

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

**Algèbres et faisceaux d'algèbres de Lie graduées,
associées à des espaces spinoriels et fibrations
spinorielles par un principe de trialité**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 37, n° 2 (1982), p. 185-199

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1982__37_2_185_0

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Algèbres et faisceaux d'algèbres de Lie graduées, associées à des espaces spinoriels et fibrations spinorielles par un principe de trialité

par

A. CRUMEYROLLE

Département de Mathématiques,
Université Paul Sabatier, Toulouse

RÉSUMÉ. — On se propose de montrer que la donnée d'une structure spinorielle détermine par un principe de trialité affaibli des algèbres de Lie graduées, retrouvant ainsi dans un cadre naturel unifié les plus intéressantes de certaines algèbres de Lie graduées introduites assez formellement dans la littérature par divers auteurs. Notre méthode permet de construire naturellement des faisceaux d'algèbres de Lie graduées associées à des fibrations spinorielles.

I. L'ALGÈBRE D'INTERACTION, RAPPELS

On s'appuie sur les résultats déjà donnés dans l'article [3, *a*] du même auteur.

E est un espace vectoriel de dimension réelle $n = 2r$, complexifié en $E_{\mathbb{C}}$ ou E' , la « métrique » Q de E (de signature quelconque) étant elle-même complexifiée en Q' . $C(Q)$ et $C(Q')$ désignent les algèbres de Clifford correspondantes, f est un r -vecteur isotrope déterminant un espace spinoriel $S = S^+ \oplus S^-$, avec des notations classiques. Nous écrivons $S = C(Q')f$, $uf \in S$, $u \in C(Q')$.

Une forme bilinéaire $\mathcal{B}$ est définie sur $S \times S$ par :

$\mathcal{B}(uf, vf)f = \beta(uf).vf$, β étant l'antiautomorphisme principal de $C(Q')$; on sait que :

$$\mathcal{B}(uf, vf) = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \mathcal{B}(vf, uf);$$

combinant β avec l'automorphisme principal α , $\beta \circ \alpha = \tilde{\beta}$ on obtient de même :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}(uf, vf)f &= \tilde{\beta}(uf).vf \quad \text{et} \\ \tilde{\mathcal{B}}(uf, vf) &= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \tilde{\mathcal{B}}(vf, uf). \end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ sont non dégénérées, soit symétriques, soit antisymétriques, $\tilde{\mathcal{B}}$ coïncide avec $\mathcal{B}$ sur $S^+ \times S$ et avec $-\mathcal{B}$ sur $S^- \times S$ [1]; si $r = 2, 3 \pmod{4}$ $\mathcal{B}$ est antisymétrique, si $r = 0, 1 \pmod{4}$ $\mathcal{B}$ est symétrique. Si $r = 1, 2$, $\tilde{\mathcal{B}}$ est antisymétrique; si $r = 0, 3$, $\tilde{\mathcal{B}}$ est symétrique.

Observons que $\mathcal{B}$ est nulle sur $S^+ \times S^-$ et $S^- \times S^+$ si r est pair, tandis que si r est impair $\mathcal{B}$ est nulle sur $S^+ \times S^+$ et $S^- \times S^-$: ces remarques expliqueront pourquoi nous devons plus bas distinguer plus d'un cas.

On introduit l'espace complexe $A = F \times S \simeq F \oplus S$, où F est un sous-espace de l'algèbre $C(Q')$, muni naturellement de la « métrique » qui étend Q et Q' , B est la forme bilinéaire associée à Q , $B(x, x) = Q(x)$. A est alors muni d'une forme bilinéaire Λ :

$$(1) \quad \Lambda(x + uf, x' + u'f) = B(x, x') + \mathcal{B}(uf, u'f) \quad x, x' \in F, \quad uf, u'f \in S$$

(resp. : $\tilde{\Lambda}(x + uf, x' + u'f) = B(x, x') + \tilde{\mathcal{B}}(uf, u'f)$); Λ (resp. $\tilde{\Lambda}$) est non dégénérée.

Sur A il est loisible d'introduire une forme cubique F_0 :

$$(2) \quad F_0(x + uf + u'f) = \mathcal{B}(xuf, u'f), \quad x \in F^-, \quad uf \in S^+, \quad u'f \in S^-$$

($F = F^+ \oplus F^-$), si r est pair,

et $x \in F^+$, $uf \in S^+$, $u'f \in S^-$, si r est impair. De F_0 se déduit par polarisation une forme trilinéaire symétrique Φ_0 sur $A \times A \times A$:

$$(3) \quad \Phi_0(\xi, \eta, \bar{\mathcal{C}}) = [F_0(\xi + \eta + \bar{\mathcal{C}}) + F_0(\xi) + F_0(\eta) + F_0(\bar{\mathcal{C}}) - F_0(\xi + \eta) - F_0(\eta + \bar{\mathcal{C}}) - F_0(\bar{\mathcal{C}} + \xi)].$$

On définit alors sur A une structure d'algèbre commutative, mais non associative, avec loi de composition $\circ$, telle que :

$$(4) \quad \Lambda(\xi \circ \eta, \bar{\mathcal{C}}) = \Phi_0(\xi, \eta, \bar{\mathcal{C}}), \quad \forall \bar{\mathcal{C}} \in A \quad [1; 3, a].$$

Il faut observer que si $\xi, \eta, \bar{\mathcal{C}}$ appartiennent respectivement à $F^\pm, S^+, S^-$, alors $F_0(\xi + \eta + \bar{\mathcal{C}}) = \Phi_0(\xi, \eta, \bar{\mathcal{C}})$ et $F_0(\omega) = 0$ si $\omega = \xi + \eta$, ξ et η appartenant à deux des espaces $F^\pm, S^+, S^-$ seulement. Dès lors il est facile de voir : que si r est pair (alors $x \in F^-$) :

$$(5) \quad \underline{F^- \circ S^+ \subseteq S^-}, \quad \underline{S^+ \circ S^- \subseteq F^-}, \quad \underline{S^- \circ F^- \subseteq S^+},$$

que si r est impair (alors $x \in F^+$) :

$$(6) \quad \underline{F^+ \circ S^+ \subseteq S^+}, \quad \underline{S^+ \circ S^- \subseteq F^+}, \quad \underline{S^- \circ F^+ \subseteq S^-},$$

les autres compositions sont identiquement nulles. On a des conclusions analogues avec $\tilde{\mathcal{B}}$, tenant compte de la parité de r .

Tout automorphisme de l'espace vectoriel A qui laisse Λ et F_0 invariantes est aussi un automorphisme de l'algèbre $(A, \circ)$.

Des calculs de routine montrent que si $g \in G_0^+$ (groupe de Clifford réduit spécial), ou même à G_0^+ qui correspond à l'algèbre $C(Q')$:

$guf \circ gu'f = g(uf \circ u'f)g^{-1}$, propriété d'équivariance pour l'action de G_0^+ sur l'espace des spineurs et sur $F^\pm$; de plus on voit facilement que l'application :

$$(uf, u'f) \rightarrow uf \circ u'f$$

est non dégénérée.

Cette situation permet de parler d'un principe de trialité affaibli [3, a] (*). Si $r = 4$, il existe un isomorphisme d'ordre 3 qui échange les espaces E', S^+, S^- , c'est le principe de trialité de E. Cartan [1].

II. ALGÈBRES DE LIE GRADUÉES ORTHOSYMPLECTIQUES ASSOCIÉES AU PRINCIPE DE TRIALITÉ AFFAIBLI. $n = 2r$

1) Algèbre de Lie graduée orthosymplectique $\text{Osp}(m, n)$.

Nous rappelons la définition d'une algèbre graduée orthosymplectique. Ici h est une forme bilinéaire non dégénérée sur un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$ -gradué :

$$V = V_0 \oplus V_1 = \bigoplus V_i, \quad i \in \mathbb{Z}_2,$$

$$\text{telle que : } \begin{cases} \Phi = h | V_0 \text{ est antisymétrique,} \\ g = h | V_1 \text{ est symétrique,} \\ h(V_0, V_1) = 0, \end{cases}$$

End V est gradué, soit $a \in \text{End } V$:

$$\begin{aligned} \text{si } a : V_i &\rightarrow V_i : |a| = 0, & (|a| \text{ se lit degré de } a) \\ \text{si } a : V_i &\rightarrow V_{i+1} : |a| = 1; \end{aligned}$$

End V devient une algèbre de Lie graduée en posant :

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba, \quad a, b \in \text{End}_i V, \quad i \in \mathbb{Z}_2.$$

(*) Au chap. II, n° 2, de [3, a], le lecteur remplacera G_0^+ par G_0^{+} et dans la proposition 1 « non dégénérées par dégénérées ou non ».

— Ici on rappelle que dans une algèbre de Lie graduée $G = G_0 \oplus G_1$:

$$[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$$

et
$$\sum_{P.C.} (-1)^{|a||b|}[a, [b, c]] = 0, \quad a, b, c \in G_i$$

Nous définissons maintenant :

$$(7) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_0 = \{ a \in \text{End}_0 V, h(ax, y) + h(x, ay) = 0, & \forall x \in V_i, \forall y \in V_i \} \\ \mathcal{G}_1 = \{ a \in \text{End}_1 V, h(ax, y) = h(x, ay), & \forall x \in V_1, \forall y \in V_0 \} \end{cases}$$

Si $a \in \mathcal{G}_1$, on a :

$$g(ax, y) = \Phi(x, ay), \quad \forall x \in V_1, \forall y \in V_0.$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} g(y, ax) &= -\Phi(ay, x) \\ h(x, ay) &= -h(ax, y), \quad \forall x \in V_0, \forall y \in V_1, \end{aligned}$$

de sorte que $\mathcal{G}_1$ peut encore se définir par :

$$\begin{aligned} &\{ a \in \text{End}_1 V, h(x, ay) = (-1)^{|y|}h(ax, y), \quad \forall y \in V_i, \forall x \in V_{i+1} \} \\ \text{ou } &\{ a \in \text{End}_1 V, h(x, ay) + (-1)^{|x|}h(ax, y) = 0, \quad \forall y \in V_i, \forall x \in V_{i+1} \}. \end{aligned}$$

De même on voit que $\forall a \in \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1, h(x, ay) + (-1)^{|x||a|}h(ax, y) = 0$ pour x et y de parités quelconques. Sur ce point le lecteur consultera plus bas l'appendice. On pose :

$$(8) \quad \text{Osp}(V_0, V_1) = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$$

ou si $\dim V_0 = m, \dim V_1 = n$

$$\mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 = \text{Osp}(m, n) : \text{c'est une algèbre de Lie graduée.}$$

2) Le principe de trialité affaibli et les algèbres de Lie orthosymplectiques.

Si $r = 1, 2, 3 \pmod{4}$ il est toujours possible, utilisant soit $\mathcal{B}$ soit $\tilde{\mathcal{B}}$ d'introduire sur les spineurs une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée invariante pour G_0^+ et $G_0'^+$. Dans la suite, sauf indication contraire, $\mathcal{B}$ sera lue $\mathcal{B}$ ou $\tilde{\mathcal{B}}$ selon la parité de r . Sur $F^\pm$ opère naturellement le groupe $G_0'^+$ par extension isométrique de l'action sur E' , tandis que G_0^+ opère comme une transformation symplectique sur l'espace des spineurs. Λ va donc jouer le rôle de h du (II, 1°), $F^\pm$ celui de V_1 , S celui de V_0 . Définissons :

$$\begin{aligned} uf(vf) &= vf(uf) = uf \circ vf, & uf, vf &\in S, \\ uf(x) &= x \circ uf = xuf, & x &\in F^\pm, \end{aligned}$$

de sorte que S opère sur $S \oplus F^\pm$ (somme directe formelle) et tout élément de S est un endomorphisme de degré 1 qui peut lui être identifié, car $(uf, vf) \rightarrow uf \circ vf$ est non dégénérée. Pour éviter certaines confusions nous pourrions écrire $uf(vf) = uf \perp vf$ quand nous composerons les applications ($\perp$ est une loi associative, $\circ$ ne l'est pas !). La condition (7) est bien satisfaite :

$$h(ax, y) = h(x, ay), \quad \forall x \in V_1, \quad \forall y \in V_0,$$

s'écrit ici :

$$\Lambda(uf(x), u'f) = \Lambda(x, uf(u'f)), \quad x \in F^\pm, \quad uf, u'f \in S,$$

soit :

$$\mathcal{B}(xuf, u'f) = B(x, uf \circ u'f),$$

mais les deux membres sont égaux à $F_0(x + uf + u'f)$.

Désignons par $\mathcal{L}(\underline{G'_0}^+)$ l'ensemble des endomorphismes de $S \oplus F^\pm$ associés à l'action de $\underline{G'_0}^+$, $\underline{G'_0}^+$ algèbre de Lie de G'_0 . Si $a \in \mathcal{L}(\underline{G'_0}^+)$ il est évident que a est de degré 0 et que a satisfait (7). Ainsi $\mathcal{L}(\underline{G'_0}^+) \oplus S$ constitue une algèbre de Lie graduée orthosymplectique.

Remarques. — L'algèbre de Lie $\underline{G'_0}^+$ est identique à celle de $\text{Spin } Q'$ (que l'on utilise une projection tordue ou non sur le groupe orthogonal $[3, b]$, notre algèbre est donc : $\mathcal{L}(\text{Spin } Q') \oplus S$.

Nous donnons maintenant la forme explicite des crochets gradués (en distinguant crochets et anti-crochets)

$$(9) \quad \{uf, vf\} = (uf \perp vf) + (vf \perp uf) = \sigma \in \mathcal{L}(\text{Spin } Q')$$

σ est la transformation $uf \circ (vf \circ \cdot) + vf \circ (uf \circ \cdot)$

$$(10) \quad [\sigma, \tau] = \nu, \quad \sigma, \tau, \nu \in \mathcal{L}(\text{Spin } Q'),$$

$$(11) \quad [\underline{uf}, \sigma] = \underline{wf}, \quad uf, wf \in S, \quad \sigma \in \mathcal{L}(\text{Spin } Q').$$

Si $a \in \text{Spin}(Q')$, algèbre de Lie de $\text{Spin } Q'$, alors il lui correspond σ , tel que

$$(12) \quad \begin{cases} \sigma(x) = ax - xa, & x \in F^\pm, \\ \sigma(vf) = avf, & vf \in S; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [uf, \sigma](x) &= \sigma(x)uf - \sigma(xuf) \\ &= (ax - xa)uf - axuf = -xau f, \\ [uf, \sigma](x) &= -(auf)(x), \\ [uf, \sigma](vf) &= uf \circ avf - \sigma(uf \circ vf) \\ &= uf \circ avf - a(uf \circ vf) + (uf \circ vf)a; \end{aligned}$$

mais pour $g \in G'_+, y \in F^\pm$,

$$\begin{aligned} B(guf \circ gu'f, y) &= \Phi_0(guf, gu'f, y) = \mathcal{B}(yguf, gu'f) \\ &= \mathcal{B}(g^{-1}yguf, u'f) = \Phi_0(g^{-1}yg, uf, u'f) \\ &= \Lambda(uf \circ u'f, g^{-1}yg) = B(uf \circ u'f, g^{-1}yg) \\ &= B(g(uf \circ u'f)g^{-1}, y) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit en dérivant sur un chemin issu de l'identité, tangent à a :

$$auf \circ u'f + uf \circ au'f = a(uf \circ u'f) - (uf \circ u'f)a,$$

ce qui donne:

$$[uf, \sigma](vf) = - (auf)(vf),$$

et compte tenu de (12)

$$(13) \quad [uf, \sigma(a)] = - auf = - \sigma(uf),$$

$\sigma(a)$ rappelant que σ vient de a .

Supposons que F^+ soit contenu dans un espace linéairement isomorphe à l'algèbre de Lie de Spin Q' ($r = 1$ ou 3 , nécessairement, mod 4 , de sorte que $\sigma(vf) = avf = a \circ vf$).

L'une des identités de Jacobi pour l'algèbre graduée s'écrit :

$$\sum_{P.C.} [uf, \{vf, wf\}] = 0$$

et d'après (13) :

$$\begin{aligned} \sum_{P.C.} \{vf, wf\}(uf) &= 0 \\ \sum_{P.C.} vf \circ (wf \circ uf) + wf \circ (vf \circ uf) &= 0 \\ (14) \quad \sum_{P.C.} (uf \circ wf) \circ vf &= 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} (uf \circ wf) \circ vf + (vf \circ wf) \circ uf &= - (vf \circ uf) \circ wf \\ \{uf, vf\}(wf) &= - (uf \circ vf) \circ wf \\ &= - (uf \circ vf)wf \\ &= [wf, \sigma_{uf \circ vf}] \end{aligned}$$

Dans ce cas $\{uf, vf\}$ s'identifie donc à $-(uf \circ vf)$.

3) Un exemple concernant la géométrie conforme.

E' est le complexifié de l'espace de Minkowski usuel, muni du repère de Witt spécial :

$$x_1 = \frac{e_1 + e_4}{2}, \quad x_2 = \frac{ie_2 + e_3}{2}, \quad y_1 = \frac{e_1 - e_4}{2}, \quad y_2 = \frac{ie_2 - e_3}{2}$$

avec $(e_4)^2 = -1$, $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = 1$, les e_i étant réels. On lui adjoint $x = \frac{e_0 + e_5}{2}$, $y = \frac{e_0 - e_5}{2}$, $(e_0)^2 = 1$, $(e_5)^2 = -1$, de manière que (x_1, x_2, x) et (y_1, y_2, y) constituent une base de Witt spéciale pour un espace E'_1 de dimension 6. Une base de l'algèbre de Lie du groupe orthogonal, $\underline{0(4, 2)}$ sera :

$a_{ij} = e_i e_j$, $1 \leq i < j \leq 4$ (base de $\underline{0(3, 1)}$),
 $e_0 e_5 = (x + y)(x - y) = yx - xy$ (correspond à une homothétie),
 $(e_0 + e_5)e_k = x e_k$, $1 \leq k \leq 4$ (correspond à une translation),
 $(e_0 - e_5)e_k = y e_k$, $1 \leq k \leq 4$ (correspond à une transformation conforme spéciale).

Un idéal minimal à gauche pour l'algèbre de Clifford $C(Q')$, encore notée $C'_{4,2}$ est $C(Q')fy$, $f = y_1 y_2$, $C(Q')fy \simeq xC'_{3,1}fy \oplus C'_{3,1}fy$, en somme directe de deux espaces spinoriels pour $C'_{3,1}$, chacun de dimension complexe 4. Si on s'intéressait aux semi-spineurs seulement on aurait deux espaces de dimension 2 seulement. On sait que l'algèbre de Lie du groupe $\text{Spin}(Q)$, $\underline{0(4, 2)}$, est isomorphe à celle du groupe conforme pour $\underline{0(3, 1)}$ et cette correspondance passe aux complexifiées. Les considérations du 2° donnent donc une algèbre de Lie graduée orthosymplectique de dimension complexe 23 qui contient l'algèbre de Lie conforme complexifiée (pour $\underline{0(3, 1)}$). Il est possible de choisir ici F^+ égal à l'algèbre extérieure en dimension 2 de E'_1 et $\mathcal{B}$ comme forme bilinéaire symplectique ($r = 3$).

Écrivant seulement les crochets et anticrochets qui concernent au moins un élément impair, nous obtenons la table suivante :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} [xufy, a] = -axufy \\ [ufy, a] = -aufy \end{array} \right\} a \in \underline{0'(3, 1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} [xufy, x e_k] = 0 & [xufy, y e_k] = e_k ufy \\ [ufy, y e_k] = 0 & [ufy, x e_k] = e_k(xufy) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [xufy, yx - xy] = xufy \\ [ufy, yx - xy] = -ufy \\ \{ufy, vfy\} = -ufy \circ vfy \\ \{ufy, xvfy\} = -ufy \circ xvfy \\ \{xufy, xvfy\} = -xufy \circ xvfy \end{array} \right.$$

On comparera ces résultats à ceux que l'on donne dans [2], page 589.

4) Autres constructions et remarques diverses.

α) Si on définissait, indépendamment des considérations précédentes : (mais à l'aide de (4), (5), (6) et de $\circ$ seuls) :

$$(16) \quad \begin{cases} \{uf, vf\} = uf \circ vf \\ [uf, x] = 0, & x \in F^\pm \\ [x, y] = 0, & x, y \in F^\pm \end{cases}$$

les conditions de Jacobi seraient identiquement vérifiées et on aurait une algèbre de Lie graduée commutative. Ce cas a été souvent considéré par une approche très différente il est vrai et purement formelle, dans la littérature, lorsque $r = 2$, $F^\pm = E'$, et il est alors facile de vérifier directement, utilisant l'article rappelé [3, a], pages 363, 364, que (14) est encore vérifiée.

β) La relation (14) est précisément l'une des identités de Jacobi quand on essaye de prendre pour définir une algèbre de Lie graduée le système de crochets et anti-crochets :

$$(17) \quad \begin{aligned} \{uf, vf\} &= (uf \circ vf) \\ [uf, x] &= -[x, uf] = x \circ uf = xuf \\ [x, y] &= x \circ y = 0 \end{aligned}$$

Les identités de Jacobi à vérifier sont, rappelons-le $\sum_{\text{P.C.}} [uf, \{vf, wf\}] = 0$ (équivalent à (14)), puis $[x, \{uf, vf\}] + \{[uf, x], vf\} + \{[vf, x], uf\} = 0$, soit :

$$(18) \quad (xuf \circ vf) + (xvf \circ uf) = 0$$

$$\text{et} \quad [x, [y, uf]] + [uf, [x, y]] + [y, [uf, x]] = 0,$$

soit $xyuf - xyuf = 0$ vérifiée identiquement. Supposons $F^\pm$ homogène, de degré k , après une identification de $C(Q')$ avec l'algèbre extérieure. Examinons (18) qui entraîne, B désignant l'extension,

$$B(xuf \circ vf, y) + B(xvf \circ uf, y) = 0, \quad \forall y \in F^\pm,$$

soit

$$\mathcal{B}(yxuf, vf) + \mathcal{B}(yxvf, uf) = 0.$$

Faisant $x = y$, avec $x^2 \neq 0$ scalaire, on voit que $\mathcal{B}$ (qui peut être lue $\mathcal{B}$ ou $\tilde{\mathcal{B}}$) doit être antisymétrique. Selon que l'on utilise β ou $\tilde{\beta}$ on a les relations d'équivariances respectives :

$$guf \circ gu'f = N(g)g.(uf \circ u'f)g^{-1}$$

ou

$$guf \circ gu'f = \tilde{N}(g)g.(uf \circ u'f)g^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{N}(g) = \pm N(g),$$

g étant un élément du groupe de Clifford, et ces relations sont valables pour des éléments x de $F^\pm$ homogènes, relativement à une base de l'algèbre

extérieure tels que $x^2 = N(x)$ soit un scalaire non nul, pris au lieu de g . De tels éléments engendrent linéairement $F^\pm$;

$$\begin{aligned} x(xuf) \circ xvf &= x^2(uf \circ xvf) = \pm N(x)x(xuf \circ vf)x^{-1} \\ (uf \circ xvf) &= \pm x(xuf \circ vf)x^{-1} \end{aligned}$$

et de même $(vf \circ xuf) = \pm x(xvf \circ uf)x^{-1}$

$$(19) \quad (uf \circ xvf + vf \circ xuf) = \pm x(uf \circ xvf + vf \circ xuf)x^{-1}.$$

Comme

$$B(uf \circ xvf + vf \circ xuf, x) = \mathcal{B}(xuf, xvf) + \mathcal{B}(xvf, xuf) = 0,$$

$y = uf \circ xuf + vf \circ xuf$ est orthogonal à x . Prenons $r = 2$, et $F^- = E'$, alors le deuxième membre de (19) est au signe près le symétrique du premier par rapport à $x^\perp$. Donc si nous prenons β pour définir la forme bilinéaire (18) sera satisfaite; un calcul direct cf. [3, a] montrant que (14) est vérifié, (17) définit une algèbre de Lie graduée.

III. LE CAS DES ESPACES DE DIMENSION IMPAIRE

Nous partons d'un espace E réel de dimension $n = 2r + 1$, complexifié en E' . On sait que l'espace des spineurs peut se définir comme $C^+(Q')f$, en écrivant :

$E' = F_1 \oplus F'_1 \oplus (e)$, $Q'(e) \neq 0$ (décomposition de Witt), (e) espace de dimension 1, $Q'(e) = -1$ est loisible, et f étant le r -vecteur isotrope sous-tendant F'_1 .

La métrique Q'_1 induite sur $F_1 \oplus F'_1$ par Q' détermine une algèbre de Clifford $C(Q'_1)$ isomorphe à $C^+(Q')$; l'isomorphisme de $C(Q'_1)$ sur $C^+(Q')$ est le prolongement naturel de la correspondance :

$$y \rightarrow ey, \quad y \in F_1 \oplus F'_1 \quad [I].$$

$$\text{Si } (u^+f, v^+f) \in C^+(Q')f \times C^+(Q')f$$

$$u^+f = (u_1^+ + eu_2^-)f, \quad v^+f = (v_1^+ + ev_2^-)f, \quad u_i^\pm, v_i^\pm \in C(Q'_1), \quad i = 1, 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Formant } \beta(u^+f)(v^+f) &= \beta(f)\beta(u_1^+)v_1^+f + \beta(f)\beta(u_2^-)v_2^-f \\ &+ \beta(f)\beta(u_1^+)ev_2^-f + \beta(f)\beta(u_2^-)ev_1^+f, \end{aligned}$$

on voit que les deux premiers termes sont identiquement nuls si r est impair; c'est le cas pour les deux derniers si r est pair (cela d'après l'étude du cas $n = 2r$ fait par ailleurs). Donc, on pose :

$\mathcal{B}(u^+f, v^+f)$ égal au coefficient de f dans $\beta(u^+f)(v^+f)$ si r est pair, égal au coefficient de ef dans $\beta(u^+f)(v^+f)$ si r est impair [I].

$\mathcal{B}$ est invariante par G_0^+ , non dégénérée.

$\tilde{\mathcal{B}}$ se définit de la même manière avec $\tilde{\beta}$.

Si r est 0, 1 (mod 4), $\mathcal{B}$ est symétrique.

Si r est 2, 3 (mod 4), $\mathcal{B}$ est antisymétrique.

Si $r = 1, 2, 3$ (mod 4) il est toujours possible utilisant soit $\mathcal{B}$, soit $\tilde{\mathcal{B}}$ de considérer sur les spineurs une forme bilinéaire antisymétrique.

L'algorithme de calcul ainsi défini pour $C^+(Q')f \times C^+(Q')f$ s'étend de lui-même à $C(Q')f \times C(Q')f$, tout élément $uf \in C(Q')f$ s'écrivant : $(u_1 + eu_2)f$, $u_1, u_2 \in C(Q'_1)$.

Dès lors on peut reprendre la théorie générale exposée au (I) pour le cas $n = 2r$.

Exemples :

a) Prenons $E = \mathbb{R}^3$, $E' = \mathbb{C}^3$, avec la métrique banale. Nous allons construire l'algèbre de Lie graduée appelée $GSU(2)$ dans la littérature [5].

L'espace $C^+(Q')f$, de dimension 2, est pris pour l'espace V_1 du (II, 1°), V_0 sera l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$ (ou de $SO(3)$) complexifiée; cela permet d'introduire $\mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, algèbre de Lie graduée orthosymplectique et la construction analogue à celle du (II, 2°), avec formules telles que (9), (10) et (11), et algèbre graduée de dimension 5 sur $\mathbb{C}$, qu'on pourrait élargir en considérant $C(Q')f$ de dimension 4 à une algèbre graduée de dimension 7.

b) En analogie avec le (II, 4°) on peut choisir E' complexifié de l'espace E avec métrique de signature $(-, +, +)$, le groupe associé est $O(1, 2)$ et la description de l'algèbre de Lie du groupe conforme introduit le groupe $O(2, 3)$. Les détails sont laissés au lecteur intéressé, ils reproduisent les calculs du (II, 3°) dans leurs grandes lignes.

c) L'algèbre de Lie graduée (cas complexe) construite par Volkov-Akulov [7], entre dans ce schéma. Il suffit de considérer un espace E de dimension 5, réel, avec radical (E) de dimension 1 et un supplémentaire de radical (E) muni d'une métrique de Minkowski. L'algèbre de Clifford est dégénérée, on peut appliquer les résultats de [3, d], il apparaît l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. L'espace spinoriel est de dimension 4, d'où une algèbre de dimension 14 sur $\mathbb{C}$.

Si on veut se restreindre à l'algèbre de Lie réelle du groupe de Poincaré on appliquera le IV, ci-dessous.

IV. LE CAS OÙ $r = 0$, MOD 4, ET L'UTILISATION DE LA FORME HERMITIENNE FONDAMENTALE

Si $r = 0$, mod 4, $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ sont toutes les deux symétriques et la construction du II échoue. Cependant il existe (en toute dimension d'ailleurs) une forme sesquilinéaire hermitienne fondamentale (non dégénérée) sur l'espace des spineurs.

Prenons $n = 2r$ et posons

$$\beta(\overline{uf})vf = \varepsilon \varepsilon' \mathcal{H}(uf, vf) \gamma f$$

où γf est un spineur pur tel que $\gamma f \gamma^{-1} = \bar{f}$

$$(\bar{\gamma} \gamma f = \varepsilon' f, \varepsilon = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}, \varepsilon' = \pm 1 = (-1)^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}}),$$

k nombre de carrés positifs dans la décomposition de Sylvester de Q , forme quadratique réelle de E [3, c]. $\mathcal{H}$ est invariante pour l'action de G_0^+ et même de $\text{Spin } Q$, mais aussi par le groupe Γ des éléments de la forme $g = e^{i\theta} g_1$, $g_1 \in \text{Spin } Q$, $\theta \in \mathbb{R}$.

La partie réelle et la partie imaginaire de $\mathcal{H}$ fournissent respectivement une forme quadratique et une forme symplectique σ (non dégénérées), cette dernière jouera le rôle de $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}$.

On observera que σ existe en toute dimension.

Dès lors on peut bâtir une théorie d'interactions comparables à celles du I, II, mais la *réalité* de la forme σ permet de considérer $F^\pm$ *réel*, puis des algèbres de Lie graduées orthosymplectiques. Par exemple le (II, 4°) se reprend avec l'algèbre de Lie de Γ (au lieu de $O(4, 2)$), qui est une algèbre de Lie de dimension 16 sur $\mathbb{R}$.

Pour retrouver une algèbre graduée de Wess-Zumino on peut se borner à envisager des spineurs dépendant de 8 composantes réelles en introduisant des conditions de type Majorana; on obtient ainsi une algèbre graduée à 24 composantes réelles incluant l'algèbre de lie *réelle* du groupe conforme associé à $O(3, 1)$ [comparer à [2], page 589].

Remarques :

1° Utilisant $\tilde{\beta} = \beta \circ \alpha$ on peut introduire une deuxième forme hermitienne $\tilde{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ sont modulo un facteur constant les seules formes hermitiennes $\mathcal{H}_1$, $\tilde{\mathcal{H}}_1$ non dégénérées sur $C(Q')f$ telles que $x \in E$ opérant sur $C(Q')f$ est auto-adjoint relativement à $\mathcal{H}_1$ (respectivement, $x \in E$ opérant sur $C(Q')f$ est anti-autoadjoint relativement à $\tilde{\mathcal{H}}_1$) [4] [6].

2° On peut également introduire une forme hermitienne selon une conjugaison dépendant de la signature, elle est définie et donne lieu à des constructions analogues pour les interactions et les algèbres de Lie graduées. On voit la richesse de la méthode exposée.

3° On peut déduire du II, III, IV que l'on peut associer à tout groupe orthogonal, en toute dimension et signature, une algèbre de Lie graduée orthosymplectique qui contient l'algèbre de Lie ordinaire du groupe. On peut aussi remarquer que l'algèbre de Lie graduée est reliée au groupe de transformations constitué par les isomorphismes de l'espace $V_0 \oplus V_1$ associés aux représentations du groupe orthogonal (ou d'un groupe revêtement)

par des « isométries » relativement à h (notations du (II, 1°)) d'une part, et d'autre part à l'espace spinoriel V_1 .

A ce sujet voir aussi l'appendice plus bas.

4° On peut donner d'une partie de la situation rencontrée dans les exemples où intervient l'algèbre de Lie orthosymplectique la description suivante : $V = V_0 \oplus V_1$, V_0 et V_1 étant des espaces vectoriels, V_0 celui d'une algèbre de Lie L , V_1 celui d'un espace muni d'une forme symplectique Φ , soit $\mathcal{K}$ la forme de Killing de L , supposée non dégénérée ; on envisage une représentation ρ de L dans l'algèbre de Lie des transformations symplectiques de V_1 . Soit $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ l'application bilinéaire de V_1 dans L définie par :

$$- \mathcal{K}(l, \langle x, y \rangle) = \Phi(\rho(l)(x), y)$$

$$\text{comme} \quad \Phi(\rho(l)(x)(y) + \Phi(x, \rho(l)y) = 0$$

$$\text{il vient} \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

Définissons $x(y) = \langle x, y \rangle$, $x(l) = \rho(l)(x)$, alors

$$- \mathcal{K}(l, x(y)) = \Phi(x(l), y) \quad y \in V_1, \quad l \in V_0$$

qui est la deuxième des relations de la formule (7) du II. x s'identifie donc à un élément de $\mathcal{G}_1$.

Si nous considérons la construction du (II, 2°), B est l'extension de la forme bilinéaire symétrique fondamentale à un sous-espace de $C(Q')$, $\mathcal{L}(G_0^+)$; il est facile de voir que cette extension n'est autre, modulo peut-être un facteur de normalisation, que la forme de Killing de cette algèbre de Lie $\mathcal{L}(G_0^+)$.

Enfin considérons V_0 comme l'algèbre de Lie $C(Q)$ avec le crochet $[u, v] = uv - vu$, si $u = x, v = y, x, y \in E$, on voit facilement que :

$$\mathcal{K}(x, y) = \text{Tr}(adx \circ ady) = 2(n-1)g(x, y)$$

si $xy + yx = g(x, y)$ définit l'algèbre de Clifford. On peut choisir $V_1 = C(Q')$ et obtenir à nouveau une algèbre de Lie orthosymplectique, en utilisant toutefois la forme $\tilde{\mathcal{B}}(r=2)$, parce que

$$\tilde{\mathcal{B}}(xuf, vf) + \tilde{\mathcal{B}}(uf, xvf) = 0$$

ou la forme $\tilde{\mathcal{H}}$ analogue à $\mathcal{H}$ (cf. III) pour la même raison.

Ainsi se trouvent expliquée, différemment, la réussite de certaines constructions.

V. FAISCEAUX D'ALGÈBRES DE LIE GRADUÉES

Supposons que la variété V de dimension $n = 2r$ admette une structure G_0^+ -spinorielle (cas IV) ou G_0^+ -spinorielle (cas II et III), on peut alors définir

globalement soit $\mathcal{H}$ (cas IV) soit $\mathcal{B}$ ou $\tilde{\mathcal{B}}$ (cas II et III), dès lors les constructions, dès qu'elles ont un caractère intrinsèque, de II, III et IV se transportent *ipso facto* aux sections des fibrations correspondantes, d'où la possibilité enfin d'introduire des faisceaux d'algèbres de Lie graduées orthosymplectiques.

Si V est munie d'une connexion euclidienne les dérivées covariantes de $\mathcal{B}$, $\tilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{H}$ sont nulles relativement à la connexion spinorielle naturellement associée à la connexion euclidienne [3, c], on déduit de la formule (I, 4) que :

$$D\xi \circ \eta + \xi \circ D\eta = D(\xi \circ \eta)$$

en notant par abus, de la même manière, les deux connexions introduites. Elles s'étendent quand $n = 2r + 1$.

Il serait facile de montrer que la dérivée de Lie, pour tout champ de Killing donne des résultats analogues.

Ces constructions possèdent de manière évidente toutes les bonnes propriétés de « covariance » exigées par les applications à la Mécanique.

Les détails ne seront pas développés dans cet article.

APPENDICE

Le rôle de l'algèbre de Clifford orthosymplectique.

On considère une algèbre de Lie graduée $G = G_0 \oplus G_1$, on appelle algèbre enveloppante $U(G)$ de G , le quotient de l'algèbre tensorielle $T(G)$ par l'idéal bilatère (définition analogue à celle d'un idéal dans une algèbre ordinaire) engendré par les éléments

$$x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x - [x, y]_G$$

x et y étant homogènes dans G .

Il est prouvé dans [2] que le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt est valable comme pour le cas non gradué de sorte que si $(a_1, \dots, a_m)$, $(b_1, \dots, b_n)$ constituent des bases respectives de G_0 et G_1 , une base de $U(G)$ est l'ensemble des

$$\alpha = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} b_{i_1} \dots b_{i_s}, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 \dots i_s \leq n.$$

Un exemple simple est fourni par la construction suivante : Considérons un espace V_0 (réel ou complexe) muni d'une forme symplectique Φ et un espace V_1 (réel ou complexe) muni d'une forme bilinéaire g symétrique (non dégénérées l'une et l'autre pour fixer les idées).

Soit $W = V_0 \oplus V_1 \oplus K = V \oplus K$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Il est facile de vérifier qu'on munit W d'une structure d'algèbre de Lie graduée en convenant que :

$$\begin{aligned} [x_0, y_0]_G &= \Phi(x_0, y_0), & x_0, y_0 &\in V_0 \\ [1, x_0]_G &= 0, & x_0 &\in V_0, \quad 1 \in K. \\ \left. \begin{aligned} [x_0, y_1]_G &= 0 \\ [1, y_1]_G &= 0 \end{aligned} \right\} & y_1 &\in V_1 \\ [x_1, y_1]_G &= g(x_1, y_1), & x_1, y_1 &\in V_1. \end{aligned}$$

On obtient une algèbre enveloppante $U(W)$ qui n'est autre que le produit tensoriel de l'algèbre de Clifford symplectique $C_S(\Phi)$ par l'algèbre de Clifford orthogonale $C(g)$. On peut évidemment introduire ensuite une algèbre de Clifford symplectique large $C_S(\Phi)_l$ formelle (il sera alors commode de remplacer $\Phi(x_0, y_0)$ par $t\Phi(x_0, y_0)$ comme on le fait dans la théorie des déformations) ou non formelle en postulant des conditions de convergence. Nous prendrons ici le point de vue *formel* qui nous suffira. $U(W)$ s'appellera dans ce cas *algèbre de Clifford orthosymplectique large* : $Closl(t\Phi, g)$.

Considérons le sous-espace L de $U(W)$ constitué par l'ensemble des éléments qui exprimés dans une base sont au plus de degré 2 au sens usuel en les a_i, b_i . Cette propriété est intrinsèque.

Observons que $U(W)$, algèbre associative, est naturellement une algèbre $\mathbb{Z}_2$ graduée, un élément tel que α est de degré 1 si $i_1 + i_2 + \dots i_s$ est impair, de degré 0 si $i_1 + i_2 + \dots i_s$ est pair. Cette propriété est bien indépendante de la base choisie. Le crochet gradué est : $[u, v]_G = uv - (-1)^{|u||v|}vu$ pour des éléments homogènes. Dans cette optique, L devient sous-algèbre de Lie graduée de $U(W)$.

Considérons les éléments de L qui sont linéairement engendrés par l'ensemble $\{1, a_i a_j (i \leq j), b_r b_s (r \leq s), a_i b_j\}$. Si $u \in L$ on a $[u, x]_G \in V, \forall x \in V$.

L'identité de Jacobi qui s'écrit :

$$(-1)^{|x||y|} [x, [y, u]_G]_G + (-1)^{|y||u|} [y, [u, x]_G]_G + (-1)^{|u||x|} [u, [x, y]_G]_G = 0$$

se réduit à :

$$[x, [y, u]_G]_G + (-1)^{(|u|+|x|)|y|} [y, [u, x]_G]_G = 0, \quad \text{si } x, y \in V.$$

a) Si u est pair avec x et y de même parité selon la graduation de V :

$$[x, [y, u]_G] + (-1)^{|x||y|} [y, [u, x]_G]_G = 0.$$

Si $x, y \in V_0$:

$$\Phi(x, [u, y]) + \Phi([u, x], y) = 0$$

Si $x, y \in V_1$:

$$g(x, [u, y]) + g(y, [u, x]) = 0$$

b) Si u est impair avec x et y de parités différentes, disons $x \in V_0, y \in V_1$:

$$h(x, \{u, y\}) = h(y, [u, x])$$

$$\Phi(x, \{y, u\}) = g(y, [x, u])$$

$$h(x, \{y, u\}) = h([x, u], y).$$

Ainsi l'application $z \rightarrow [z, u]_G$ de V dans V est un endomorphisme orthosymplectique. Une simple considération de dimension montre que si l'on calcule module $\mathbb{K}$ dans L , les éléments : $a_i a_j, i \leq j; b_r b_s, r < s; a_i b_j$, constituent une base de l'algèbre de Lie graduée orthosymplectique, $\text{Osp}(m, n)$ qui est donc l'algèbre de Lie graduée quotient de L , sous-espace des termes de $U(W)$ de degré 2 au plus, par l'espace $\mathbb{K}$.

RÉFÉRENCES

- [1] C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of Spinors*, Columbia U. P., 1954.
- [2] L. CORWIN, Y. NE'EMAN, S. STERNBERG, Graded Lie algebras in mathematics and Physics (Bose-Fermi Symmetry). *Reviews of Modern Physics*, t. 47, n° 3, July 1975, p. 573.
- [3] A. CRUMEYROLLE, a) Bilinéarité et géométrie affine attachées aux espaces de spinors, etc., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section A, t. XXXIV, n° 3, 1981, p. 351. b) Structures spinorielles, *Ibid.*, t. XI, n° 1, 1969, p. 19. c) Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels. *Ibid.*, t. XVI, n° 3, 1972, p. 171. d) Algèbres de Clifford dégénérées, etc., *Ibid.*, t. XXXIII, n° 3, 1980, p. 235.
- [4] Y. DUCÉL, *Thèse*, Toulouse, 1979.
- [5] A. PAIS and V. RITTENBERG, Semi-simple graded Lie algebras. *J. of Math. Phys.*, t. 16, n° 10, octobre 1975, p. 2062.
- [6] J. POPOVICI, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section A, t. XXV, n° 1, 1976, p. 35-59.
- [7] VOLKOV-AKULOV, *Physic Letters*, B, t. 46, 1973, p. 109.

N. B. La publication [2] ci-dessus contient une abondante bibliographie sur les algèbres de Lie graduées, superchamps, etc., le lecteur voudra bien s'y reporter, ainsi qu'à de nombreux articles dans *Physic Letters B*, *Nuclear Phys.*, *Journal of Math. Physics*, etc., depuis 1970 environ qui sont trop nombreux pour être cités ici.

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1981)