

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. VEY

## **Verres de spin**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 38, n° 3 (1983), p. 255-262

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1983\\_\\_38\\_3\\_255\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1983__38_3_255_0)

© Gauthier-Villars, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## Verres de spin (\*)

par

J. VEY (\*\*)

---

**RÉSUMÉ.** — On donne une formulation cohomologique du modèle de frustration sur un complexe polyédral quelconque.

**ABSTRACT.** — A cohomological formulation of the frustration model is given for an arbitrary polyhedral complex.

---

### PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Activement étudié par les physiciens [1], le problème des verres de spin a beaucoup avancé au cours des deux dernières années, en particulier grâce à une meilleure confrontation entre la théorie et l'expérience. En ce qui concerne l'approche spécifique du modèle de la frustration, un progrès récent [2] a été accompli, en dimension deux, en utilisant des techniques de la recherche opérationnelle (algorithme d'Edmonds) et une équivalence avec le problème du postier chinois. En dimension 3, il y a changement de complexité algorithmique du problème, ce qui pose des questions non résolues.

L'article de J. Vey porte sur l'étude des configurations de spins, à température nulle, d'un modèle d'Ising, où les couplages sont contradictoires (modèle de frustration) c'est-à-dire où aucune configuration ne peut satisfaire simultanément tous les couplages. Les physiciens avaient énoncé

---

(\*) Cet article est le résumé d'un séminaire donné par l'auteur quelques mois avant sa mort, dans le cadre du groupe de travail de Mécanique Statistique, à l'Université de Grenoble. Le texte de présentation a été rédigé par R. Rammal et G. Toulouse.

(\*\*) Décédé.

empiriquement une règle de couplage pour rechercher les configurations optimales. Dans cet article, J. Vey donne une formulation cohomologique de ce problème, sur un complexe polyédral quelconque, qui permet de formaliser et de généraliser la règle des physiciens, en soulignant le rôle central des groupes de cohomologie du complexe.

## INTRODUCTION

Soit  $K$  un complexe polyédral dans le plan ou dans l'espace, et soit  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble donné d'arêtes, qui seront dites arêtes inversées. Une distribution de spins sur les sommets de  $K$  pourra être considérée comme une application de l'ensemble des sommets dans le corps à deux éléments  $F_2$ , c'est-à-dire comme une 0-cochaîne sur  $K$ . Une arête  $a$  sera dite frustrée par la distribution de spin  $\sigma$  dans les deux cas suivants : ou bien  $a$  est inversée, et les spins aux deux bouts sont égaux ; ou bien  $a$  est normale, et les spins aux deux bouts sont différents. L'énergie  $E(\sigma, \mathcal{S})$  de  $\sigma$  en présence de l'inversion  $\mathcal{S}$  sera par définition le nombre d'arêtes frustrées ; et le fondamental  $E_0(\mathcal{S})$  de l'inversion  $\mathcal{S}$  sera le minimum de  $E(\sigma, \mathcal{S})$   $\sigma$  variant dans  $C^0(K, F_2)$ .

### 1. FORMULATION COHOMOLOGIQUE

Précisons d'abord la formulation cohomologique du problème. On note  $C^p(K, F_2)$ , ou  $C^p(K)$ , l'ensemble des  $p$ -cochaînes sur  $K$  à valeurs dans  $F_2$ , c'est-à-dire des applications de l'ensemble des faces de dimension  $p$  de  $K$  dans  $F_2$  : la donnée d'une  $p$ -cochaîne  $f$  revient donc à marquer un certain nombre de  $p$ -faces de  $K$ , celles à qui  $f$  attribue la valeur  $1 \in F_2$ , tandis qu'elle donne la valeur 0 aux autres. Par exemple, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des arêtes inversées peut être considéré comme une 1-cochaîne. En général, j'appellerai norme d'une  $p$ -cochaîne  $f$ , notée  $|f|$ , le nombre de  $p$ -faces marquées par  $f$ .

Définissons maintenant la différentielle  $d : C^p(K) \rightarrow C^{p+1}(K)$  : si  $f \in C^p(K)$ , et si  $F$  est une  $(p+1)$ -face de  $K$ ,  $df(F)$  sera la somme des  $f(F')$ ,  $F'$   $p$ -face adhérente à  $F$ . Par exemple, si  $\sigma \in C^0(K)$  est une distribution de spins, et  $a$  une arête,  $d\sigma(a) = 0$  si les spins aux deux bouts de  $a$  sont identiques, et  $d\sigma(a) = 1$  s'ils sont différents (on prendra garde que dans le corps  $F_2$ ,  $1 + 1 = 0$ ). On note traditionnellement  $Z^p(K)$  l'ensemble des  $p$ -cocycles, c'est-à-dire des  $f \in C^p(K)$  telles que  $df = 0$  ;  $B^p(K)$  l'ensemble des  $p$ -cobords, c'est-à-dire des images  $dg$ ,  $g \in C^{p-1}(K)$  ; on a une inclusion  $B^p(K) \subset Z^p(K)$ , c'est-à-dire que  $dd = 0$  ; le quotient  $H^p(K) = Z^p(K)/B^p(K)$  (quotient d'espaces vectoriels sur  $F_2$ ) s'appelle le  $p^{\text{ième}}$  groupe de cohomologie.

logie de  $K$  à coefficients dans  $F_2$ . L'important pour ce qui suit, c'est que le calcul des  $H^p$  est un des offices ordinaires de la topologie algébrique, et que ces groupes ont tendance à être petits, contrairement aux  $C^p$ ,  $Z^p$ ,  $B^p$ . Il suffira de dire, pour fixer les idées, que si  $K$  est simplement connexe,  $H^1(K) = 0$ , et donc  $Z^1(K) = B^1(K)$ .

Venons-en à la frustration.

LEMME 1. — Soit  $\mathcal{J} \in C^1(K)$ , la cochaîne des inversions, et  $\sigma \in C^0(K)$  une distribution de spins. Alors

$$E(\sigma, \mathcal{J}) = |\mathcal{J} + d\sigma|.$$

En effet supposons l'arête  $a$  marquée par  $\mathcal{J} + d\sigma$  : c'est ou bien que  $\mathcal{J}$  la marque, mais pas  $d\sigma$ ; ou bien que  $\mathcal{J}$  l'annule, et que  $d\sigma$  la marque. Dans le premier cas, l'arête est inversée, et les spins à ses bouts sont égaux : elle est donc frustrée; dans le second cas, l'arête est normale, et les spins à ses bouts sont différents : elle est donc encore frustrée; et ce sont là les deux cas de frustration.

Il est habituel de dire qu'une plaquette (c'est-à-dire une 2-face de  $K$ ) est frustrée si elle borde un nombre impair d'arêtes inversées : cela revient très exactement à dire qu'elle est marquée par le 2-cobord  $d^2\mathcal{J}$  : ce dernier s'identifie ainsi à l'ensemble des plaquettes frustrées.

PROPOSITION 1. — Supposons  $H^1(K) = 0$ . Alors le fondamental de l'inversion

$$E_0(\mathcal{J}) = \inf_{\mathcal{J}' \in C^1(K), d\mathcal{J}' = d\mathcal{J}} |\mathcal{J}'|$$

ne dépend que de la disposition des plaquettes frustrées.

En effet  $E_0(\mathcal{J})$  est le minimum de  $|\mathcal{J} + d\sigma|$  pour  $\sigma \in C^0(K)$ . Mais comme  $Z^1(K) = B^1(K)$ , une 1-cochaîne  $\mathcal{J}'$  se met sous la forme  $\mathcal{J} + d\sigma$  si et seulement si  $d\mathcal{J} = d\mathcal{J}'$ , CQFD.

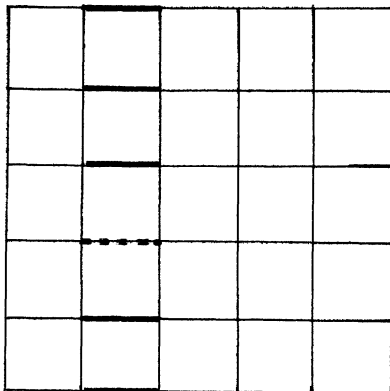


FIG. 1.

Il est facile de mettre cet énoncé en défaut si  $H^1(K) \neq 0$ . Par exemple, sur le réseau carré torique de la figure 1 (les bords opposés étant identifiés) on a marqué en pointillé l'inversion  $\mathcal{I}_1$ , en trait plein l'inversion  $\mathcal{I}_2$  : elles ont les mêmes plaquettes frustrées. Mais  $E_0(\mathcal{I}_1) = 1 \neq E_0(\mathcal{I}_2) = 4$  (voir plus loin). Aussi bien, la cochaîne  $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$  ne frustre aucune plaquette, mais son fondamental vaut 5 ; cette cochaîne est un cocycle, mais pas un cobord.

## 2. DUALITÉ

Pour avoir une intuition géométrique plus facile, il peut être commode de dualiser le problème comme suit. En général, soit  $n$  la dimension du polyèdre  $K$ . Correspondant à chaque  $p$ -face  $F$  de  $K$ , son dual  $K^*$  possédera une  $(n - p)$ -face  $F^*$  ; et les relations d'incidence sont inversées : une  $(n - p)$ -face  $F^*$  adhère à une  $(n - p + 1)$ -face  $G^*$  de  $K^*$  si et seulement si la  $(p - 1)$ -face correspondante  $G$  adhère à la  $p$ -face  $F$ .

Pour  $n = 2$ , le dual  $K^*$  se dessine assez facilement : on marque au centre de la face  $F$  de  $K$  le sommet  $F^*$  de  $K^*$ , et on dessine l'arête  $A^*$  correspondant à une arête  $A$  de  $K$  transversalement à celle-ci ; un sommet  $S$  de  $K$  se retrouve alors au milieu de la face  $S^*$  de  $K^*$ . Par exemple pour un réseau carré  $K$  comme celui de la figure 2 (en trait fin), le dual  $K^*$  (trait épais) est un réseau carré, modulo les questions de bord. Si  $K$  est torique (bords opposés identifiés) alors sur la figure, chaque bout d'arête duale apparemment libre se raccorde à l'autre bout libre sur la même horizontale ou verticale, si bien que  $K^*$  est un réseau torique isomorphe à  $K$ . Mais si  $K$  est à bord libre, les bouts libres sur la figure le sont effectivement : ces arêtes n'ont qu'une extrémité, parce qu'elles sont duales d'arêtes qui ne bordent qu'une face. Pareillement, aux sommets du bord de  $K$ , qui ne jouxtent que 3, voire

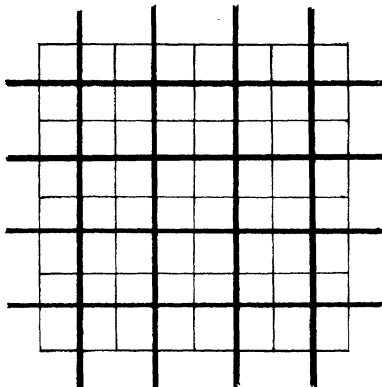


FIG. 2.

2 côtés. On peut se représenter ces arêtes déficitaires en extrémités comme mises à la masse. Leur maniement ne présente d'ailleurs pas de difficulté.

Revenons au cas général pour définir l'application de Poincaré. A la  $p$ -cochaîne  $f$  sur  $K$ , définie par les  $p$ -faces  $F_1, \dots, F_{|f|}$  qu'elle marque sur  $K$ , on associe la  $(n - p)$ -chaîne de  $K^*$

$$f^* = F_1^* + F_2^* + \dots + F_{|f|}^*.$$

Il est évident que  $|f^*| = |f|$ ; et on vérifie sans difficulté que  $(df^*) = \partial f^*$ ,  $\partial$  notant la différentielle des chaînes (i. e. le bord).

### 3. LE PROBLÈME EN DIMENSION 2

Supposons pour commencer la dimension de  $K$  égale à 2. Soit  $\mathcal{I}$  une inversion d'arêtes :  $\mathcal{I} \in C^1(K)$ . On forme  $\mathcal{I}^* \in C_1(K^*)$  :  $\partial \mathcal{I}^* = (d\mathcal{I})^*$ , c'est-à-dire que le bord  $\partial \mathcal{I}^*$  est la somme des centres des plaquettes frustrées (ces centres sont des sommets de  $K^*$ ).

**PROPOSITION 2.** — *Supposons la dimension de  $K$  égale à 2 et  $H^1(K) = 0$ . Soit  $\mathcal{I}$  une inversion d'arêtes sur  $K$  : on a*

$$E_0(\mathcal{I}) = \inf \{ |\gamma| : \gamma \in C_1(K^*), \partial \gamma = \partial \mathcal{I}^* \}$$

C'est la proposition 1 dualisée, et c'est aussi l'algorithme des plaquettes frustrées : le fondamental est la longueur *minima* d'une chaîne connexe ou non d'arêtes duales qui joigne entre eux les centres des plaquettes frustrées. On aura garde, en cas de bord libre, qu'il peut être plus avantageux de mettre un sommet de  $\partial \mathcal{I}^*$  à la masse que de le joindre à un autre. La figure 3 peut donner une idée du phénomène : la chaîne  $\mathcal{I}^*$  est en trait plein, et la chaîne minimisante  $\gamma$  (avec  $\partial \gamma = \partial \mathcal{I}^*$ ) est en pointillé.

Encore une remarque : soit  $\sigma \in C^0(K)$  une distribution de spins qui réalise le fondamental, et  $\sigma^* \in C_2(K^*)$  sa chaîne duale. Cette dernière est déterminée par l'équation

$$\partial \sigma^* = \mathcal{I}^* - \gamma$$

et donc  $|\sigma| = |\sigma^*|$  apparaît facilement sur la figure comme l'aire hachurée (lorsque les hachures débordent sur la masse, il faut comprendre que les 2-faces infinies ont elles aussi une aire unité). Compte tenu du fait que les distributions opposées  $\sigma$  et  $1 - \sigma$  ont même différentielle et donc même énergie, il vaut mieux pour la mesure de l'aimantation utiliser non pas  $|\sigma|$ , mais plutôt

$$|(\text{nombre de sommets}) - 2|\sigma||$$

c'est-à-dire

$$|(\text{nombre de sommets avec spin } +) - (\text{nombre de sommets avec spin } -)|.$$

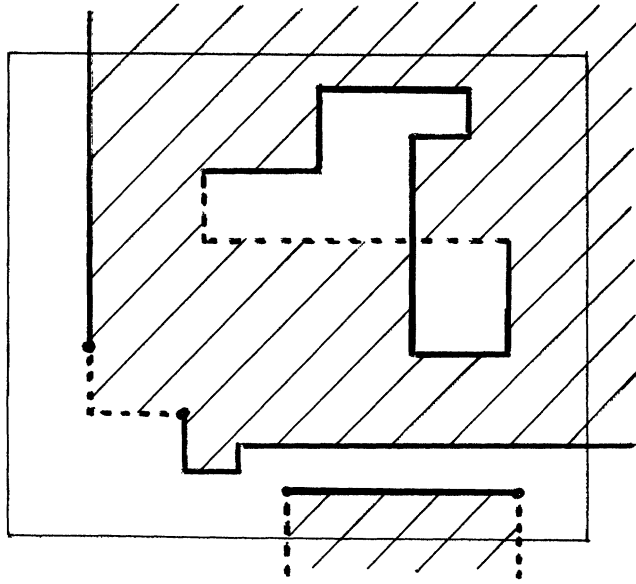


FIG. 3.

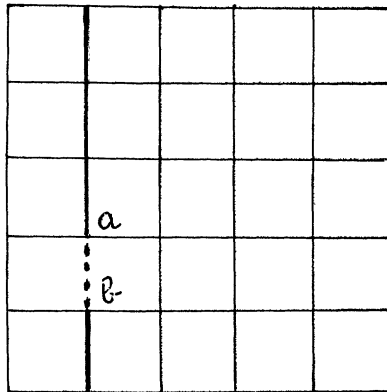


FIG. 4.

Dans le cas général où  $H^1(K) \neq 0$ ,  $E_0(\mathcal{I})$  est la longueur *minima* d'une 1-chaîne  $\gamma \in C_1(K^*)$  de même bord que  $\mathcal{I}^*$ , le cycle  $\gamma - \mathcal{I}^*$  devant être un bord (ce qui était automatique avec  $H_1(K^*) = H^1(K) = 0$ ). Traitons l'exemple de la fin du n° 1. Après dualité, on obtient la figure 4 (les bords opposés sont identifiés), où  $\mathcal{I}_1^*$  est en pointillé et  $\mathcal{I}_2$  en trait plein. Parmi les 1-chaînes de bord  $a + b$ ,  $\mathcal{I}_1^*$  réalise le minimum de longueur donc  $E_0(\mathcal{I}_1) = 1$ . Comme  $\partial \mathcal{I}_1^* = \partial \mathcal{I}_2^* = a + b$ , on pourrait, dans la recherche

du  $E_0(\mathcal{S}_2)$ , essayer de remplacer  $\mathcal{S}_2^*$  par  $\mathcal{S}_1^*$ . Mais le 1-cycle  $\mathcal{S}_1^* - \mathcal{S}_2^*$  ne borde aucune 2-chaîne. Cette possibilité barrée, on se convainc facilement que le minimum est réalisé par  $\mathcal{S}_2^*$  elle-même, et que  $E_0(\mathcal{S}_2) = 4$ .

Cet exemple a ceci d'exceptionnel que le fondamental est réalisé par une unique chaîne. D'abord étant donné deux sommets de  $K$ , il est rare que leur distance dans le réseau soit réalisée par un chemin de  $K$  unique ; pour un réseau carré où les deux points ont une distance en projection horizontale (resp. verticale) de  $\Delta x$  (resp.  $\Delta y$ ) ( $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont des entiers  $\geq 0$ ), la distance dans  $K$  est  $\Delta x + \Delta y$ , et elle est atteinte par tout chemin dans  $K$  joignant les deux points, et le long duquel l'abscisse et l'ordonnée varient de façon monotone : il y a  $(\Delta x + \Delta y)! / (\Delta x)! (\Delta y)!$  tels chemins. Ensuite le couplage des points de la 0-chaîne  $\partial \mathcal{S}^*$  minimal n'est pas forcément unique ; mais sur cette question je n'ai rien à ajouter aux travaux de Uhry *et al.* [2] (sinon qu'en cas de bord libre, on doit prendre en compte la possibilité de mettre à la masse certains des sommets de  $\partial \mathcal{S}^*$ ).

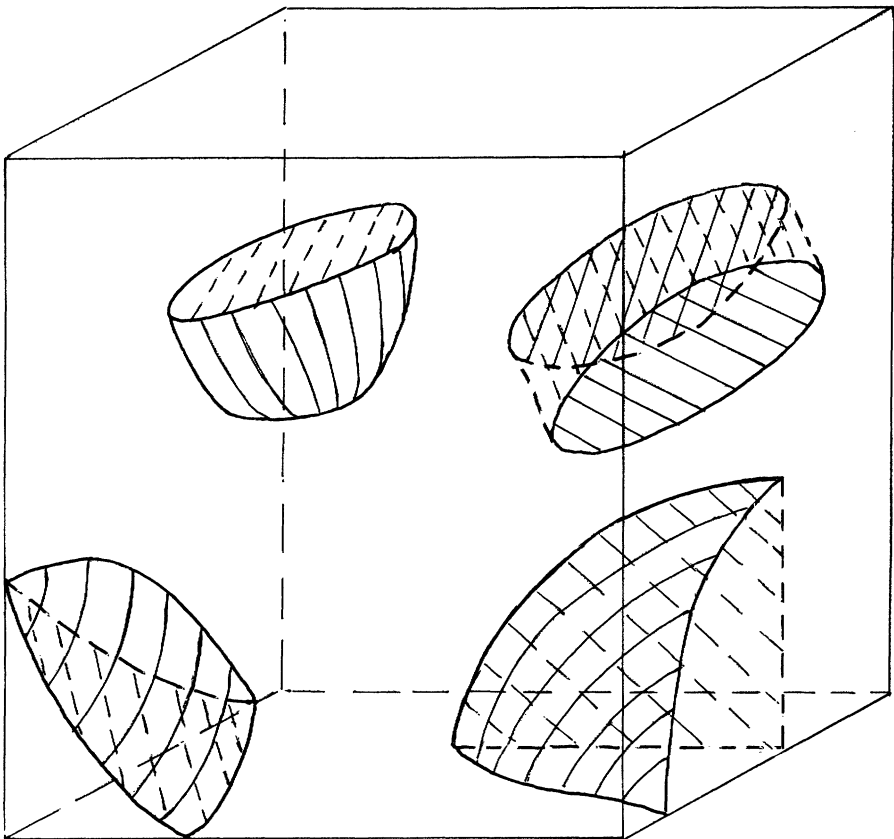


FIG. 5.



#### 4. LE PROBLÈME EN DIMENSION 3

Voyons maintenant comment les choses se présentent en dimension 3. La cochaîne des inversions étant toujours dans  $C^1(K)$ , sa duale  $\mathcal{I}^* \in C_2(K^*)$  est une 2-chaîne de  $K$ , et à la cochaîne  $d\mathcal{I} \in B^2(K)$  des plaquettes frustrées répond le *bord frustré*  $\partial\mathcal{I}^* \in B_1(K^*)$ , qui est une certaine réunion finie de « courbes » fermées dans  $K^*$  ou dont les extrémités sont mises à la masse.

Le fondamental  $E_0(\mathcal{I})$  apparaît maintenant comme l'aire minimale d'une 2-chaîne  $\gamma$  qui borde (elle aussi) le bord frustré  $\partial\mathcal{I}^*$ , le 2-cycle de  $K^*$   $\gamma - \mathcal{I}^*$  étant astreint de plus à être un bord (plus précisément : à être le bord d'une 3-chaîne  $\sigma^*$  de  $K^*$ , qui sera la duale de la distribution de spin  $\sigma \in C^0(K)$  du fondamental;  $|\sigma^*| = |\sigma|$  montre ainsi l'aimantation du fondamental). S'il se trouve que  $H^1(K) = 0$ , alors  $H_2(K^*) = 0$  et il devient automatique qu'un 2-cycle borde. On se retrouve alors face à un problème de Plateau simplicial, suivi à nouveau d'un problème de couplage minimal. C'est ce que la figure 5 essaie d'illustrer :  $\partial\mathcal{I}^*$  est en trait plein,  $\mathcal{I}^*$  en hachuré plein,  $\gamma$  en hachuré pointillé, les bords de  $K$ , non dessinés, sont libres, ce qui amène des mises à la masse au bord de  $K^*$ ; enfin on a abusivement dessiné comme courbes et surfaces lisses les 1-chaînes et les 2-chaînes d'arêtes ou de faces de  $K^*$ .

#### RÉFÉRENCES

- [1] G. TOULOUSE, Comptes rendus du Congrès de la Société Française de Physique à Clermont-Ferrand, 1981. à paraître dans le *Journal de Physique*, 1982.  
R. RAMMAL, J. SOULETIE, *Proc. of the Les Houches Winter School*, ed. by M. Cyrot (North-Holland, 1981).
- [2] L. BIECHE, R. MAYNARD, R. RAMMAL, J. P. UHRY, *J. Phys.*, t. A **13**, 1980, p. 2553.  
F. BARAHONA, R. MEYNARD, R. RAMMAL, J. P. UHRY, *J. Phys.*, t. A **15**, 1982.

(Manuscrit reçu le 2 mars 1982).