **a**, et une nouvelle loi bilinéaire qui munisse ce sous espace vectoriel d'une structure d'algèbre associative.

On remarquera ensuite que le procédé pseudo différentiel possède une propriété de groupe, et qu'en particulier, il est réversible.

Un des intérêts du point de vue suivi, faisant abstraction de l'algèbre associative initiale, est que le procédé devient itératif.

La notion d'inverses formels, pour une des lois associatives construites sur $\mathbf{a}(\mathbb{C}; +)$, est alors attachée à tout élément $\mathfrak{a} \in \mathbf{a}(\mathbb{C}; +; .)$ inversible (pour la loi initiale).

Si **a** est une algèbre associative et involutive, et si D_i est une famille de dérivations qui commutent entre elles et qui commutent avec la conjugaison, alors on construit une famille d'algèbres associatives involutives.

On définit ensuite un calcul de Weyl.

Parmi les extensions possibles du procédé pseudodifférentiel, on mentionne et on justifie la notion de déformation d'algèbre quotient; cependant elle s'avère exceptionnelle.

L'extension la plus naturelle d'un procédé de déformation d'algèbre, et du procédé pseudodifférentiel en particulier est la notion de déformation de sous algèbres contraintes. Cette étude est abordée; elle nécessite l'introduction et l'étude d'inverses à droite associé à certains opéerateurs linéaires L sur l'espace vectoriel $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$.

Des propriétés algébriques intéressantes sont associées à des inverses à droite particuliers, construits en supposant l'existence d'un opérateur conjugué exact pour une dérivation sur une algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$: L. La notion d'opérateur conjugué pour un opérateur linéaire L a été introduite ([3], [4]) dans le cadre de la théorie de la diffusion pour des opérateurs self-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, précisément pour obtenir des estimations sur les inverses: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0\pm} (\mathrm{L}+i\varepsilon)^{-1}$.

DESCRIPTION DU PROCÉDÉ PSEUDO DIFFÉRENTIEL ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Bien que le procédé décrit ici n'utilise essentiellement que la structure d'anneau commutatif contenant les nombres rationnels, comme ensemble des scalaires, nous ne considèrerons que des algèbres sur le corps des complexes.

Soit $\mathbb{C}$ le corps des complexes et $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ une algèbre associative sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire:

$$\Big(\sum_i \alpha_i\, \mathfrak{a}_i\Big) . \Big(\sum_j \beta_j\, b_j\Big) = \sum_{i,j} \alpha_i\, \beta_j\, \mathfrak{a}_i . b_j$$

$$\mathfrak{a}_i, b_j \in \mathbf{a} \qquad \text{et} \qquad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$$

$$\mathfrak{a} . (b . c) = (\mathfrak{a} . b) . c.$$

Notations:

Soit $\mathrm{B}(\mathbf{a})$ l'algèbre associative des opérateurs linéaires de $\mathbf{a}$ dans $\mathbf{a}$

$$\text{si } u, v \in \mathrm{B}(\mathbf{a})$$

$$(u+v)(\mathfrak{a}) = u(\mathfrak{a}) + v(\mathfrak{a})$$

$$uv(\mathfrak{a}) = u(v(\mathfrak{a}))$$

dans l'algèbre des opérateurs linéaires, la compsotion des opérateurs u et v sera notée uv.

PROPOSITION I. — *Sur l'espace vectoriel* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ *la donnée d'une structure d'algèbre associative* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *)$ *s'obtient par la donnée d'une application linéaire*

$$\Pi : \mathbf{a}(\mathbb{C};\ +) \to \mathrm{B}(\mathbf{a})$$

telle que:

$$\Pi(\mathfrak{a})\Pi(b)=\Pi(\Pi(\mathfrak{a})(b))$$

et

$$\mathfrak{a}*b=\Pi(\mathfrak{a})(b).$$

Démonstration. — Quelque soit $\mathfrak{a}\in\mathbf{a}$, $a*b$ définit $\Pi(\mathfrak{a})$ comme opérateur linéaire sur $\mathbf{a}$ et

$$\Pi(\alpha\mathfrak{a}+\beta b)(c)=(\alpha\mathfrak{a}+\beta b)*c=\alpha\mathfrak{a}*c+\beta b*c=(\alpha\Pi(\mathfrak{a})+\beta\Pi(b))(c)$$
$$\mathfrak{a}*(b*c)=\Pi(\mathfrak{a})\Pi(b)(c)$$
$$(\mathfrak{a}*b)*c=\Pi(\Pi(\mathfrak{a})(b))(c)$$

et donc la loi est associative si et seulement si

$$\Pi(\mathfrak{a})\Pi(b)=\Pi(\Pi(\mathfrak{a})(b)).$$

Dérivation sur une algèbre. — Une dérivation d'une algèbre est une application linéaire de $\mathbf{a}\to\mathbf{a}$ telle que:

$$D(\mathfrak{a}b)=D(\mathfrak{a}).b+\mathfrak{a}.D(b)$$
$$D\in B(\mathbf{a})$$

PRÉLIMINAIRES TOPOLOGIQUES

DÉFINITION 1. — Algèbre métrique complète, associée à une algèbre $\mathbf{a}$, munie d'une norme et d'une famille de n dérivations qui commutent.

Soit $\mathbf{a}$ une algèbre, munie d'une norme $\|\ \|:\mathbf{a}\to\mathrm{R}^+$; $\mathbf{a}$ en général ne sera pas fermée pour la topologie de la norme.

Soit $(\mathrm{D}i)_i\, n$ dérivations qui commutent;

On peut supposer $\mathbf{a}$ munie d'une structure d'algèbre topologique métrisable et complète; la métrique d étant donnée par : $d(a,b)=d(0,a-b)=\rho(a-b)$.

$$\rho(a)=\|a\|+\sum_{\substack{\alpha\in\mathrm{N}^n\\|\alpha|\geq 1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\frac{\|\mathrm{D}^\alpha(a)\|}{1+\|\mathrm{D}^\alpha(a)\|}$$

où pour tout multi-indice $\alpha\in\mathrm{N}^n$

$$\mathrm{D}^\alpha=\mathrm{D}_1^{\alpha_1}\mathrm{D}_2^{\alpha_2}\ldots\mathrm{D}_n^{\alpha_n}$$
$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

Formule de Leibnitz. — Si D est une dérivation sur une algèbre, l'on a:

$$D^n(a.b)=\sum_{p=0}^{n} D^{(p)}(a).D^{(n-p)}(b)\,C_n^p$$

avec $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ et la convention $0!=1$.

PROCÉDÉ PSEUDO DIFFÉRENTIEL POUR CONSTRUIRE DES ALGÈBRES ASSOCIATIVES

PROPOSITION II. — *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ *une algèbre associative munie d'une norme* $\|\ \ \|$ *et* $(D_i)_i$ *une famille de dérivations qui commutent.*

On peut supposer $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ *complète pour la topologie métrique introduite dans la définition* (1);

soit Π *l'application de* $\mathbf{a}$, *dans l'ensemble des opérateurs sur* $\mathbf{a}$ (*non définis partout*):

$$\Pi(a)=a+(D_1\,a)\,D_2+\frac{1}{2!}(D_1^2\,a)\,D_2^2+\ldots+\frac{1}{n!}(D_1^n\,a)\,D_2^n+\ldots$$

Def. $\Pi(a)$, *le domaine de définition de* $\Pi(a)$ *est l'ensemble des* $b\in\mathbf{a}$ *tels que la série soit convergente pour la topologie métrique.*

Il existe une sous-algèbre $\tilde{\mathbf{a}}\subset\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ *telle que:*

1. $\tilde{\mathbf{a}}\subset$ Def. $\Pi(a)$, $\forall a\in\tilde{\mathbf{a}}$.

$$\Pi(\tilde{\mathbf{a}})\,\tilde{\mathbf{a}}\subset\tilde{\mathbf{a}}.$$

2. *la loi* $a*b=\Pi(a)(b)$ *munie* $\tilde{\mathbf{a}}$ *d'une structure d'algèbre associative*:

$$\Pi(a)\,\Pi(b)=\Pi(\Pi(a)(b)).$$

Démonstration. — Soit D_i, n dérivations qui commutent;

$$\tilde{\mathbf{a}}=\{a\in\mathbf{a}\mid \exists\, c(a)\ \text{et}\ C(a),\ \text{tels que}\ \forall\,\alpha\in\mathbb{N}^n\ \|D^\alpha(a)\|\leqq c(a)\,C(a)^{|\alpha|}\}$$

pour tout $a\in\tilde{\mathbf{a}}$, on notera $[c(a),C(a)]$, l'ensemble des couples qui satisfont la relation:

$$\|D^\alpha(a)\|\leqq c(a)\,C(a)^{|\alpha|}$$

et l'on notera:

$$[c(a),C(a)]\leqq(c,C)$$

s'il existe un couple $(c(a),\ C(a))\in[c(a),C(a)]$ tel que: $c(a)\leqq c$ et $C(a)\leqq C$. L'on a:

$$[c(a+b),C(a+b)]\leqq(c(a)+c(b),\sup(C(a),C(b)))$$
$$[c(a.b),C(a.b)]\leqq(c(a).c(b),C(a)+C(b))$$

donc $\tilde{\mathbf{a}}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$.

D'autre part a et $b \in \tilde{\mathbf{a}}$

$$a * b = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} D_1^n(a) . \frac{D_2^n(b)}{n!}$$

$$D_1 \text{ et } D_2 \in \{ D_i \mid i \in [1, \ldots, n] \}.$$

Il est clair que $a *_N b$ est une suite de gauchy pour la topologie métrique, et que l'on a :

$$D^\alpha(a * b) = \lim_{N \to \infty} D^\alpha(a *_N b)$$

si $(c(a), C(a)) \in [c(a), C(a)]$

$$[c(D^\alpha(a)), C(D^\alpha(a))] \leqq (c(a) C(a)^{|\alpha|}, C(a)).$$

Donc

$$C\left(\sum_{n \geqq 0} D_1^n(a) . \frac{D_2^n(b)}{n!} \right) \leqq C(a) + C(b)$$

$$c\left(\sum_{n \geqq 0} D_1^n(a) . \frac{D_2^n(b)}{n!} \right) \leqq \sum_{n \geqq 0} \frac{1}{n!} c(a) c(b) C(a)^n C(b)^n$$

$$\leqq c(a) c(b) e^{C(a) C(b)}$$

donc $\tilde{\mathbf{a}} * \tilde{\mathbf{a}} \subset \tilde{\mathbf{a}}$.

Pour démontrer l'associativité : $\Pi(\mathfrak{a}) \Pi(b) = \Pi(\Pi(\mathfrak{a})(b))$ on peut négliger les problèmes de resommations qui deviennent simples dans $\tilde{\mathbf{a}}$:

$$\Pi(\mathfrak{a}) \Pi(b) = \left(\sum_{n \geqq 0} D_1^n(\mathfrak{a}) \frac{D_2^n}{n!} \right) \left(\sum_{m \geqq 0} D_1^m(b) \frac{D_2^m}{m!} \right)$$

$$= \sum_{n \geqq 0} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m \geqq 0} \frac{D_1^n(\mathfrak{a})}{n!} D_2^{(n-k)} D_1^m(b) \frac{D_2^{m+k}}{m!} C_n^k$$

$$= \sum_{k \geqq 0} \sum_{m \geqq 0} \sum_{n \geqq k} D_1^n(\mathfrak{a}) D_2^{(n-k)} D_1^m(b) \frac{D_2^{m+k}}{m!} \frac{1}{k!(n-k)!}$$

en posant $n = p + k$, $p \geqq 0$

$$= \sum_{k \geqq 0} \sum_{m \geqq 0} \sum_{p \geqq 0} D_1^{p+k}(\mathfrak{a}) D_2^p D_1^m(b) \frac{D_2^{m+k}}{m!} \frac{1}{k! p!}$$

En sommant sur toutes les valeurs k, m tels que $k + m = j$, on obtient :

$$\sum_{p \geqq 0} \sum_{j \geqq 0} \left(\sum_{k+m=j} D_1^k D_1^p(\mathfrak{a}) D_1^m \frac{D_2^p(b)}{p!} \frac{j!}{k! m!} \right) \frac{D_2^j}{j!}$$

où nous avons utilisé le fait que D_1 et D_2 commutent.

Si l'algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ est associative, alors l'opérateur $\Pi(\mathfrak{a})\Pi(b)$ peut se réécrire :

$$\sum_{j\geq 0} D_1^j\left(\sum_{p\geq 0} D_1^p(\mathfrak{a}).\frac{D_2^p(b)}{p!}\right)\frac{D_2^j}{j!}$$

c'est-à-dire $\Pi(\Pi(\mathfrak{a})(b))$.

Le fait que D_1 et D_2 restent des dérivations pour l'algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *(D_1, D_2))$ est immédiate. En effet :

Proposition III. — *Soit* D *une dérivation qui commute avec* D_1 *et* D_2, *alors* D *est encore une dérivation pour l'algèbre* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *(D_1, D_2))$.

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{a}*b) &= D\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}D_1^n(\mathfrak{a}).D_2^n(b)\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}D_1^n(D\,\mathfrak{a}).D_2^n(b)\\ &\quad+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}D_1^n(\mathfrak{a}).D_2^n(D\,b)\\ &= (D\,\mathfrak{a})*b+\mathfrak{a}*D(b).\end{aligned}$$

Parce que $[D, D_i]=0$ *pour* $i=1$ *ou* 2.

Proposition IV. — *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ *une algèbre associative normée et soit pour* $i\in(1,\ldots,n)$ D_1^i, D_2^i $2n$ *dérivations qui commutent. Pour tout multi indice* $\alpha(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$

$$\alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!$$
$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i$$

$$D_1^\alpha = \prod_{i=1}^n (D_1^i)^{\alpha_i}\quad D_2^\alpha = \prod_{i=1}^n (D_2^i)^{\alpha_i}$$

Soit

$$\Pi(\mathfrak{a}) = \sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}(D_1^\alpha\,\mathfrak{a})\,D_2^\alpha$$

et $\tilde{\mathbf{a}}$ le sous espace vectoriel introduit proposition 2 alors

$$\mathfrak{a}*(D_1, D_2)\,b = \Pi(\mathfrak{a})(b),\qquad \forall\,a, b\in\tilde{\mathbf{a}}$$

définit sur $\tilde{\mathbf{a}}$, une structure d'algèbre associative

$$\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *(D_1, D_2)).$$

Démonstration. — Soit $\Pi_1(\mathfrak{a}) = \sum_{\alpha_1\geq 0}\frac{1}{\alpha_1!}(D_1^{\alpha_1}\,\mathfrak{a})\,D_2^{\alpha_1}$

et $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *1)$ l'algèbre associative construite avec la proposition 2; D_1^2 et D_2^2 sont des dérivations qui commutent pour l'algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *1)$.

Soit

$$\Pi_2(a)(b) = \sum_{\alpha_2 \geqq 0} \frac{1}{\alpha_2!} D_1^{2\,\alpha_2} a *_1 D_2^{2\,\alpha_2} b$$

$\tilde{\mathbf{a}}$ est munie d'une structure d'algèbre associative:

$$a *_2 b = \sum_{\alpha_2 \geqq 0} \sum_{\alpha_1 \geqq 0} \frac{1}{\alpha_2!} \frac{1}{\alpha_1!} (D_1^{1\,\alpha_1} D_1^{2\,\alpha_2} a).(D_2^{1\,\alpha_1} D_2^{2\,\alpha_2} b)$$

$$= \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{\alpha!} D_1^{\alpha}(a) D_2^{\alpha} \right)(b)$$

et par récurrence on obtient la proposition IV.

UNE PROPRIÉTÉ DE GROUPE COMMUTATIF, POUR LES DÉFORMATIONS D'ALGÈBRE ENGENDRÉES PAR DES DÉRIVATIONS FIXÉES (D_1, D_2)

Soit $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ et soit D_1 et D_2 deux dérivations qui commutent. Soit $\tilde{\mathbf{a}}$ l'espace vectoriel introduit proposition II, soit la famille d'algèbre associative:

$$\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *(.\,;z, D_1, D_2)) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

définies par

$$\Pi_z(a) = \sum_{n \geqq 0} \frac{z^n}{n!} (D_1^n a) D_2^n.$$

Les dérivations D_1 et D_2 restent des dérivations pour le produit $*(.\,;z, D_1, D_2)$ et soit l'algèbre obtenue par déformation

$$\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *(*(.\,;z, D_1, D_2); z', D_1, D_2)).$$

PROPOSITION V:

$$*(.\,;z+z', D_1, D_2) = *(*(.\,;z, D_1, D_2); z', D_1, D_2)$$

c'est-à-dire, si on note $\tau(z, D_1, D_2)$ *la loi de transformation sur l'ensemble des produits associatifs qui admette* D_1 *et* D_2 *comme dérivations, l'on a: le* *diagramme, commutatif*:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\tau(z, D_1, D_2)"] \arrow[dr, "\tau(z+z', D_1, D_2)"'] & *(.\,; z, D_1, D_2) \arrow[d, "\tau(z', D_1, D_2)"] \\
& *(*(.\,; z, D_1, D_2); z', D_1, D_2)
\end{tikzcd}$$

En particulier, si l'algèbre, $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *)$ *a été obtenue à partir de l'algèbre* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ *par le procédé pseudo différentiel, on peut reconstruire l'algèbre* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ *à partir de l'algèbre* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *)$, *par le même procédé.*

Démonstration:

$$a * (*_z; z', D_1, D_2)\, b = \sum_{n \geqq 0} \frac{z'^n}{n!} (D_1^n\, a) *_z D_2^n (b)$$

$$= \sum_{n \geqq 0} \sum_{m \geqq 0} \frac{(z'^n)}{n!} \cdot \frac{z^m}{m!} (D_1^{n+m}\, a) . (D_2^{n+m}\, b)$$

$$= \sum_{j \geqq 0} \frac{(z'+z)^j}{j!} (D^j\, a) . D^j (b).$$

Cette propriété de groupe commutatif se généralise évidemment aux cas de n couples de dérivations qui commutent

$$D_1 = D_1^i \quad D_2 = D_2^i \quad [D_\alpha^i, D_\beta^j] = 0.$$

PROPOSITION VI. — *Soit* $\mathbf{a}$ *une algèbre associative normée et* $(Di)_i$ $i \in [1, \ldots, n]$, *des dérivations qui commutent.*

Par toute matrice Mn *sur* $\mathbb{C}$, *il existe une famille de produit associatif* $*(z; \mathrm{M}; D_i)$ *sur le sous espace vectoriel* $\tilde{\mathbf{a}} \subset \mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ *telle que*

$$a * (z, \mathrm{M}, D_i)\, b = a . b + \sum_{i,\, j} z \mathrm{M}\, ij (D\, i\, a) . (Dj\, b) + O(z^2).$$

Démonstration. — Soit $\alpha = \{ (i, j) \mid i, j \in [1, \ldots, n] \}$

Soit $\beta \subset \alpha$.

Supposons l'existence sur l'ensemble $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ d'un produit $*(z; \beta, D)$, associatif, tel que

$$a * (z, \beta, D)\, b = a . b + \sum_{(i,\, j) \in \beta} z \mathrm{M}\, ij (Di\, a) . (D_j\, b) + O(z^2)$$

et tel que $\forall_i$, D_i soient des dérivations pour ce produit.

Soit $(i_0, j_0) \in \alpha/\beta$

$a * (*(z; \beta; D); z \mathrm{M}_{i_0 j_0}, D_{i_0}, D_{j_0})\, b$

$$= \mathfrak{a} * (z, \beta, D) b + z . M_{i_0 j_0} . (D_{i_0} \mathfrak{a}) * (z, \beta, D) (D_{j_0} b) + O(z^2)$$
$$= \mathfrak{a} . b + \sum_{i,\, j \in \beta} z M_{ij} (D_i \mathfrak{a}) . D_j (b) + z M_{i_0 j_0} . D_{i_0} (\mathfrak{a}) . D_{j_0} (b) + O(z^2)$$

et d'après les propositions II et III, c'est un produit associatif qui admet D_i, $i \in [1, \ldots, n]$, pour dérivations.

Par récurrence on a donc montré la proposition VI.

INVERSES FORMELS

Relations formelles entre les Inverses d'un élément $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ pour les différentes lois $*(z; M; D)$.

Soit $\mathbf{a}$ une algèbre associative $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ et soit $\mathfrak{a} * (z; M; D_i) b$ une loi associative explicitement issue de la proposition VI, que nous noterons simplement $\mathfrak{a} * (z) b$

$$\mathfrak{a} * (z) b = \mathfrak{a} . b + z w_1 (\mathfrak{a}; b) + z^2 w_2 (\mathfrak{a}; b) + z^n w_n (\mathfrak{a}; b) +$$

où les applications w_n sont bilinéaires de $\mathbf{a} \times \mathbf{a} \to \mathbf{a}$.

Supposons que l'algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ soit une algèbre avec unité $\mathfrak{a} . e = e . \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

Par construction des produits $*(z)$ e est l'unité pour les algèbres $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *(z))$.

Soit $\mathfrak{a}$ est inversible dans $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$

$$\mathfrak{a}^{-1} . \mathfrak{a} = \mathfrak{a} . \mathfrak{a}^{-1} = e.$$

Construction formelle de l'inverse à gauche.

$$\mathfrak{a}^{-1\,(*\,(z))} = (\mathfrak{a}^{-1} + z b_1 + z^2 b_2 + \ldots z^n bn + \ldots)$$
$$(\mathfrak{a}^{-1} + z b_1 + z^2 b_2 + \ldots z^n bn + \ldots) * (z)\, \mathfrak{a} = e.$$

En identifiant les termes du même degré en z on obtient

1. $w_1 (\mathfrak{a}^{-1}; \mathfrak{a}) + b_1 . \mathfrak{a} = 0.$

n. $b_n . \mathfrak{a} + \sum_{p \geqq 1}^{n} w_p (b_{n-p}, \mathfrak{a}) = 0$

$$b_0 = a^{-1}$$
$$b_1 = - w_1 (\mathfrak{a}^{-1}; \mathfrak{a}) . \mathfrak{a}^{-1}$$
$$b_n = - \sum_{p \geqq 1}^{n} w_p (b_{n-p}; \mathfrak{a})\, \mathfrak{a}^{-1}$$

et ceci détermine formellement chaque terme b_n, comme fonction des précédents;

DÉFINITIONS. — On dira que $\mathfrak{a}$ admet un inverse formel pour la loi $*(z)$ si chacun des termes $b_0=\mathfrak{a}^{-1}, b_1, \ldots, b_n$ est défini

$$\mathfrak{a}^{-1(*(z))}=\mathfrak{a}^{-1}+\sum_{n\geqq 1} b_n z^n$$

L'exemple standard de ce problème est celui des opérateurs pseudo différentiels elliptiques [5]. Remarquons que si en ce qui concerne l'étude des algèbres $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *(z;\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2)$ l'analyse spectrale des dérivations D_1 et D_2 est certainement utile, elle ne le sera probablement pas pour étudier l'inverse formel $\mathfrak{a}^{-1(*(z))}$ connaissant $\mathfrak{a}^{-1}$.

NOTIONS DE DÉFORMATION D'ALGÈBRE QUOTIENT

Soit $\mathbf{a}$ une algèbre associative avec une unité et D_i une famille de dérivations qui commutent.

Des exemples d'algèbre B sans dérivation, peuvent être obtenus en prenant dans $\mathbf{a}$ un idéal bilatère I, non stable par la famille D_i, et en considérant l'algèbre $\mathrm{B}=\mathbf{a}(+;\,.)/\mathrm{I}(+;.)$.

Remarque. — Soit $*(z)$ une loi associative construite d'après la proposition VI, munissant $\mathbf{a}(+)$ de la structure d'algèbre associative $\mathbf{a}(+;*(z))$.

Exceptionnellement pour certaines dérivations D_i et certaines valeurs z_n, l'on peut avoir la propriété suivante:

$$\mathbf{a}.\mathbf{I}.\mathbf{a}\subset \mathrm{I}$$

et

$$\mathbf{a}*(z_n)\,\mathrm{I}*(z_n)\,\mathbf{a}\subset \mathrm{I}.$$

DÉFINITION. — Dans ce cas on dira que $\mathbf{a}(+;*(z_n))/\mathrm{I}$ est une déformation de l'algèbre $\mathbf{a}(+;\,.)/\mathrm{I}$.

Remarques. — Une justification possible de la définition précédente est la suivante:

PROPOSITION VII. — *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ *et* I *un idéal bilatère dans* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ *pour les lois* . *et* $*(z_n)$.

$$\mathfrak{a}*(z)\,b=\mathfrak{a}\,.\,b+\sum_{n\geqq 1} z^n\,w_n(\mathfrak{a};b).$$

Supposons que $\bar{\mathfrak{a}}\in\mathbf{a}/\mathrm{I}$ *admette un inverse* $\bar{\mathfrak{a}}^{-1}$ *dans l'algèbre associative* $\mathbf{a}/\mathrm{I}$. *C'est-à-dire il existe* $\mathfrak{a}'\in\mathbf{a}$ *tel que*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'-e\in\mathrm{I}$$
$$\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}-e\in\mathrm{I}.$$

Alors $\bar{\mathfrak{a}}$ *admet un inverse formel à gauche dans l'algèbre* $\mathbf{a}(+;*(z_n))/\mathrm{I}$.

Démonstration. — Dans ce qui suit z est supposé prendre l'une des valeurs z_n pour lesquels $\mathbf{a} * (z) \mathrm{I} * (z) \mathbf{a} \subset \mathrm{I}$ on cherche

$$\mathfrak{a}' + z b_1 + z^2 b_2 + \ldots z^n b_n + \ldots$$

tel que

$$(\mathfrak{a}' + z b_1 + z^2 b_2 + \ldots z^n b_n + \ldots) * (z) \mathfrak{a} \in e + \mathrm{I}$$

et donc une solution peut être obtenue en résolvant par récurrence les équations :

$$b_1 . \mathfrak{a} + w^1 (\mathfrak{a}'; \mathfrak{a}) \in \mathrm{I}$$

$$b_n . \mathfrak{a} + \sum_{p \geqq 1}^{n} w_p (b_{n-p}; \mathfrak{a}) \in \mathrm{I}$$

$$\text{avec}\, b_0 = \mathfrak{a}', \qquad b_1 = w^1 (\mathfrak{a}'; \mathfrak{a}) . \mathfrak{a}'$$

Donc une solution particulière est peut être donnée par :

$$b_1 = - w_1 (\mathfrak{a}'; \mathfrak{a}) . \mathfrak{a}'$$

$$b_n = - \left(\sum_{n \geqq 1}^{p} w_p (b_{n-p}; \mathfrak{a}) . \mathfrak{a}' \right.$$

mais en principe à chaque étape il y a un choix possible dans la détermination de b_n, qui pourrait améliorer les problèmes de convergence.

DÉFORMATION D'UNE INVOLUTION; CALCUL DE WEYL

Soit $\mathbf{a}$ une algèbre associative sur le corps des complexes, munie d'une involution : c'est-à-dire d'une application C antilinéaire de $\mathbf{a}$ dans $\mathbf{a}$:

$$\mathrm{C}(\alpha \mathfrak{a} + \beta b) = \bar{\alpha} \mathrm{C}(\mathfrak{a}) + \bar{\beta} \mathrm{C}(b), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

vérifiant :

(*a*) $\mathrm{C}^2 = 1$.

(*b*) $\mathrm{C}(\mathfrak{a} . b) = \mathrm{C}(b) . \mathrm{C}(\mathfrak{a})$.

Une telle algèbre sur $\mathbb{C}$ est dite Involutive.

PROPOSITION VIII. — *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C}; +; .)$ *une algèbre involutive sur* $\mathbb{C}$. *Soit la loi* $*(z, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2)$ *définie dans la proposition* II *et* $h \in \mathrm{R}$.

$$\mathfrak{a} * (ih, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2) b = \mathfrak{a} . b + \sum_{n \geqq 1} \frac{(ih)^n}{n!} (\mathrm{D}_1^n \mathfrak{a}) . (\mathrm{D}_2^n \mathfrak{a})$$

supposons que D_1 *et* D_2 *commutent avec l'involution* C :

$$\mathrm{CD}_i = \mathrm{D}_i \mathrm{C} \qquad \textit{pour} \quad i = 1 \; \textit{ou} \; 2$$

alors

$$e^{+ih\,D_1\,D_2}C = C(h), \qquad h \in R$$

est une involution pour la loi $*(ih, D_1, D_2)$.

Démonstration. — Soit $h \in R$; on notera $*(h) = *(ih, D_1, D_2)$ il faut vérifier

$$(e^{+ih\,D_1\,D_2}C\,\mathfrak{a}) * (h)(e^{+ih\,D_1\,D_2}C\,b) = e^{+ih\,D_1\,D_2}C(b * (h)\,\mathfrak{a})$$

L'on suppose que sur l'algèbre **a**, les deux termes de l'identité précédente sont des séries formelles en h pour $(\mathfrak{a}, b) \in \mathbf{a} \times \mathbf{a}$.

Soit

$$w_1(h)(\mathfrak{a}, b) = e^{-ih\,D_1\,D_2}[(e^{+ih\,D_1\,D_2}C\,\mathfrak{a}) * (h)(e^{+ih\,D_1\,D_2}C\,b)]$$
$$w_2(h)(\mathfrak{a}, b) = C(b * (h)\,\mathfrak{a}).$$

Calculons au sens des séries formelles

$$\frac{d}{dh}w_2(h)(\mathfrak{a}, b) = C\left(\frac{d}{dh}b * (h)\,\mathfrak{a}\right) = C(i(D_1\,b) * (h)(D_2\,\mathfrak{a})) = -iw_2(D_2\,\mathfrak{a}, D_1\,b)$$

de même on vérifie immédiatement que:

$$\frac{d}{dh}w_1(h)(\mathfrak{a}, b) = -iw_1(h)(D_2\,\mathfrak{a}, D_1\,b)$$

$w_1(h)$ et $w_2(h)$ sont des séries formelles en h à valeurs dans l'espace vectoriel des applications bi-antilinéaire de $\mathbf{a} \times \mathbf{a} \to \mathbf{a}$, qui vérifient la même équation différentielle linéaire; elles sont donc déterminées par leurs conditions initiales $w_1(0)$ et $w_2(0)$

$$w_1(0) = C\,\mathfrak{a}\,.\,C\,b = w_2(0) = C(b\,.\,\mathfrak{a}).$$

Donc $w_1(h) = w_2(h)$ ce qui montre la proposition 8.

CALCUL DE WEYL

PROPOSITION IX. — *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\,+)$ *un espace vectoriel complexe et* C_0 *et* C_1 *deux conjugaisons sur* **a**; C_0 *et* C_1 *sont des applications antilinéaires sur* **a** *telle que*

$$C_0^2 = C_1^2 = 1$$

$U = C_1\,C_0$*; est un opérateur linéaire qui vérifie*:

$$UC_0\,U\,C_0 = 1, \qquad U^{-1} = C_0\,U\,C_0.$$

Supposons qu'il existe T tel que:

$$T^2 = U \text{ et } C_0 T C_0 T = 1.$$

Alors

$$C_1 T = TC_0.$$

Démonstration:

$$C_1 T = UC_0 T = UC_0 TC_0 C_0 = TC_0.$$

Sur l'espace vectoriel $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ soit C_0 et $C(h)$ les involutions pour les lois . et $*(ih, D_1, D_2)$

$$C(h) = e^{+ihD_1D_2} C_0$$

et donc

$$U = C(h) C_0 = T^2 \qquad \text{avec} \quad T = e^{+i(h/2)D_1D_2}$$
$$C_0 TC_0 = T^{-1}.$$

Et donc si à $\mathfrak{a} \in \mathbf{a}$ on associe $T(\mathfrak{a})$ l'on obtient

$$C(h) T(\mathfrak{a}) = T(C_0 \mathfrak{a}).$$

Et donc si $\mathfrak{a}$ est symétrique pour l'algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .;\ C_0)$, $T(\mathfrak{a})$ est symétrique pour l'algèbre $*(ih; D_1, D_2), C(h)$.

DÉFORMATION DE SOUS ALGÈBRES CONTRAINTES

Soit $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ une algèbre associative.

Soit (D_1^i, D_2^i) $2n$ dérivations qui commutent et soit

$$\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +; h, M, D_1^i, D_2^i)$$

une structure d'algèbre associative sur $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$, induite par la proposition VI ou plus généralement une structure d'algèbre associative, $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *(h))$. On notera la loi associative sur $\mathbf{a}$ simplement $*(h)$

$$\mathfrak{a} * (h) b = \mathfrak{a} . b + \sum_{n \geqq 1} h^n v_n(\mathfrak{a}; b)$$

où $v_n(\mathfrak{a}; b)$ sont des applications bilinéaires de $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ dans $\mathbf{a}$.

Dans le reste de cette note, on ne prendra aucune précaution topologique; $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ étant un espace vectoriel, pour toutes les séries intervenant par la suite, on supposera que la série converge au sens d'une topologie uniforme sur un espace vectoriel topologique complet contenant $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ et que la limite est encore dans $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$.

Le problème intéressant qui se pose naturellement est le suivant: soit $b_0 \in \mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ et soit

$$\mathrm{Com}^{*(h)}(b_0) = \{\, \mathfrak{a} \in \mathbf{a} \mid b_0 * (h)\, \mathfrak{a} - \mathfrak{a} * (h)\, b_0 = 0 \,\}.$$

Le problème est de caractériser les sous algèbres $\tilde{\mathbf{a}}^{\cdot}(b_0) \subset \mathrm{Com}^{\cdot}(b_0)$ possédant la propriété suivante

$$\forall a \in \tilde{\mathbf{a}}^{\cdot}(b_0), \quad \exists\, \mathfrak{a}(h) = \mathfrak{a} + h\,\mathfrak{a}_1 + h^2\,\mathfrak{a}_2 + \ldots h^n\,\mathfrak{a}_n + \ldots$$

tel que

$$\mathfrak{a}(h) \in \mathrm{Com}^{*(h)}(b_0)$$
$$\mathfrak{a} * (h)\, b_0 - b_0 * (h)\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \,.\, b_0 - b_0 \,.\, \mathfrak{a} + \sum_{n \geqq 1} h^n\, w_n(\mathfrak{a}; b_0)$$

où $w_n \in \Omega_2(\mathbf{a} \times \mathbf{a}; \mathbf{a})$ l'espace les applications bilinéaires antisymétriques de $\mathbf{a} \times \mathbf{a} \to \mathbf{a}$. Si $\mathfrak{a} \in \mathrm{Com}^{\cdot}(b_0)$, généralement $\mathfrak{a} \notin \mathrm{Com}^{*(h)}(b_0)$.

On est donc amené à rechercher $\mathfrak{a}(h)$ sous la forme $\mathfrak{a}_0 + \sum_{n \geqq 1} h^n\, \mathfrak{a}_n$.

Et donc la condition $[\mathfrak{a}(h), b_0] * (h) = 0$ s'écrit en identifiant les termes du même ordre en h.

$$[\mathfrak{a}_1, b_0] + w_1(\mathfrak{a}_0, b_0) = 0$$
$$[\mathfrak{a}_n, b_0] + \sum_{p \geqq 1}^{n} w_p(\mathfrak{a}_{n-p}; b_0) = 0, \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}.$$

Le problème consiste donc à construire des solutions intéressantes pour ce système d'équations élémentaires.

Si l'algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ est commutative, il y a un décalage d'un cran, pour le système d'équations: il faut en effet résoudre l'équation:

$$\sum_{n \geqq 1} h^n\, w_n(\mathfrak{a}(h); b_0) = 0$$

ou en dénotant $\tilde{w}_n$, w_{n+1}

$$\sum_{n \geqq 0} h^n\, \tilde{w}_n(\mathfrak{a}(h); b_0) = 0$$

la condition nécessaire est donc que

$$\tilde{w}_0(\mathfrak{a}, b_0) = 0.$$

Et donc le problème dans le cas commutatif se ramène à résoudre le système d'équations:

$$\tilde{w}_0(\mathfrak{a}_1, b_0) + \tilde{w}_1(\mathfrak{a}_0, b_0) = 0 \qquad (\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}).$$
$$\tilde{w}_0(\mathfrak{a}_n, b_0) + \sum_{p \geqq 1}^{n} \tilde{w}_p(\mathfrak{a}_{n-p}, b_0) = 0$$
$$w_1(x; b_0) = \tilde{w}_0(x; b_0) \ \text{ ou } \ [x., b_0]$$

$b_0 \in \mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ définit un opérateur linéaire de $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +) \to \mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ que nous noterons $\mathrm{L}\,b_0 : \mathbf{a} \to \mathbf{a}$.

La proposition suivante donne un critère suffisant pour constuire une solution algébrique de l'équation

$$\mathrm{L}\,b_0(x) = y.$$

Définition. — Soit $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et L un opérateur linéaire $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$.

Un opérateur linéaire A sur $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ est appelé opérateur conjugué exact de L si et seulement si $\mathrm{LA}-\mathrm{AL}=1$ ou 1 est l'opérateur identité dans l'algèbre des opérateurs linéaires sur $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$.

Remarque. — L'intérêt de la notion plus générale d'opérateur conjugué a été introduit dans [3], [4] pour donner un sens et étudier les propriétés d'opérateurs: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \dfrac{1}{\mathrm{H}+i\varepsilon}$ où H est un opérateur self adjoint admettant un opérateur conjugué, au voisinage du point 0 de son spectre.

Définition. — Soit $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ une algèbre associative, on dira qu'un opérateur linéaire A sur $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ est affilié à l'algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ si et seulement si

$$\mathrm{A}(\mathfrak{a}\,.\,b) = \mathrm{A}(\mathfrak{a})\,.\,b.$$

Proposition X. — *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ *un espace vectoriel et soit* $\mathrm{L} \in \mathrm{B}(\mathbf{a})$, *l'algèbre des opérateurs linéaires de* $\mathbf{a}$ *dans* $\mathbf{a}$.

Supposons qu'il existe un opérateur conjugué exact $\mathrm{A} \in \mathrm{B}(\mathbf{a})$ *c'est-à-dire tel que*:

$$[\mathrm{L}, \mathrm{A}] = \mathrm{LA} - \mathrm{AL} = 1 \quad \textit{sur}\ \mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$$

soit $\Gamma(\mathrm{A};\mathrm{L})$ *l'opérateur définit sur* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ *par*

$$\Gamma(\mathrm{A};\mathrm{L}) = \mathrm{A} - \frac{\mathrm{A}^2}{2!}\mathrm{L} + \frac{\mathrm{A}^3}{3!}\mathrm{L}^2 + \ldots (-1)^{n-1}\frac{\mathrm{A}^n}{n!}\mathrm{L}^{n-1} + \ldots$$

Alors $\Gamma(\mathrm{A};\mathrm{L})$ *est un inverse à droite de L.*

$$L\Gamma(\mathrm{A};\mathrm{L}) = \mathbf{1}.$$

Démonstration. — Par hypothèse

$$\mathrm{LA} - \mathrm{AL} = \mathbf{1}$$

$$\mathrm{LA}^n - \mathrm{A}^n\mathrm{L} = n\,\mathrm{A}^{n-1}$$

$$\mathrm{L}\left(\mathrm{A} - \frac{\mathrm{A}^2}{2!}\mathrm{L} + \frac{\mathrm{A}^3}{3!}\mathrm{L}^2 + \ldots (-1)^{n-1}\frac{\mathrm{A}^n}{n!}\mathrm{L}^{n-1} + \ldots\right)$$

$$= \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}\left[\mathrm{L}, \frac{\mathrm{A}^n}{n!}\right]\mathrm{L}^{n-1} + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}\frac{\mathrm{A}^n}{n!}\mathrm{L}^n$$

$$=1+\sum_{n\geqq 2}(-1)^{n-1}\frac{A^{n-1}}{(n-1)!}L^{n-1}+\sum_{n\geqq 1}(-1)^{n-1}\frac{A^n}{n!}L^n=\mathbf{1}.$$

Remarques. — 1. Ici encore il faut répéter que l'étude précise de l'inverse à droite explicite $\Gamma(A, L)$, nécessitera l'étude des propriétés spectrales de l'opérateur L.

2. Dans les cas qui nous intéressent, les opérateurs L sont définis par

(*a*) si l'algèbre $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ est non commutative

$$L\,b_0(x)=[x, b_0].$$

(*b*) si l'algèbre est commutative

$$L\,b_0(x)=\tilde{w}_0(x; b_0)=w_1(x; b_0)=\sum_{i,j}M_{ij}(D_i(x).D_j(b_0)-D_i(b_0).D_j(x)).$$

Donc dans les deux cas, les opérateurs $L\,b_0$ sont non seulement des opérateurs linéaires sur $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ mais aussi des dérivations sur $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$.

Et donc toute sous algèbre $\tilde{\mathbf{a}}$ contenue dans l'algèbre $\mathbf{a}_F$ suivante est intéressante :

$$\mathbf{a}_F=\{\mathfrak{a}\in\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)\,|\,\exists\, n \text{ dependant de } \mathfrak{a} \text{ tels que } L_{b_0}^n\,\mathfrak{a}=0\}.$$

Cette algèbre $\mathbf{a}_F$ est associée à un type très particulier de dérivation $L\,b_0$; plus généralement, il existera une sous algèbre $\tilde{\mathbf{a}}(L)\subset\mathbf{a}$ intéressante construite grâce à l'analyse spectrale de la dérivation L.

PROPOSITION XI. — *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *et* L *un opérateur linéaire de* $\mathbf{a}\to\mathbf{a}$. *Supposons qu'il existe* Γ *un inverse à droite de* L.

$$L\Gamma=\mathbf{1}.$$

Alors

(*a*) $P=\Gamma L$ *et* $Q=1-\Gamma L$ *sont des opérateurs linéaires vérifiant*

$$P^2=P,\qquad Q^2=Q,\qquad P+Q=\mathbf{1}$$
$$Q(\mathbf{a})=\ker L.$$
$$\ker Q=(1-Q)(\mathbf{a})$$
$$Q\Gamma=0,$$

(*b*) *si* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)$ *est de plus muni d'une structure d'algèbre associative* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$ *et* L *une dérivation de* $\mathbf{a}\to\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}=Q(\mathbf{a})\oplus(1-Q)(\mathbf{a})$$
$$\mathbf{a}=Q(\mathbf{a})\oplus\ker Q$$

$\mathbf{a}/\ker Q$ *est alors munie de la structure d'algèbre associative isomorphe à la sous algèbre* $\ker L\subset\mathbf{a}$

$$Q:\mathbf{a}/\ker Q\to Q(\mathbf{a})=\ker L.$$

Démonstration. — (*a*) $(\Gamma L)^2 = \Gamma L \Gamma L = \Gamma L$.

$$Q = 1 - \Gamma L \text{ est donc un projecteur dans } B(\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +)) \text{ et } LQ = 0$$
$$Q(\mathbf{a}) \subset \ker L \qquad \text{et si} \quad \alpha \in \ker L, \quad Q(\alpha) = \alpha$$
$$Q(\mathbf{a}) = \ker L$$
$$(1-Q)(\mathbf{a}) \subset \ker Q \quad \text{et si} \quad \alpha \in \ker Q, \quad \alpha = (1-Q)\alpha$$
$$(1-Q)(\mathbf{a}) = \ker Q$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (1-Q)(\mathbf{a}) \oplus Q(\mathbf{a}) \\ &= \ker Q \oplus Q(\mathbf{a})\end{aligned}$$

Q: est un isomorphisme entre: $\mathbf{a}/\ker Q$ et $Q(\mathbf{a})$

$$Q : \mathbf{a}/\ker Q \rightarrow Q(\mathbf{a}) = \ker L.$$

Q est surjectif parce que $Q^2 = Q$ et donc

$$\mathbf{a}/\ker Q = \ker L.$$

(*b*) De plus si **a** est une algèbre associative et L une dérivation de $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}$, ker L est une sous algèbre associative, et donc $\mathbf{a}/\ker Q$ est munie d'une structure d'algèbre associative

$$\bar{\alpha}, \bar{b} \in \underline{\mathbf{a}/\ker Q}$$
$$\bar{\alpha} . \bar{b} = Q(\bar{\alpha}) . Q(\bar{b})$$

vérifions que $Q\Gamma = 0 : (1 - \Gamma L)\Gamma = \Gamma - \Gamma = 0$.

STRUCTURES ALGÉBRIQUES SUPPLÉMENTAIRES ATTACHÉES A L'EXISTENCE D'OPÉRATEUR CONJUGUÉ AFFILIÉ A L'ALGÈBRE

Remarque. — Dans la proposition 11, les structures d'algèbre construites sur $\mathbf{a}/\ker Q$ ont été déterminées par l'isomorphisme d'espace vectoriel $Q : \mathbf{a}/\ker Q \rightarrow Q(\mathbf{a}) = \ker L$ ou Q est une projection de **a** sur ker L définie par l'inverse à droite Γ vérifiant $L\Gamma = 1$ et

$$P = \Gamma L, \qquad Q = 1 - \Gamma L; \qquad P + Q = 1$$
$$P^2 = P, \qquad Q^2 = Q.$$

L étant une dérivation, son noyau est une sous algèbre, dont la structure a été transportée sur $\mathbf{a}/\ker Q$.

Mais dans le cas où l'opérateur Γ inverse à droite de L, provient d'un opérateur conjugué affilié à **a**, alors les liens entre les structures algébriques de **a** et de $\mathbf{a}/\ker Q$ sont étroits.

PROPOSITION XII. — *Soit* **a** *une algèbre associative, et soit* L *une dérivation de* **a**.

Supposons qu'il existe un opérateur conjugué $A \in B$ (**a**) *exacte*: $LA - AL = 1$ *dans* B(**a**); *supposons de plus que* $A(a.b) = A(a).b$.

Soit $\Gamma(A;L) = A - \frac{A^2}{2!}L + \ldots (-1)^p \frac{A^{p+1}}{(p+1)!}L^p + \ldots$

L'inverse à droite de L.

Soit Q(A; L) *le projecteur de* **a** *sur* kerL *associe à* $\Gamma(A, L)$:

$$Q(A, L) = Q = 1 - \Gamma(A, L) L$$
$$Q(A, L) = \sum_{p \geq 0} \frac{(-A)^p}{p!} L^p.$$

Alors

(*a*) $Q(a.b) = Q(Q(a).b)$

(*b*) ker Q *est un idéal à droite de l'algèbre* **a**

(*c*) *Soit* $\tilde{\Pi} : \mathbf{a} \to B(\ker L) = B$ (**a**/ker Q), *ou* B(ker L), *désigne l'ensemble des opérateurs linéaires sur l'algèbre* ker L

$$\tilde{\Pi}(b)(a) = Q(a.b) \quad a \in \ker L.$$

alors $\tilde{\Pi}$ *est une anti representation de* $\mathbf{a} \to B$ (ker L):

$$\tilde{\Pi}(c)\tilde{\Pi}(b) = \tilde{\Pi}(b.c)$$

(*d*) *Si* **a** *est une algèbre commutative alors*

$$Q(a.b) = Q(a).Q(b)$$

et en particulier

ker Q *est un idéal bilatère*

ker L *est alors isomorphe à l'algèbre quotient*: **a**/ker Q.

Remarque. – Lorsque l'algèbre **a** est commutative, la partie (*d*) de la proposition XII résulte du fait suivant: si L est une dérivation et si $A \in \mathbf{a}$ alors tout opérateur de $\mathbf{a} \to \mathbf{a}$, Q(A; L) de la forme:

$$Q(A; L) = \sum_{p \geq 0} A^p \frac{L^p}{p!}$$

est un homomorphisme

$$Q(A, L)(a, b) = Q(A, L)(a).Q(A, L)(b).$$

Dans le cas non commutatif, cette propriété n'est plus exacte, et nous nous contenterons de montrer la proposition.

Démonstration de la proposition XII. – D'après la proposition X on sait que $\Gamma(A, L)$ est un inverse à droite de L et

$$1 - \Gamma L = Q(A; L) = \sum_{p \geq 0} (-A)^p \frac{L^p}{p!}$$

est une projection sur le noyau de L.

Et donc d'après la formule de Leibnitz:

$$\begin{aligned}
Q(A, L)(\mathfrak{a} . b) &= \sum_{p \geqq 0} \frac{(-A)^p}{p!} L^p(\mathfrak{a} . b) \\
&= \sum_{p \geqq 0} \sum_{i+j=p} A^j A^i \left(\frac{L^i \mathfrak{a}}{i!} . \frac{L^j(b)}{j!} \right) (-1)^{i+j} \\
&= \sum_{j \geqq 0} \sum_{i \geqq 0} \frac{(-A)^j}{j!} \left((-A)^i \frac{L^i(\mathfrak{a})}{i!} . L^j(b) \right)
\end{aligned}$$

En sommant sur $i \geqq 0$ on obtient

$$Q(A, L)(\mathfrak{a} . b) = \sum_{j \geqq 0} \frac{(-A)^j}{j!} (Q(\mathfrak{a}) . L^j(b)).$$

D'autre part on sait que $Q(\mathfrak{a}) \in \ker L$

$$Q(\mathfrak{a}) . L^j(b) = L^j(Q(\mathfrak{a}) . b)$$

et donc

$$Q(A, L)(\mathfrak{a} . b) = Q(Q(\mathfrak{a}) . b)$$

et donc en particulier
si $\mathfrak{a} \in \ker Q$, $\mathfrak{a} . b \in \ker Q$

$$\ker Q . \mathbf{a} \subset \ker Q.$$

DÉFORMATIONS D'ALGÈBRE CONTRAINTES

PROPOSITION XIII. – *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C}; +; .)$ *une algèbre associative admettant au sens des séries formelles une famille de lois associatives* $*(h)$; *notons*:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{a}, b] * (h) &= \mathfrak{a} * (h) b - b * (h) \mathfrak{a} \\
&= \mathfrak{a} . b - b . \mathfrak{a} + \sum_{n \geqq 1} h^n w_n(\mathfrak{a}, b)
\end{aligned}$$

Soit $b_0 \in \mathbf{a}(\mathbb{C}; +; .)$ *et* $L b_0$ *la dérivation* $L\, b_0(\mathfrak{a}) = b_0 . \mathfrak{a} - \mathfrak{a} . b_0$. *Supposons que* $L\, b_0$ *admette un inverse à droite* Γ *et* $Q = 1 - \Gamma L b_0$. *Alors l'algèbre associative* $\ker L b_0 \in \mathrm{Com}(\mathbf{a}(\mathbb{C}; .); b_0)$ *est vectoriellement isomorphe à* $\mathbf{a}/\ker Q$ *et il existe une application linéaire unqiue* $T(h)$, *série formelle en* h

$$T(h) : \mathrm{Ker}\, L b_0 \to \mathrm{Com}(\mathbf{a}(\mathbb{C}; *(h)); b_0)$$

qui vérifie:

$$Q(T(h) \mathfrak{a}) = Q(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} = \forall \mathfrak{a} \in \mathrm{Ker}\, L b_0$$
$$\forall h \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. – On cherche $\mathfrak{a}(h)$ sous la forme

$$\mathfrak{a}(h)=\mathfrak{a}+h\,\mathfrak{a}_1+\ldots+h^n\,\mathfrak{a}_n+\ldots$$

qui vérifie $[\mathfrak{a}(h), b_0] * (h)=0$.

On peut donc définir si $\mathfrak{a}\in\ker \mathrm{L}\, b_0$

$$\mathfrak{a}_1=\Gamma\, w_1(\mathfrak{a}_0, b_0) \quad (\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a})$$
$$\mathfrak{a}_2=\Gamma\,(w_1(\mathfrak{a}_1, b_0)+w_2(\mathfrak{a}_0, b_0))$$
$$\mathfrak{a}_n=\Gamma\left(\sum_{p\geqq 1}^{n} w_p(\mathfrak{a}_{n-p}; b_0)\right).$$

Donc l'application construite $\mathrm{T}(h)$

$$\mathfrak{a}\to \mathrm{T}(h)(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}+\sum_{n\geqq 1} h^n\,\mathfrak{a}_n$$

est linéaire et par construction

$$\mathrm{Q}(\mathfrak{a}(h)-\mathfrak{a})=0 \quad \text{parce que} \quad \mathrm{Q}\,\Gamma=0.$$

De plus, si l'on impose la condition que $\mathfrak{a}(h)$ soit une série formelle en h, $\mathfrak{a}_1$ doit vérifier l'équation

$$[\mathfrak{a}_1, b_0]+w_1(\mathfrak{a}_0, b_0)=0$$

donc $\mathfrak{a}_1$ est défini à un élément de $\mathrm{Q}(\mathbf{a})=\ker \mathrm{L}\, b_0$ près; si on impose la condition

$$\mathrm{Q}(\mathfrak{a}(h)-\mathfrak{a})=0).$$

Par dérivation par rapport à h on obtient

$$\mathrm{Q}(\mathfrak{a}_1)=0 \text{ et donc } \mathfrak{a}_1=\Gamma\, w_1(\mathfrak{a}_0, b_0)$$

et par dérivations successives on obtient l'unicité de $\mathfrak{a}(h)$.

Proposition XIV. – *Le cas où l'algèbre* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\,+;\,.)$ *est commutative, est similaire.*

Proposition XV (Déformation de sous algèbres contraintes et Théorie des Perturbations des Inverses à droite). – *Soit* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\,+)$ *un espace vectoriel muni de lois* . *et* $*$ *distributives par rapport à l'addition et associatives.*

Soit:

L_0 *une dérivation pour l'algèbre* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\,+;\,.)$.

L *une dérivation pour l'algèbre* $\mathbf{a}(\mathbb{C};\,+;\,*)$.

Soit Γ_0 *un inverse à droite de* L_0, *et soit* $\mathrm{P}_0=\Gamma_0\mathrm{L}_0$ *et* $\mathrm{Q}_0=1-\Gamma_0\,\mathrm{L}_0$ *les projections supplémentaires associées à* Γ_0 *d'après la proposition* XI;

$$\mathrm{Q}_0:\mathbf{a}/\ker \mathrm{Q}_0 \leftrightarrow \mathrm{Q}_0(\mathbf{a})=\ker \mathrm{L}_0$$

supposons que l'opérateur $1+\Gamma_0(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$ *soit inversible c'est-à-dire qu'il existe un opérateur linéaire* T *noté* $[1+\Gamma_0(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)]^{-1}$ *tel que*:

$$\mathrm{T}(1+\Gamma_0(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0))=(1+\Gamma_0(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0))\,\mathrm{T}=\mathbf{1} \quad \textit{sur } \mathbf{a}.$$

Alors

(*a*) *Il existe un inverse à droite* Γ *unique de la dérivation* $L:\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *)\rightarrow\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *)$ *Tel que* $\Gamma L=P$ *et* $\Gamma_0 L_0=P_0$ *satisfassent* $P=P_0P$; $P_0=PP_0$, *c'est-à-dire* $\mathrm{Rang}\,P=\ker\ Q=\ker Q_0=\mathrm{Rang}\ P_0$, *et* $Q_0Q=Q_0$; $QQ_0=Q$.

(*b*) $\ker L_0\approx\mathbf{a}/\ker Q_0=\mathbf{a}/\ker Q\approx\ker L$ *et donc* $\ker L_0$ *est une sous algèbre de* $\mathbf{a}(\mathbb{C};.)$ *qui peut être muni d'une loi associative* $\tilde{*}$:

$$\begin{gathered}\mathfrak{a}_0, b_0\in\ker L_0\\ \mathfrak{a}_0\,\tilde{*}\,b_0=Q_0(Q(\mathfrak{a}_0)*Q(b_0)).\end{gathered}$$

Remarque. — Le critère le plus simple pour étudier l'invertibilité de l'opérateur $1+\Gamma_0(L-L_0)$ et de s'assurer de l'existence de l'opérateur défini par la série $1-\Gamma_0(L-L_0)+\ldots(-\Gamma_0(L-L_0))^n+\ldots$

Démonstration. — Supposons qu'il existe un inverse à droite de l'opérateur L :

$$L\Gamma=1$$

tel que :

$$\begin{gathered}\Gamma L=P=P_0P\\ \Gamma=\Gamma L\Gamma=P_0\Gamma\\ \Gamma=\Gamma_0L_0\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_0(L_0-L)\Gamma\\ [1+\Gamma_0(L-L_0)]\Gamma=\Gamma_0\end{gathered}$$

si $1+\Gamma_0(L-L_0)$ est inversible Γ est unique et vérifie

$$\Gamma=[1+\Gamma_0(L-L_0)]^{-1}\Gamma_0.$$

De plus on a :

$$[1+\Gamma_0(L-L_0)][1+\Gamma_0(L-L_0)]^{-1}=1$$

et donc en composant à droite avec Γ_0, on obtient

$$\Gamma=\Gamma_0-\Gamma_0(L-L_0)[1+\Gamma_0(L-L_0)]^{-1}\Gamma_0$$

et puisque $P_0=\Gamma_0L_0\quad P_0\ \Gamma_0=\Gamma_0$ on obtient $P_0P=P$.

D'autre part on a aussi la relation :

$$[1+\Gamma_0(L-L_0)]^{-1}[1+\Gamma_0(L-L_0)]=1$$

en composant à droite avec Γ_0 on obtient :

$$[1+\Gamma_0(L-L_0)]^{-1}\Gamma_0[1+(L-L_0)\Gamma_0]=\Gamma_0$$

et donc

$$\Gamma[1+(L-L_0)\Gamma_0]L_0=P_0$$

puisque $P\Gamma=\Gamma$ on obtient $PP_0=P_0$.

En conclusion si $1+\Gamma_0(L-L_0)$ est inversible, il existe un opérateur unique Γ inverse à droite de L, tel que $P=P_0\ P$ et $P_0=PP_0$ et donc

$\operatorname{Rang} P \subset \operatorname{Rang} P_0$ et $\operatorname{Rang} P_0 \subset \operatorname{Rang} P$

$$\operatorname{Rang} P = \operatorname{Rang} P_0$$

c'est-à-dire

$$\ker Q = \ker Q_0$$

ou encore

$$Q_0 Q = Q_0 \quad \text{et} \quad QQ_0 = Q$$

D'après la proposition XI,

$$\ker L_0 = Q_0(\mathbf{a}) \approx \mathbf{a}/\ker Q_0 = \mathbf{a}/\ker Q \approx Q(\mathbf{a}) = \ker L.$$

En particulier on a construit un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\ker L_0$ et $\ker L$ et donc les deux différentes structures d'algèbre induisent respectivement sur l'autre une nouvelle loi d'algèbre associative :

Explicitement, Γ_0 étant choisi (par exemple en utilisant les propositions X et XII) $P_0 = \Gamma_0 L_0$, $Q_0 = 1 - P_0$ sont définis, et si $1 + \Gamma_0(L - L_0)$ est inversible Γ est explicite ainsi que $Q = 1 - \Gamma L$ et sur $Q_0(\mathbf{a}) = \ker L_0$, on obtient deux structures d'algèbre associative, par les produits . et $\tilde{*}$ a_0, $b_0 \in \ker L_0$.

$a_0 . b_0$ parce que $\ker L_0$ est une sous algèbre de $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ .)$

et

$a_0 \tilde{*} b_0 = Q_0(Q(a_0) * Q(b_0))$.

L'associativité implicite peut se vérifier directement

$$a_0 \tilde{*} (b_0 \tilde{*} c_0) = Q_0(Q(a_0) * QQ_0(Q(b_0) * Q(c_0))).$$

En utilisant le fait que $QQ_0 = Q$ et l'associativité de la loi $*$ dans $\mathbf{a}(\mathbb{C};\ +;\ *)$

$$\begin{aligned} a_0 \tilde{*} (b_0 \tilde{*} c_0) &= Q_0((Q(a_0) * Q(b_0)) * Q(c_0)) \\ &= Q_0(QQ_0(Q(a_0) * Q(b_0)) * Q(c_0)) \\ &= Q_0(Q(a_0) * Q(b_0)) \tilde{*} c_0 \\ &= (a_0 \tilde{*} b_0) \tilde{*} c_0. \end{aligned}$$

REMERCIEMENTS

Je remercie C. Duval, J. Elhadad, M. Dubois-Violette, A. Jadczyk et R. Coquereaux pour des discussions sur des sujets plus ou moins voisins et en particulier sur [6].

RÉFÉRENCES

[1] F. TREVES, *Introductions to Pseudo Differential and Fourier Integral Operators*, vol. **I, II**, Plenum Press.

[2] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Springer-Verlag, 1985.

[3] E. MOURRE, Absence of Singular Continuous Spectrum for Certain Self-Adjoint Operators, *C.M.P.*, vol. **78**, 1981.

[4] E. MOURRE, Opérateurs conjugués et propriétés de propagations, *C.M.P.*, vol. **91**, 1983.

[5] P. B. GILKEY, Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singuer Index Theorem, *Math. Lect. Ser.*

[6] C. DUVAL, J. ELHADAD et G. M. TUYNMAN, *The BRS Method and Geometric Quantization: Some Examples.*

(*Manuscrit reçu le* 27 *avril* 1989.)
(*Version révisée acceptée le* 12 *mars* 1990.)