ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Sur quelques univers dont l'espace est localement symétrique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 32, nº 3 (1980), p. 295-301
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__32_3_295_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXII, n° 3, 1980, p. 295-301. *Physique théorique.*

Sur quelques univers dont l'espace est localement symétrique

par

M. BRAY
657, Rue de Robbé, 02120 Guise

ABSTRACT. — On some space-times the space of which is a locally symmetric manifold.

I. PRÉLIMINAIRES

La notion de symétrie locale d'un espace de Riemann (Elie Cartan) s'exprime par la relation symbolique $\nabla_{\vec{U}}(R) = 0$ dans laquelle $\nabla_{\vec{U}}$ représente l'opérateur de dérivation covariante associé à tout élément $\vec{U}$ du module $\mathscr{D}^1$ des vecteurs contrevariants, R désignant le tenseur de courbure de la variété [1].

En coordonnées locales admissibles cette relation s'écrit $\nabla_\nu(R^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta\mu}) = 0$. On en déduit les conséquences $\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}) = 0$ et $\nabla_\nu(R) = 0$ avec

$$R_{\alpha\beta} = R^{\sigma}_{\cdot\alpha\beta\sigma} = -\,\partial\beta(\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\sigma}) + \partial\sigma(\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}) - \Gamma_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\beta} + \Gamma_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta}\Gamma_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\sigma}\,.$$

Dans le cas des variétés tridimensionnelles le tenseur de courbure et le tenseur de Ricci ont le même nombre de composantes indépendantes. Les composantes du tenseur de courbure sont des combinaisons linéaires des composantes du tenseur de Ricci dont les coefficients ne dépendent que de la métrique.

Donc l'imposition des conditions $\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}) = 0$ entraîne $\nabla_\nu(R^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta\mu}) = 0$. Il y a donc équivalence complète entre les relations ∇_U(R/courbure)

(1) S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, p. 165.

$= \nabla_{\bar{U}}(R/\text{Ricci}) = 0$. Les variétés V_3 localement symétriques seront caractérisées par les équations

$$\nabla_v(R_{\alpha\beta}) = 0$$

Or on sait que l'annulation du tenseur

$$R_{\alpha\beta\gamma} = 2R_{\alpha[\beta;\gamma]} - \frac{1}{2} g_{\alpha[\beta}R_{;\gamma]}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la 3-géométrie soit conformément euclidienne : $g_{\alpha\beta} = \psi^2\delta_{\alpha\beta}$.

Dans ces conditions, tout espace-temps admettant une coupe à temps constant localement symétrique aura une métrique de forme

$$ds^2 = e^{2\phi}dt^2 - e^{2\psi}\delta_{ij}dx^i dx^j - 2N_i dx^i dt$$

II. UNIVERS A $V_3(t = 0)$ SYMÉTRIQUES

Nous appliquerons les notions précédentes aux espaces-temps $N_i = 0$,

$$ds^2 = e^{2\phi}dt^2 - e^{2\psi}\delta_{ij}dx^i dx^j \; ; \quad x^0 \equiv t \; ; \quad i, j = 1, 2, 3 \; ; \quad \phi, \psi(x^\lambda)$$

Les composantes du tenseur de Ricci correspondant sont

$$\left\{\begin{array}{l} R_{00} = -3\psi_{00} + 3\psi_0(\phi_0 - \psi_0) + e^{2(\phi-\psi)} \langle \Sigma_i[\phi_{ii} + (\phi_i)^2 + \phi_i\psi_i] \rangle \\ R_{0i} = -2\psi_{0i} + 2\phi_i\psi_0 \\ R_{ij} = \langle -\psi_{ij} + \psi_i\psi_j - \delta_{ij}\Sigma_k[\psi_{kk} + (\psi_k)^2] \rangle - \phi_{ij} - \phi_i\phi_j + \phi_i\psi_j \\ \qquad\qquad + \phi_j\psi_i - \delta_{ij}\Sigma_k(\phi_k\psi_k) + e^{2(\psi-\phi)}\delta_{ij}[\psi_{00} + \psi_0(3\psi_0 - \phi_0)] \end{array}\right.$$

La métrique définie positive $d\bar{s}^2 = e^{2\psi}\delta_{ij}dx^i dx^j$ donne naissance au tenseur de Ricci

$$\overset{(3)}{R}_{ij} = -\psi_{ij} + \psi_i\psi_j - \delta_{ij}\Sigma_k[\psi_{kk} + (\psi_k)^2]$$

On a posé

$$\phi_i \equiv \partial_i(\phi) \; ; \quad \phi_{ij} \equiv \partial_{ij}(\phi)$$

Considérons maintenant les équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) + \Lambda g_{\alpha\beta} \; ; \quad \chi > 0$$

avec $T_{\alpha\beta} = \theta_\alpha\theta_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\theta^v\theta_v)$: champ mésonique vectoriel.

Il vient

$$R_{\alpha\beta} = \chi\theta_\alpha\theta_\beta + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

Cherchons d'abord des solutions du type de Ricci : $\phi = 0$; $\psi_k = 0$. Nous avons

$$-3\psi'' - 3(\psi')^2 = \chi\theta_0{}^2 + \Lambda \; ; \quad \theta_0\theta_i = 0 \; ;$$
$$e^{2\psi}\delta_{ij}\langle \psi'' + 3(\psi')^2 \rangle = \chi\theta_i\theta_j - \Lambda e^{2\psi}\delta_{ij}$$

La dernière équation nous donne $\theta_i\theta_j = 0$ si $i \neq j$.

Posant $\theta_i = 0$, il reste $\psi'' + 3(\psi')^2 + \Lambda = 0$ d'où $\chi\theta_0^2 = -2\psi''$. On peut distinguer les trois cas $\Lambda = 3\varepsilon v^2$ avec $\varepsilon = -1, 0, 1$ soit

$$a) \qquad \varepsilon = 1 ; \quad \psi = \frac{1}{3}\log\cos(3vt) ; \quad \chi\theta_0^2 = \frac{6v^2}{[\cos 3vt]^2} ;$$

$$b) \qquad \varepsilon = 0 ; \quad \psi = \frac{1}{3}\log(t) ; \quad \chi\theta_0^2 = \frac{2}{3}t^{-2} ;$$

$$c) \qquad \varepsilon = -1 ; \quad \psi = \frac{1}{3}\log\operatorname{sh}(3vt) ; \quad \chi\theta_0^2 = \frac{6v^2}{\operatorname{sh}^2(3vt)}$$

Des composantes du tenseur de courbure $R_{0i0j} = -e^{2\psi}\delta_{ij}[\psi'' + (\psi')^2]$ $R_{0ijk} = 0$ et $R_{ijkl} = -e^{4\psi}(\psi')^2[\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik}]$ on tire l'invariant de courbure $(R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu})$ dont l'expression s'écrit (à une constante multiplicative près)

$$[\Lambda + 2\psi'^2]^2 + [\psi'^2]^2 .$$

Ceci fait apparaître les singularités essentielles $3vt = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, 1...$ dans le cas $\varepsilon = 1$ et $t = 0$ dans les deux autres cas.

Prenant maintenant $\phi = 0$; $\psi = \xi(t) + \zeta(x^k)$ nous obtenons le système :

$$\begin{cases} -3[\xi'' + \xi'^2] = \chi\theta_0^2 + \Lambda ; \quad \theta_0\theta_i = 0 ; \\ -\zeta_{ij} + \zeta_i\zeta_j - \delta_{ij}\langle \Sigma_k[\zeta_{kk} + \zeta_k^2] - e^{2\psi}[\xi'' + 3\xi'^2 + \Lambda]\rangle = \chi\theta_i\theta_j . \end{cases}$$

Le choix $\theta_i = 0$ donne alors

$$\chi\theta_0^2 = -3[\xi'' + \xi'^2] - \Lambda ; \quad \zeta_{ij} = \zeta_i\zeta_j ; \quad i \neq j ;$$
$$-\zeta_{ii} + \zeta_i^2 - \Sigma_k[\zeta_{kk} + \zeta_k^2] + e^{2\xi+2\zeta}[\xi'' + 3\xi'^2 + \Lambda] = 0 ; \quad i = 1, 2, 3.$$

Toute fonction ζ de $u \equiv \Sigma_i(a_i x^i)$ fournit les relations $\zeta_i = \zeta'(u)a_i$, $\zeta_{ij} = \zeta''(u)a_i a_j$. Il suffit donc de prendre $\zeta'' = \zeta'^2$ pour satisfaire les équations $i \neq j$.

Il reste

$$-\Sigma_k[\zeta'' + \zeta'^2]a_k^2 + e^{2\xi+2\zeta}[\xi'' + 3\xi'^2 + \Lambda] = 0 .$$

Soit en écrivant

$$\Sigma_k(a_k)^2 \equiv A^2$$
$$A^2 e^{-2\zeta}[\zeta'' + \zeta'^2] = e^{2\xi}[\xi'' + 3\xi'^2 + \Lambda] = C^{te}$$

Puisque $\zeta'' = \zeta'^2$, $A^2 e^{-2\zeta}(2\zeta'^2) \equiv \tilde{K}^2$ ou $e^{-2\zeta}\zeta'^2 \equiv K^2$.

$$e^{-\zeta}\zeta' = \pm K \rightarrow e^{-\zeta} = \mp Ku + L , \quad L : C^{te} .$$

Nous écrirons $e^{-\zeta} = K[l \mp u]$. En outre $e^{2\xi}[\xi'' + 3\xi'^2 + \Lambda] = 2A^2K^2$, relation pouvant se transcrire sous la forme $\Omega'' + (\Omega'^2/2\Omega) + 2\Lambda\Omega = 4A^2K^2$ avec $e^{2\xi} \equiv \Omega$. Toute intégrale de cette équation conduit donc à la solution

$$e^{2\psi} = \frac{\Omega}{K^2[l \mp u]^2}$$

sous les réserves de positivité $\Omega > 0$ et $-3(\xi'' + \xi'^2) - \Lambda > 0$.

Cette dernière condition ($\chi\theta_0^2 > 0$) a pour équivalente

$$\Omega'^2 + \frac{4}{3}\Lambda\Omega^2 - 4A^2K^2\Omega > 0 .$$

En particulier si $\Lambda = 0$ nous avons $\Omega = A^2K^2t^2$, mais ce cas représente une dégénérescence car $\theta_0 = 0$ d'où la métrique du vide à espace symétrique.

$$ds^2 = dt^2 - \frac{A^2t^2}{(l \mp u)^2}\delta_{ij}dx^i dx^j \; ; \quad u \equiv (a_k x^k) \; ; \quad k = 1, 2, 3 .$$

L'hypothèse ϕ, ψ fonctions de $u \equiv (a_\nu x^\nu)$; $\nu = 0, 1, 2, 3$ mène au système (avec $\Lambda = 0$)

$$\begin{cases} -3\psi'' a_0^2 + \mathscr{A}^2[\psi'' + 2\psi'^2] = \chi\theta_0^2 \; ; \quad -2[\psi'' - \psi'^2]a_0 a_i = \chi\theta_0\theta_i \\ -2[\psi'' - \psi'^2]a_i a_j + A^2\delta_{ij}[\psi'' + 2\psi'^2] = \chi\theta_i\theta_j \end{cases}$$

$$\mathscr{A}^2 \equiv \sum_{1}^{3}{}_k (a_k)^2 \; ; \quad A^2 = (a_0)^2 - \mathscr{A}^2 = \eta^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta$$

D'autre part $\overset{(3)}{R}_{ij} = -(\psi'' - \psi'^2)a_i a_j - \mathscr{A}^2\delta_{ij}(\psi'' + \psi'^2)$.

Prenant $\psi'' = \psi'^2$ on vérifie aisément les relations de symétrie

$$\overset{(3)}{\nabla}_k[\overset{(3)}{R}_{ij}] = 0 .$$

Il vient dans ce cas :

$$\chi\theta_0^2 = -3\psi'^2A^2 \; ; \quad \theta_0\theta_i = 0 \; ; \quad 3\psi'^2A^2\delta_{ij} = \chi\theta_i\theta_j .$$

Nécessairement $\theta_i = 0$ d'où $\theta_0 = 0$. Le champ $\vec{\theta}$ disparaît.

Pour éviter la solution triviale $\psi' = 0$ il suffit de prendre $A^2 = 0$ ($\vec{A}$ isotrope).

La métrique, conforme à celle de Minkowski s'écrit :

$$ds^2 = (C - u)^{-2}\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \; ; \quad u \equiv (a_\lambda x^\lambda) \; ; \quad \eta^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta = 0 \; ; \quad C : C^{te}$$

Le postulat $e^{2\psi} = \Delta^{-2}$ avec

$$\Delta \equiv \left[1 + \frac{\Lambda r^2}{8}\right] ; \quad r^2 = \delta_{ij}x^i x^j$$

correspond à une V_3 à courbure constante : $\overset{(3)}{R}_{ij} = \Lambda \overset{(3)}{g}_{ij}$ satisfaisant manifestement les conditions de symétrie.

Le choix $\theta_i = 0$ réduit le système d'Einstein aux deux relations

$$\begin{cases} \phi'' + \phi'\left[\dfrac{\Lambda r}{2\Delta} - \dfrac{1}{r}\right] + \phi'^2 = 0 , \\ \dfrac{\phi'}{r} - \dfrac{\Lambda}{4\Delta} - \dfrac{\Lambda}{4\Delta^2}\left[3\Delta - \dfrac{\Lambda}{2}\, r^2\right] - \dfrac{\Lambda r\phi'}{4\Delta} = \dfrac{\overset{*}{\Lambda}}{\Delta^2} \end{cases}$$

On a supposé $\phi = \phi(r)$ et $\overset{*}{\Lambda}$ désigne maintenant la constante cosmologique à ne pas confondre avec Λ.

La seconde équation admet l'intégrale

$$\phi = \frac{2(\Lambda + \overset{*}{\Lambda})}{\Lambda} \log\left(\frac{1 + \Lambda r^2/8}{1 - \Lambda r^2/8}\right); \quad \Lambda \neq 0 .$$

Portant cette valeur dans la première on obtient

$$(\Lambda + \overset{*}{\Lambda})\left[r^2\left(\overset{*}{\Lambda} + \frac{3}{2}\Lambda\right)\right] = 0 .$$

Nous devons donc avoir $(\Lambda + \overset{*}{\Lambda}) = 0$ ou $\left(\overset{*}{\Lambda} + \frac{3}{2}\Lambda\right) = 0$.

Écartons le choix $\overset{*}{\Lambda} = -\Lambda$ qui fournit $\phi = 0$; il reste $\overset{*}{\Lambda} = -\frac{3}{2}\Lambda$ d'où

$$e^{2\phi} = \left(\frac{1 - \Lambda r^2/8}{1 + \Lambda r^2/8}\right)^2 .$$

La métrique d'espace-temps prend la forme

$$ds^2 = \Delta^{-2}\left\langle \left(1 - \frac{\Lambda}{8} r^2\right)^2 dt^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j \right\rangle ; \quad \Delta \equiv \left(1 + \frac{\Lambda}{8} r^2\right)$$

Dans ce cas

$$\chi\theta_0^2 = e^{2(\phi - \psi)} \Sigma_i \left[\phi_{ii} + \phi_i^2 - \Lambda \frac{\phi_i x^i}{4\Delta}\right] - \overset{*}{\Lambda} e^{2\phi}$$

Soit

$$\chi\theta_0^2 = e^{2(\phi - \psi)} \left\langle [\phi'' + \phi'^2] + \frac{2\phi'}{r\Delta} \right\rangle + \frac{3}{2}\Lambda e^{2\phi}$$

D'après la première relation,

$$\phi'' + \phi'^2 = \phi'\left[\frac{1}{r} - \frac{\Lambda r}{2\Delta}\right]$$

d'où

$$\chi\theta_0^2 = e^{2(\phi - \psi)}\left(\frac{3\phi'}{r\Delta}\right)\left(1 - \frac{\Lambda}{8} r^2\right) + \frac{3}{2}\Lambda e^{2\phi} = 0$$

La solution dégénère donc en celle du vide. Indépendante du temps et possédant la symétrie sphérique elle doit se réduire d'après le théorème de Birkhoff à la solution de Schwarzschild.

Les composantes du tenseur de courbure de cette métrique s'écrivent :

$$R_{0i0j} = \frac{-\Lambda\delta_{ij}\left(1 - \frac{\Lambda}{8} r^2\right)^2}{2\Delta^4} ; \quad R_{0ijk} = 0 ;$$

$$R_{ijkl} = \frac{\Lambda}{\Delta^4} \delta_{k[i}\delta_{j]l}$$

A l'aide de ces expressions on calcule les composantes contrevariantes puis, établissant la correspondance 01 $\to$ 1 ; 02 $\to$ 2 ; 03 $\to$ 3 ; 23 $\to$ 4 ; 31 $\to$ 5 ; 12 $\to$ 6 on transcrit les $R_{\alpha\beta}$ sous la forme Ω_{AB} A, B $= 1 \dots 6$.

Le calcul de l'invariant de courbure donne alors l'expression

$$\Omega_{AB}\Omega^{AB} = \frac{3}{2}\Lambda^2$$

qui montre l'absence de singularité essentielle.

Nous examinerons enfin les équations du mouvement lorsque $\vec{\theta}$ n'est pas nul soit

$$\nabla_\beta \left\langle \theta_\alpha \theta^\beta - \frac{1}{2} g_\alpha{}^\beta (\theta^\nu \theta_\nu) \right\rangle = 0 .$$

Il vient :

$$\theta^\beta [\nabla_\beta(\theta_\alpha) - \nabla_\alpha(\theta_\beta)] + \theta_\alpha \nabla_\beta(\theta^\beta) = 0$$

d'où la conséquence $(\theta^\alpha\theta_\alpha)\nabla_\beta(\theta^\beta) = 0$. Tout $\vec{\theta}$ non isotrope $(\theta^\alpha\theta_\alpha \neq 0)$ est donc à divergence nulle et dans ce cas il reste $\theta^\beta F_{\alpha\beta} = 0$ avec $F_{\alpha\beta} = 2\nabla_{[\alpha}\theta_{\beta]}$.

L'identité de Ricci soit $[\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha]\theta^\nu = -\theta^\rho R^{\cdot\nu}_{\cdot\rho\alpha\beta}$ fournit la relation

$$[\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha]\theta^\beta = - R_{\alpha\beta}\theta^\beta \quad \text{ou} \quad \nabla_\beta\nabla_\alpha(\theta^\beta) = R_{\alpha\beta}\theta^\beta \quad \text{si} \quad \nabla_\beta(\theta^\beta) = 0$$

Nous pouvons donc écrire $\nabla_\beta\nabla_\alpha(\theta^\beta) = \omega\theta_\alpha$ avec $\omega \equiv [\chi(\theta^\nu\theta_\nu) + \Lambda]$. On en tire $\nabla_\beta \langle \theta^\alpha \nabla_\alpha(\theta^\beta) \rangle - \nabla_\beta(\theta^\alpha)\nabla_\alpha(\theta^\beta) = \omega(\theta^\alpha\theta_\alpha)$ ou équivalemment

$$\nabla_\beta \left\langle \frac{1}{2} \nabla_\beta(\theta^\nu\theta_\nu) \right\rangle - \nabla^\alpha(\theta^\beta)\nabla_\beta(\theta_\alpha) = \omega(\theta^\nu\theta_\nu)$$

soit

$$\frac{1}{2} \Box (\theta^\nu\theta_\nu) = \nabla^\alpha(\theta^\beta)\nabla_\beta(\theta_\alpha) + \omega(\theta^\nu\theta_\nu) \, ; \quad \Box \, . \equiv \nabla^\beta\nabla_\beta \, .$$

Par application de ∇_β à la relation $\theta^\alpha F_\alpha{}^\beta = 0$ on a

$$\nabla^\beta(\theta^\alpha)F_{\alpha\beta} + \theta^\alpha\nabla_\beta(F_\alpha{}^\beta) = 0 \, ; \quad \text{or} \quad \nabla^\beta(\theta^\alpha)F_{\alpha\beta} = \nabla^\alpha(\theta^\beta)F_{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})$$

$$\theta^\alpha\nabla_\beta(F_\alpha{}^\beta) = \frac{1}{2}(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) .$$

Cette relation peut se transcrire sous la forme

$$\theta^\alpha \langle \Box (\theta_\alpha) - \omega\theta_\alpha + \nabla_\beta(F_\alpha{}^\beta) \rangle = 0$$

et l'on a

$$\Box (\theta_\alpha) = \omega\theta_\alpha - \nabla_\beta(F_\alpha{}^\beta) \equiv \omega\theta_\alpha + J_\alpha$$

avec $J_\alpha \equiv - \nabla_\beta(F_\alpha{}^\beta)$.

Afin d'étudier la congruence des trajectoires de $\vec{\theta}$, introduisons le tenseur de projection

$$\pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{\theta_\alpha\theta_\beta}{(\theta^\nu\theta_\nu)}$$

et posons $U_\alpha \equiv \theta_\alpha/(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{1/2}$; ε indicateur de $\vec{\theta}$

$$(\varepsilon = 1 \text{ si } \theta^\nu\theta_\nu > 0 \, ; \quad \varepsilon = -1 \text{ si } \theta^\nu\theta_\nu < 0).$$

Il vient $(U^\alpha U_\alpha) = \varepsilon$; $\pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \varepsilon U_\alpha U_\beta$. Nous avons alors

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\beta} \equiv \pi_\alpha{}^\mu \pi_\beta{}^\nu U_{(\mu;\nu)} = U_{(\alpha;\beta)} - \varepsilon U_{(\alpha}\dot{U}_{\beta)}$$

avec $\dot{U}_\beta \equiv U^\nu \nabla_\nu(U_\beta)$

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\beta} = (\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-1/2}\theta_{(\alpha;\beta)} - 2\varepsilon(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-3/2}\theta_{(\alpha}\overset{*}{\theta}_{\beta)} + \theta_\alpha\theta_\beta(\theta^\rho\overset{*}{\theta}_\rho)(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-5/2} .$$

$$\overset{*}{\theta}_\alpha \equiv \theta^\nu\nabla_\nu(\theta_\alpha) .$$

De même

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta} \equiv \pi_\alpha{}^\mu \pi_\beta{}^\nu U_{[\mu;\nu]} = U_{[\alpha;\beta]} + \varepsilon U_{[\alpha}\dot{U}_{\beta]}$$

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = (\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-1/2}\theta_{[\alpha;\beta]} = -\frac{1}{2}(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-1/2}F_{\alpha\beta}$$

En vertu de $\nabla_\nu(\theta^\nu) = 0$ on a $\nabla_\nu(U^\nu) = \theta^\nu\nabla_\nu[(\varepsilon\theta^\rho\theta_\rho)^{-1/2}]$.
Soit $\nabla_\nu(U^\nu) = -(\varepsilon\theta^\alpha\theta_\alpha)^{-3/2}(\varepsilon\theta^\rho\overset{*}{\theta}_\rho)$.
Le tenseur de déformation

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} \equiv \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\pi_{\alpha\beta}\nabla_\nu(U^\nu)$$

s'écrit maintenant

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = (\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-1/2}\theta_{(\alpha;\beta)} - 2\varepsilon(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-3/2}\theta_{(\alpha}\overset{*}{\theta}_{\beta)} + \theta_\alpha\theta_\beta(\theta^\rho\overset{*}{\theta}_\rho)(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-5/2} + \frac{\pi_{\alpha\beta}}{3}(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-3/2}(\varepsilon\theta^\rho\overset{*}{\theta}_\rho) .$$

Mentionnons enfin la relation de Raychaudhuri

$$U^\alpha\nabla_\alpha \langle \nabla_\beta(U^\beta) \rangle = \nabla_\beta(\dot{U}^\beta) - \nabla^\alpha(U^\beta)\nabla_\beta(U_\alpha) - R_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta$$

dans laquelle

$$\nabla_\beta(\dot{U}^\beta) = (\theta^\beta\zeta_\beta)^2 + 3\zeta(\overset{*}{\theta}{}^\beta\zeta_\beta) + \zeta\theta^\alpha\theta^\beta\zeta_{(\alpha;\beta)} + \zeta^2\nabla_\beta(\overset{*}{\theta}{}^\beta)$$

avec

$$\zeta \equiv (\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-1/2} \, ; \quad \zeta_\beta \equiv \nabla_\beta(\zeta)$$

$$\theta^\alpha\theta^\beta\zeta_{\alpha;\beta} = -\varepsilon\theta^\alpha\theta^\beta \langle -3\varepsilon(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-5/2}\overset{*}{\theta}_\alpha\overset{*}{\theta}_\beta + (\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-3/2}\nabla_\beta(\overset{*}{\theta}_\alpha) \rangle$$

$$(\theta^\beta\zeta_\beta) = -\varepsilon(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-3/2}(\theta^\beta\overset{*}{\theta}_\beta) \, ; \quad (\overset{*}{\theta}{}^\beta\zeta_\beta) = -\varepsilon(\varepsilon\theta^\nu\theta_\nu)^{-3/2}(\overset{*}{\theta}{}^\beta\overset{*}{\theta}_\beta) .$$

(Manuscrit reçu le 29 janvier 1980)