

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PH. BLANCHARD

M. REED

Théorie de la diffusion pour l'équation de sinus-Gordon à trois dimensions

Annales de l'I. H. P., section A, tome 26, n° 2 (1977), p. 163-180

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__26_2_163_0

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Théorie de la diffusion pour l'équation de sinus-Gordon à trois dimensions

par

Ph. BLANCHARD

Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Bielefeld (RFA)

et

M. REED

Department of Mathematics, Duke University,
Durham, North Carolina (USA)

I. INTRODUCTION

On peut abstraire des techniques originellement employées par Segal [1, 13], Morawetz et Strauss [2, 14] et d'autres pour étudier des équations d'ondes non linéaires particulières un certain nombre d'énoncés généraux s'appliquant à toute une classe d'équations non linéaires. On pourra trouver ces énoncés généraux dans Browder [15], Strauss [9], Reed [3], Reed-Simon [4] et dans von Wahl [16]. Notre but est d'une part d'étudier à l'aide de ces méthodes les propriétés (existence locale et globale, régularité, etc.) des solutions de l'équation de sinus-Gordon

$$\begin{aligned} u_{tt}(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t) + \lambda \sin(u) &= 0 \\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad \lambda > 0 \\ u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \quad u_t(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \end{aligned} \tag{1}$$

et d'autre part de montrer que pour $n = 3$ on peut développer pour cette équation une théorie de la diffusion c'est-à-dire faire correspondre asymptotiquement à certaines solutions de l'équation (1) des solutions de l'équation « libre »

$$u_{tt}(\vec{x}, t) - \Delta u + \lambda u = 0 \tag{2}$$

Les méthodes générales exposées dans [3] ne s'appliquent pas directement

à (1) mais en utilisant des propriétés spécifiques de cette équation on peut cependant construire une théorie de la diffusion en suivant les idées générales de Segal [10]. Pour ce faire on montrera que l'étude de (1) se ramène à l'étude dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ d'une équation d'évolution du type

$$\phi'(t) = -iA\phi(t) + J(\phi(t))$$

$$\phi(0) = \phi_0$$

où A est auto-adjoint et J est une application non linéaire du domaine de A , $D(A)$, dans $D(A)$. La théorie de la diffusion a pour objet de comparer les solutions de cette équation avec les solutions de l'équation « libre »

$$\phi'(t) = -iA\phi(t)$$

$$\phi(0) = \hat{\phi}_0$$

pour $|t| \rightarrow +\infty$.

II. EXISTENCE ET PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS

On réécrit l'équation (1), afin de l'étudier, de la manière suivante

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda u = \lambda[\operatorname{Re}(u) - \sin(\operatorname{Re}(u))] \quad (3)$$

Si les données initiales f et g sont réelles la solution $u(t, \vec{x})$ le restera; dans ces circonstances les équations (1) et (3) coïncident. Posons pour simplifier $\operatorname{Re} u = \hat{u}$. Introduisant alors $v(x, t) = u_t(\vec{x}, t)$ l'équation (3) s'écrit

$$v_t - \Delta u + \lambda u = \lambda(\hat{u} - \sin \hat{u}) \quad (4)$$

$$u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$$

$$v(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$$

Utilisons une notation matricielle; pour tout t définissons

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} u(\vec{x}, t) \\ v(\vec{x}, t) \end{pmatrix}$$

$$J\phi(t) = \lambda(\hat{u}^0 - \sin \hat{u})$$

ce qui permet de réécrire l'équation (4) de la façon suivante

$$\phi'(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - \lambda & 0 \end{pmatrix} \phi(t) = J(\phi(t))$$

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

l'opérateur $-\Delta + \lambda$ est un opérateur positif auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont le domaine est constitué par toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que $(k^2 + \lambda)\tilde{f}(k) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ en notant par $\tilde{f}$ la transformée de Fourier de f . Désignant alors par B l'unique racine positive de $-\Delta + \lambda$ que fournit le calcul fonctionnel, B est un opérateur strictement positif fermé et $D(B)$

devient un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(Bu, Bu)_{L^2}$. On peut alors considérer l'espace

$$\mathcal{H}_B = D(B) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$$

qui muni du produit scalaire

$$\| \varphi \|^2 = (\varphi, \varphi) = (Bu, Bu)_{L^2} + (v, v)_{L^2}$$

devient un espace de Hilbert. Posant alors

$$A = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}$$

on peut se convaincre sans difficulté que A est un opérateur symétrique dans $\mathcal{H}_B$ de domaine $D(A) = D(B^2) \oplus D(B)$; d'autre part A est fermé B et B^2 l'étant. Considérons alors pour tout t l'opérateur

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(tB) & B^{-1} \sin(tB) \\ -B \sin(tB) & \cos(tB) \end{pmatrix}$$

On peut s'assurer que $W(t)$ est un groupe unitaire à un paramètre fortement continu et que $\forall \psi \in D(A)$ la dérivée au sens fort de $W(t)\psi$ existe et est égale à $-iA\psi$. $W(t)$ laissant $D(A)$ invariant un corollaire du théorème de Stone [5] nous permet d'affirmer que A est auto-adjoint sur $D(A)$ et engendre $W(t)$.

Le problème initialement considéré se laisse alors formuler de la façon suivante : nous avons à trouver une fonction $\phi(\cdot)$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{H}_B$ satisfaisant l'équation

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{d\phi(t)}{dt} = -iA\phi(t) + J(\phi(t)) \\ \phi(0) &= \phi_0 \equiv \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

J et A étant définis comme plus haut.

L'équation différentielle (5) peut se réécrire sous la forme d'une équation intégrale

$$\phi(t) = e^{-iAt} \phi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s)) ds \quad (6)$$

que l'on peut résoudre, généralisant les méthodes utilisées dans la théorie des équations différentielles ordinaires, à l'aide du théorème des applications contractantes. Un certain nombre d'énoncés généraux permettent de conclure que des équations de ce type possèdent des solutions locales et globales.

THÉORÈME 1 (Existence Locale). — Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, A un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$ et J une application non linéaire de $D(A)$ dans $D(A)$ satisfaisant $\forall \phi, \psi \in D(A)$

$$(H_0) \quad \|J(\phi)\| \leq C(\|\phi\|) \|\phi\|$$

$$(H_1) \quad \|AJ(\phi)\| \leq C(\|\phi\|, \|A\phi\|) \|A\phi\|$$

$$(H_0^1) \|\mathbf{J}(\phi) - \mathbf{J}(\psi)\| \leq C(\|\phi\|, \|\psi\|) \|\phi - \psi\|$$

$$(H_1^1) \|\mathbf{A}(\mathbf{J}(\phi) - \mathbf{J}(\psi))\| \leq C(\|\phi\|, \|\psi\|, \|\mathbf{A}\phi\|, \|\mathbf{A}\psi\|) \|\mathbf{A}\phi - \mathbf{A}\psi\|$$

C désignant à chaque fois dans ces hypothèses une fonction localement bornée des arguments indiqués.

Alors pour tout $\phi_0 \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ $\exists T > 0$ tel que l'équation différentielle (5) admette une solution unique continûment différentiable $\forall t \in [0, T]$.

Comme dans la théorie des équations différentielles non linéaires ordinaires on peut démontrer qu'on dispose d'une solution globale si l'on peut démontrer une estimation *a priori* garantissant que la solution n'explose pas dans un temps fini (c'est-à-dire reste bornée).

THÉORÈME 2 (Existence globale). — Sous les hypothèses du théorème 1, l'hypothèse (H_1) étant remplacée par

$$(H_1') \|\mathbf{A}\mathbf{J}(\phi)\| \leq C(\|\phi\|) \|\mathbf{A}\phi\|$$

(c'est-à-dire C ne dépend que de $\|\phi\|$ et pas de $\|\mathbf{A}\phi\|$) et si pour tout intervalle fini pour lequel l'équation différentielle (6) possède une solution $\|\phi(t)\|$ reste borné alors l'équation différentielle admet une solution globale unique pour tout t .

Les idées fondamentales nécessaires à la démonstration de ces théorèmes sont dues à Segal [10]; des démonstrations plus faciles se trouvent dans Reed [11] [3] (*). Montrons qu'à l'aide de ces théorèmes on peut conclure que l'équation (3) pour $n = 1, 2, 3, 4$ possède une solution globale unique. Pour démontrer que les hypothèses des théorèmes 1 et 2 sont satisfaites on va utiliser des inégalités de Sobolev [6] et une estimation *a priori*, parfois fournie par le fait que « l'énergie » est conservée, permettant de conclure que les solutions restent bornées sur tout intervalle de temps fini. Dans le cas qui nous intéresse on a

$$\mathbf{J}(\phi) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{u} - \sin(\hat{u}) \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{J}(\phi)\|^2 = \lambda^2 \|\mathbf{B}(\hat{u} - \sin \hat{u})\|_2^2$$

Vérifions que les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites

$$\lambda^{-1} \|\mathbf{J}(\phi)\| = \|\hat{u} - \sin \hat{u}\|_2 \leq 2 \|u\|_2 \leq 2 \|\phi\|$$

$$\lambda^{-2} \|\mathbf{A}\mathbf{J}(\phi)\|^2 = \|\mathbf{B}(\sin \hat{u} - \hat{u})\|_2^2$$

$$= (\sin \hat{u} - \hat{u}, \mathbf{B}^2(\sin \hat{u} - \hat{u}))$$

$$\lambda^{-2} \|\mathbf{A}\mathbf{J}(\phi)\|^2 = (\sin \hat{u}, \mathbf{B}^2 \sin \hat{u}) - (\hat{u}, \mathbf{B}^2 \sin \hat{u})$$

$$- (\sin \hat{u}, \mathbf{B}^2 \hat{u}) + \|\mathbf{B}\hat{u}\|_2^2$$

$$(\sin \hat{u}, \mathbf{B}^2 \sin \hat{u}) \leq \|\nabla \hat{u}\|_2^2 + \lambda \|\hat{u}\|_2^2$$

$$\leq \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2$$

$$\leq K \|\mathbf{B}u\|_2^2 \leq K \|\phi\|^2$$

(*) Des généralisations au cas où $\mathbf{A}$ dépend du temps ont été envisagées par von WAHL [16].

ce qui permet de conclure que

$$\|AJ(\phi)\| \leq C \|\phi\|$$

D'autre part étant donnés $\psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\phi = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \|J(\phi) - J(\psi)\| &= \| -\sin \hat{u}_1 + \hat{u}_1 - (-\sin \hat{u}_2 + \hat{u}_2) \|_2 \\ &\leq \| \sin \hat{u}_1 - \sin \hat{u}_2 \|_2 + \| \hat{u}_1 - \hat{u}_2 \|_2 \\ &\leq \| \hat{u}_1 - \hat{u}_2 \|_2 + \| u_1 - u_2 \|_2 \\ &\leq K \|\phi - \psi\| \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \|A(J(\phi) - J(\psi))\| &= \|B(\sin \hat{u}_1 - \sin \hat{u}_2 - \hat{u}_1 + \hat{u}_2)\|_2 \\ &\leq \|B(\sin \hat{u}_1 - \sin \hat{u}_2)\|_2 + \|B(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)\|_2 \\ &\leq \|(B\hat{u}_1) \cos \hat{u}_1 - (B\hat{u}_2) \cos \hat{u}_2\|_2 + \|B(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)\|_2 \\ &\leq \|(B\hat{u}_1)(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)\|_2 + \|(B\hat{u}_1 - B\hat{u}_2) \cos \hat{u}_2\|_2 \\ &\quad + \|B(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)\|_2 \\ &\leq \|B^2 u_1\|_2 \|B(u_1 - u_2)\|_2 + 2 \|B(u_1 - u_2)\|_2 \\ &\leq \|\phi - \psi\| [\|A\phi\| + 2] \end{aligned}$$

Deux remarques sont à faire relativement à ce dernier calcul. D'une part on a considéré B comme un pur opérateur différentiel ce qui est toujours possible ; en effet, traitant B comme un pur opérateur différentiel on a par exemple

$$\|B \sin u\|_2 = \|Bu \cos u\|_2 \leq \|Bu\|_2$$

En réalité il faut estimer

$$\begin{aligned} \|B \sin u\|_2^2 &= (\sin u, B^2 \sin u) \\ &= (\nabla \sin u, \nabla \sin u) + \lambda (\sin u, \sin u) \end{aligned}$$

et

$$\|\nabla \sin u\|^2 = \sum_{i=1}^3 \|\cos u u_{x_i}\|^2 \leq \sum_{i=1}^3 \|u_{x_i}\|^2$$

Mais ainsi

$$\|B \sin u\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^3 \|u_{x_i}\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 = \|Bu\|_2^2$$

et on retombe sur la même estimation.

D'autre part le fait que la dimension d'espace $n \leq 4$ a été utilisé lorsqu'on a employé l'inégalité de Sobolev

$$\|u_1 u_2\|_2 \leq K \|Bu_1\|_2 \|Bu_2\|_2$$

L'hypothèse supplémentaire (H'_1) du théorème 2 étant satisfaite il suffit

de montrer que $\|\phi(t)\|$ est *a priori* bornée pour conclure que l'équation a une solution globale.

Utilisant l'équation intégrale on a

$$\begin{aligned}\|\phi(t)\| &\leq \|e^{-iAt}\phi_0\| + \left\| \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s)) ds \right\| \\ &\leq \|\phi_0\| + \int_0^t \|J(\phi(s))\| ds \\ &\leq \|\phi_0\| + K \int_0^t \|\phi(s)\| ds\end{aligned}$$

Le lemme suivant permet de conclure que les solutions restent bornées sur tout intervalle de temps borné et satisfont

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi_0\| e^{Kt}$$

LEMME 1. — Soient $I = [0, a]$ $a > 0$ et f une fonction continue $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives. Supposons qu'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels qu'on ait $\forall x \in I$

$$f(x) \leq B + A \int_0^x f(t) dt$$

Alors on a $f(x) \leq Be^{Ax}$

Démonstration. — On considère la fonction $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour laquelle l'inégalité considérée s'écrit

$$g'(x) \leq B + Ag(x)$$

Posant $g(x) = e^{Ax}h(x)$ il vient pour $h(x)$

$$h'(x) \leq Be^{-Ax}$$

En intégrant et puisque $h(0) = 0$ on a le résultat annoncé.

Ainsi est établie l'existence globale des solutions. De plus on a vu que $\forall \phi_0 \in \mathcal{H}$ on avait $\|\phi(t)\| \leq \|\phi_0\| e^{Kt}$. Soit alors $\mathcal{B}(r)$ la boule de rayon r dans $\mathcal{H}$

$$\mathcal{B}(r) = \{ \phi_0 \in \mathcal{H} \mid \|\phi_0\| \leq r \}$$

Considérant $\phi_0^{(1)}$ et $\phi_0^{(2)}$ dans $\mathcal{B}(r)$ et $\phi_i(t) = M_t \phi_0^{(i)}$ on a

$$\begin{aligned}\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| &\leq \|\phi_0^{(1)} - \phi_0^{(2)}\| + \int_0^t \|J(\phi_1(s)) - J(\phi_2(s))\| ds \\ \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| &\leq \|\phi_0^{(1)} - \phi_0^{(2)}\| + \alpha \int_0^t \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| ds\end{aligned}$$

soit d'après le lemme 1

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| \leq \|\phi_0^{(1)} - \phi_0^{(2)}\| e^{\alpha t}$$

et donc les solutions de (3) dépendent continûment des données initiales. Résumons les résultats obtenus jusqu'à présent :

THÉORÈME 3. — Soient $f \in D(-\Delta + \lambda)$ et $g \in D(\sqrt{-\Delta + \lambda})$. Alors pour $n = 1, 2, 3, 4$ existe une unique fonction sur $\mathbb{R}$, $u(t, \cdot)$ deux fois continûment différentiable et à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall t$ $u(t, x) \in D(\Delta)$ et que (3) soit satisfaite. De plus la solution dépend continûment des données initiales.

Remarque. — On a déjà signalé que si les données initiales étaient réelles la solution le restait. On aurait pu aussi considérer un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ de fonctions à valeurs réelles et le terme non linéaire

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin u - u \end{pmatrix}$$

« L'énergie » $E(t)$ définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int \left[|\nabla u|^2 + \lambda u^2 + u_t^2 + 2 \left(\cos u + \frac{u^2}{2} \right) \right] d^3x$$

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \|\phi(t)\|^2 + 2 \int \left(\cos u + \frac{u^2}{2} \right) d^3x$$

est conservée. Il résulte alors du fait que

$$\cos u + \frac{u^2}{2} \geq 0$$

que $\|\phi(t)\|$ est *a priori* bornée.

Régularité des solutions

Afin d'établir les propriétés de régularité des solutions nous utilisons le résultat général suivant, pour la démonstration duquel nous renvoyons à Reed [3] ou à Reed-Simon [4].

THÉORÈME 4. — Si en plus des hypothèses nécessaires aux théorèmes 1 et 2 A et J satisfont $\forall m > 0$

a) $J : D(A^m) \rightarrow D(A^m)$

b) $\forall \phi, \psi \in \bigcap_k D(A^k)$

$$(H'_m) \|\mathbf{A}^m J(\phi)\| \leq C(\|\phi\|, \dots, \|\mathbf{A}^{m-1} \phi\|) \|\mathbf{A}^m \phi\|$$

$$(H_m^L) \|\mathbf{A}^m (J(\phi) - J(\psi))\|$$

$$\leq C(\|\phi\|, \|\psi\|, \dots, \|\mathbf{A}^m \phi\|, \|\mathbf{A}^m \psi\|) \|\mathbf{A}^m (\phi - \psi)\|$$

c) Si $\phi(t)$ est une solution m fois continûment différentiable de (5) telle

que $\phi^{(l)}(t) \in \bigcap_k D(A^k) \forall l \leq m$ alors $J(\phi(t))$ est m fois continûment différentiable et $\left(\frac{d}{dt}\right)^l J(\phi(t)) \in \bigcap_k D(A^k) \forall l \leq m$.

Sous ces hypothèses si $\phi_0 \in \bigcap_k D(A^k)$ la solution globale $\phi(t)$, dont l'existence est assurée par le théorème 2 est infiniment continûment différentiable et pour tout t $\phi(t)$ ainsi que chacune de ses dérivées sont dans $\bigcap_k D(A^k)$.

Nous allons pour commencer vérifier que les estimations (H'_m) et (H_m^L) sont satisfaites si ϕ est de la forme $\phi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour ce faire on n'aura besoin que des inégalités de Sobolev

$$\|B^{n_0} f\|_\infty \leq C \|B^{n_0+3} f\|_2 \quad (7)$$

$$\|B^{n_0} f\|_4 \leq C \|B^{n_0+1} f\|_2 \quad (8)$$

toutes les deux valables si $n \leq 4$ ce qui nous permet de traiter simultanément les cas $n = 1, 2, 3, 4$. Les cas $m = 0, 1$ ont déjà été examinés; pour un m quelconque on a

$$\|A^m(J(\phi) - J(\psi))\| \leq \|B^m(\sin \hat{u}_1 - \sin \hat{u}_2)\|_2 + \|B^m(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)\|_2 \quad (9)$$

Nous allons montrer que $\|B^m(\sin \hat{u}_1 - \sin \hat{u}_2)\|_2$ est inférieur ou égal à

$$C(\|B^m \hat{u}_1\|_2, \|B^m \hat{u}_2\|_2) \|B^{m+1}(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)\| \leq C(\|A^{m-1} \phi\|, \|A^{m-1} \psi\|) \|A^m(\phi - \psi)\|$$

Ceci entraînera que les conditions (H_m^L) et (H'_m) (en choisissant $\psi = 0$) sont

satisfaites $\forall m$. Soient donc $\phi = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\psi = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Dans l'expression $\|B^m(\sin u_1 - \sin u_2)\|_2$ nous allons considérer que B agit comme une dérivation. En additionnant et en retranchant le même terme un certain nombre de fois et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} |\sin \hat{u}_1 - \sin \hat{u}_2| &\leq |\hat{u}_1 - \hat{u}_2| \\ |\cos \hat{u}_1 - \cos \hat{u}_2| &\leq |\hat{u}_1 - \hat{u}_2| \end{aligned}$$

on en déduit que l'expression considérée est inférieure ou égale à une somme de termes de la forme

$$\|B^{m_1} \hat{w}\| \dots (B^{m_p} \hat{w})(\hat{w})^\alpha \|_2$$

où les m_i sont tels que $\sum_{i=1}^p m_i = m$, α est soit 0 soit 1 et où $\hat{w}$ est égal soit à $\hat{u}_1$, soit à $\hat{u}_2$ soit à $\hat{u}_1 - \hat{u}_2$. On peut toujours supposer que m_1 est le plus

grand des m_j et donc si $m \geq 5$ on doit avoir $m - m_j \geq 3 \forall m_j, j \neq 1$. On peut alors utiliser (7) et conclure que si $m \geq 5$

$$\begin{aligned} \|(B^{m_1}\hat{w})\dots(B^{m_p}\hat{w})w^z\|_2 &\leq \|B^{m_1}\hat{w}\|_2 \|\hat{w}\|_2^z \left\| \prod_{j=2}^p B^{m_j}\hat{w} \right\|_\infty \\ &\leq C \|B^{m_1+1}w\|_2 \|B^m w\|_2 \prod_{j=2}^p \|B^{m_j}w\|_2 \end{aligned}$$

Si $m = 2, 3, 4$ il faut vérifier que l'on a l'inégalité voulue dans chacun des cas possibles. Considérons par exemple le cas $m = 3$; trois types de termes apparaissent

$$m_1 = 3 \quad \|(B^3w)w\|_2 \leq C \|B^4w\|_2 \|Bw\|_2$$

en utilisant (7)

$$\begin{aligned} m_1 = 2 \quad \|(B^2w)(Bw)w\|_2 &\leq \|(B^2w)(Bw)\|_2 \|w\|_\infty \\ &\leq C \|(B^2w)(Bw)\|_2 \|B^3w\|_2 \\ &\leq C \|B^3w\|_2 \|B^3w\|_2 \|B^2w\|_2 \end{aligned}$$

en utilisant d'abord (7) puis (8).

$$\begin{aligned} m_1 = 1 \quad \|(Bw)(Bw)(Bw)w\|_2 &\leq \|(Bw)^2\|_2 \|Bw\|_\infty \|w\|_\infty \\ &\leq C \|(Bw)^2\|_2 \|B^4w\|_2 \|B^3w\|_2 \\ &\leq C \|B^2w\|_2^2 \|B^4w\|_2 \|B^3w\|_2 \end{aligned}$$

Les cas $m = 2$ ou 4 se traitent de manière analogue. On peut remarquer que les membres de gauche de toutes ces inégalités contiennent au plus une puissance d'un terme en B^{m+1} ; pour cette raison l'hypothèse H'_j , qui est plus forte, est elle aussi vérifiée.

Nous avons ainsi établi que l'hypothèse (b) du théorème 4 est vérifiée sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. L'hypothèse (a) résulte immédiatement des estimations (b) et du fait que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est un cœur pour toutes les puissances de A . Enfin la condition (c) est facile à vérifier en écrivant les quantités considérées comme quotients de différences et en utilisant les estimations (H'_m) et (H_m^L) . Ainsi si les données initiales f et g sont choisies dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors la solution $u(\vec{x}, t)$ de (3), dont le théorème 3 garantit l'existence, est telle que pour tout t $u(t, \vec{x})$ est infiniment différentiable au sens fort en t en tant que fonction à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; u et toutes ses dérivées sont

dans $\bigcap_{k=1}^{\infty} D(\Delta^k)$. Ainsi toutes les dérivées au sens des distributions de u sur $[-T, T] \times \mathbb{R}^n$ sont dans L^2 . Il résulte alors du lemme de Sobolev (voir par exemple [12] p. 52) que $u(\vec{x}, t)$ est C^∞ en $\vec{x}$ et en t .

Enfin signalons que l'équation non linéaire hérite d'une autre propriété de l'équation d'ondes : les solutions se propagent à la vitesse $c = 1$ [7].

Supposons que les données initiales f et g ont leurs supports dans l'ensemble Σ et définissons

$$\Sigma_t = \{ \vec{y} \mid |\vec{y} - \vec{x}| \leq t, \quad \vec{x} \in \Sigma \}$$

Alors puisque l'équation de Klein-Gordon se propage à la vitesse 1 on a

$$e^{-itA} : \Sigma_s \rightarrow \Sigma_t \quad 0 < s < t$$

Utilisant ce fait et l'équation intégrale (6) il s'ensuit que l'application non linéaire $\phi_0 \xrightarrow{M_t} \phi(t)$ jouit elle aussi de cette propriété, J préservant les propriétés de support. On peut résumer les résultats obtenus :

THÉOREME 5. — *Si les données initiales de l'équation (3) sont dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors la solution $u(t, \vec{x})$ de (3) est une fonction C^∞ de chacune de ses variables et pour tout t fixé $u(t, \vec{x})$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. La solution se propage en fait à la vitesse de la lumière (1).*

Remarque. — Les mêmes théorèmes d'existence et de régularité sont vrais pour l'équation de Sinus-Gordon contenant un terme de masse

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u + \lambda \sin u = 0$$

III. THÉORIE DE LA DIFFUSION

De façon abstraite le problème se pose dans les termes suivants : étant donné un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, un opérateur auto-adjoint A et une application non linéaire J de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ on sait que l'équation

$$\phi'(t) = -iA\phi(t) + J(\phi(t)) \quad (10)$$

possède une solution unique globale qui vérifie l'équation intégrale

$$\phi(t) = e^{-iAt} \phi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s)) ds \quad (11)$$

On va montrer que si les données initiales sont choisies dans un sous-ensemble Σ_{diff} de $\mathcal{H}$ les propriétés suivantes sont vraies.

i) $\forall \phi_- \in \Sigma_{\text{diff}}$ il existe une solution de (11) telle que $(\phi(t) - e^{-itA} \phi_-) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$ ce qui revient à dire que quand $t \rightarrow -\infty$ $\phi(t)$ tend à se confondre avec la solution $e^{-itA} \phi_-$ de l'équation libre associée à la donnée initiale ϕ_-

ii) $\forall \phi_+ \in \Sigma_{\text{diff}}$ il existe une solution $\hat{\phi}(t)$ de (11) telle que

$$(\hat{\phi}(t) - e^{-itA} \phi_+) \rightarrow 0$$

quand $t \rightarrow +\infty$ (asymptotiquement $\hat{\phi}(t)$ se confond donc avec $e^{-itA} \phi_+$). On pourra ainsi définir les opérateurs d'ondes Ω_+ et Ω_- par

$$\Omega_- : \phi_- \rightarrow \phi(0)$$

$$\Omega_+ : \phi_+ \rightarrow \hat{\phi}(0)$$

Pour ce faire on résoudra (11) avec une donnée de Cauchy ϕ_- donnée pour $t = -\infty$ et on montrera que l'équation

$$\phi(t) = e^{-itA} \phi_- + \int_{-\infty}^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s)) ds$$

a une solution unique globale et qu'il existe un ϕ_+ dans Σ_{diff} tel que $(\phi(t) - e^{-iAt} \phi_+) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Comme on le voit la méthode est calquée sur celle employée en mécanique quantique pour étudier les problèmes de diffusion. Signalons cependant deux difficultés techniques supplémentaires. D'abord, l'opérateur d'ondes n'étant pas linéaire il ne suffit pas de montrer qu'il est borné sur un ensemble dense pour en conclure qu'il est continu. Ensuite il est naturel de prendre comme ensemble Σ_{diff} des états de diffusion l'ensemble des éléments ϕ de $\mathcal{H}$ tels que $e^{-itA} \phi$ décroît de façon convenable. Si l'on veut faire de Σ_{diff} un espace de Banach alors la norme d'un élément ϕ de Σ_{diff} devra inclure de façon explicite le comportement pour $|t|$ grand de $e^{-itA} \phi$.

Nous considérons dans ce paragraphe l'équation de Sinus-Gordon à trois dimensions (c'est-à-dire $u(t, \vec{x})$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$). Il n'est pas clair *a priori* que les solutions de cette équation tendent asymptotiquement vers des solutions de l'équation libre. Heuristiquement cependant puisque pour u petit $\sin u - u \sim u^3$ on peut s'attendre à ce que l'effet de l'interaction devienne négligeable si les solutions de l'équation « en interaction » tendent vers zéro suffisamment vite comme le font les solutions de l'équation libre.

Pour réaliser ce programme et construire une théorie de la diffusion nous allons utiliser l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid \|\varphi\|_0^2 = \|B^2 u\|_2^2 + \|Bv\|_2^2 < +\infty \right\}$$

L'opérateur A défini au § II est auto-adjoint sur $D(B^3) \oplus D(B^2)C\mathcal{H}_0$ et engendre $W(t)$. Les estimations et les théorèmes de la section II permettent de conclure que si J est défini sur $\mathcal{H}_0$ par

$$J(\varphi) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{u} - \sin \hat{u} \end{pmatrix}$$

alors l'équation (6) a une solution globale unique pour chaque ϕ_0 et l'application $M_t : \phi(0) \rightarrow \phi(t)$ est continue.

Le lemme suivant dû à Morawetz et Strauss [2] décrit le comportement asymptotique des solutions de l'équation libre.

LEMME 2. — Soient $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $u(t, \vec{x})$ une solution de

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + m^2 u &= 0 \\ u(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}) \quad u_t(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \end{aligned}$$

Il existe alors une constante universelle C telle que

$$\|u(t, \vec{x})\|_{\infty} \leq C |t|^{-3/2} \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_b$$

$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_b$ désignant la somme des normes L_1 de toutes les dérivées de f d'ordre inférieur ou égal à 3 et de toutes les dérivées de g d'ordre inférieur ou égal à 2

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_b = \sum_{|\alpha| \leq 3} \|D^{\alpha} f\|_1 + \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^{\alpha} g\|_1.$$

Ce lemme exprime le fait qu'une classe de solutions de l'équation libre

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= -iA\phi(t) \\ \phi(0) &= \phi_0 \end{aligned}$$

est décroissante en t pour la norme du sup

$$\|e^{-itA}\phi_0\|_{\infty} \equiv \|u(\vec{x}, t)\|_{\infty} \leq C |t|^{-3/2} \|\phi_0\|_b$$

On introduit maintenant une nouvelle norme sur les fonctions sur $[N_1, N_2]$ à valeurs dans $\mathcal{H}_0$:

$$|||\psi(\cdot)|||_{[N_1, N_2]} \equiv \sup_{t \in [N_1, N_2]} \|\psi(t)\|_0 + \sup_{t \in [N_1, N_2]} (1 + |t|)^{3/2} \|\psi(t)\|_{\infty}$$

Pour $N_1 = -\infty$ et $N_2 = +\infty$ ($[N_1, N_2] = \mathbb{R}$) on notera cette norme simplement $|||\cdot|||$. On définit alors l'ensemble suivant

$$\Sigma_{\text{diff}} \equiv \{ \phi \in \mathcal{H}_0 \mid |||e^{-itA}\phi||| < +\infty \}$$

et la norme $|||\cdot|||_{\text{diff}}$ par

$$|||\phi|||_{\text{diff}} \equiv |||e^{-itA}\phi|||$$

Ainsi l'ensemble Σ_{diff} des états de diffusion est un espace de Banach contenant $C_0^{\infty} \times C_0^{\infty}$ et constitué par les vecteurs de $\mathcal{H}_0$ qui ont de bonnes propriétés de décroissance sous l'action de l'évolution libre e^{-itA} .

Nous allons montrer que $\forall \phi_- \in \Sigma_{\text{diff}}$ il existe une solution unique globale $\phi(t)$ de (11) telle que $\phi(t) \in \Sigma_{\text{diff}}$, $\forall t$ et telle que

$$\|\phi(t) - e^{-itA}\phi_-\|_0 \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow -\infty$$

Soit $\phi_- \in \Sigma_{\text{diff}}$, $|||\phi_-|||_{\text{diff}} \leq \eta$. Considérons alors l'ensemble $X_{\eta, \phi_-, T}$ des fonctions $\psi(\cdot)$ continues sur $(-\infty, T)$ à valeurs dans $\mathcal{H}_0$ telles que

$$|||\psi(t) - e^{-itA}\phi_-|||_{(-\infty, T]} \leq \eta$$

Pour tout T et η , $X_{\eta, \phi_-, T}$ est un espace métrique complet.

On définit j par

$$(j\psi)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-iA(t-s)} J(\psi(s)) ds$$

$$(M\psi)(t) = e^{-iAt} \phi_- + (j\psi)(t)$$

On a

$$\|j\psi(t)\|_{(-\infty, T]} \equiv \sup_{t \leq T} \|j\psi(t)\|_0 + \sup_{t \leq T} (1 + |t|)^{3/2} \|j\psi(t)\|_\infty$$

Mais

$$\|j\psi(t)\|_0 \leq \int_{-\infty}^t \|e^{-iA(t-s)} J\psi(s)\|_0 ds = \int_{-\infty}^t \|J\psi(s)\|_0 ds$$

$$\|J\psi(s)\|_0 = \|B(\hat{u}(s) - \sin \hat{u}(s))\|_2 = \|(B\hat{u})(1 - \cos \hat{u}(s))\|_2$$

$$\leq C \|B^2 u\|_2 \|B(1 - \cos \hat{u})\|_2 \leq C \|B^2 u\|_2 \|B\hat{u} \sin \hat{u}\|_2$$

Soit

$$\|J\psi(s)\|_0 \leq C \|B^2 u\|_2 \|Bu\|_2 \|u(s)\|_\infty \quad (12)$$

D'autre part

$$\|j\psi(t)\|_\infty \leq \int_{-\infty}^t \|e^{-iA(t-s)} (J\psi)(s)\|_\infty ds$$

$$\|e^{-iA(t-s)} J\psi(s)\|_\infty = \|B^{-1} \sin B(t-s)(\sin \hat{u} - \hat{u})\|_\infty$$

$$\leq C \|B^{-1} \sin B(t-s) u(s)^3\|_\infty$$

$$\leq C \|(k^2 + \lambda)^{-1/2} \sin(k^2 + \lambda)^{1/2}(t-s) \overline{u(k)}^3\|_1$$

$$\leq C \|(k^2 + \lambda)^{-1}\|_2 \|(k^2 + \lambda)^{1/2} \overline{u^3(k)}\|_2$$

$$\leq C \|B u(s)^3\|_2$$

$$\leq C \|Bu\|_2 \|u(s)\|_\infty^2$$

Soit

$$\|e^{-iA(t-s)} J\psi(s)\|_\infty \leq C \|\psi(s)\|_0 \|\psi(s)\|_\infty^2 \quad (13)$$

Il résulte ainsi des estimations (12) et (13) puisque $\|u(s)\|_\infty \sim |s|^{-3/2}$ pour $|s|$ grand que $\|j\psi(t)\|_{(-\infty, T]}$ peut être rendu arbitrairement petit en choisissant T assez voisin de $-\infty$; M appliquera alors $X_{\eta, \phi_-, T}$ dans lui-même et sera une application contractante pour T assez voisin de $-\infty$; le théorème des applications contractantes nous assure alors que M a un point fixe $\phi(\cdot)$ dans X_{η, ϕ_-, T_0} pour un certain T_0 . Les estimations précédentes impliquent aussi d'une part que $e^{-iAt}\phi(t)$ est de Cauchy en t car on a en effet

$$\|\phi(t) - e^{-iAt}\phi_-\|_0 \leq C \int_{-\infty}^t \|J\phi(s)\|_0 ds \rightarrow 0$$

quand $t \rightarrow -\infty$ en vertu de (12).

D'autre part, fixant t , on a

$$\|e^{-irA}\phi(t)\| = \sup_r \|e^{-irA}\phi(t)\|_0 + \sup_r (1 + |r|)^{3/2} \|e^{-irA}\phi(t)\|_\infty$$

Or

$$\|e^{-irA}\phi(t)\|_0 \leq \|e^{-i(r+t)A}\phi_-\|_0 + \int_{-\infty}^t \|e^{-iA(t+r-s)}J\phi(s)\|_0 ds < +\infty \quad \forall r$$

et d'autre part

$$(1 + |r|)^{3/2} \|e^{-irA}\phi(t)\|_\infty \leq (1 + |r|)^{3/2} \left[\|e^{-i(r+t)A}\phi_-\|_\infty + \int_{-\infty}^t \|e^{-iA(t+r-s)}J\phi(s)\|_\infty ds \right]$$

Mais $\phi_- \in \Sigma_{\text{diff}}$ et donc

$$(1 + |r|)^{3/2} \|e^{-irA}\phi(t)\|_\infty \leq (1 + |r|)^{3/2} (1 + |r + t|)^{-3/2} \|\phi_-\|_{\text{diff}} + (1 + |r|)^{3/2} \int_{-\infty}^t ds (1 + |t + r - s|)^{-3/2} \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha(\hat{u} - \sin \hat{u})\|_1$$

Chaque terme de la forme $\|D^\alpha[\hat{u}(s) - \sin \hat{u}(s)]\|_1$ se laisse majorer par $\|D^\alpha(\hat{u}(s) - \sin \hat{u}(s))\|_1 \leq C \|B^2 u(s)\|_2 \|Bu(s)\|_2 \|u(s)\|_\infty \leq C \eta^3 (1 + |s|)^{-3/2}$

Il s'ensuit alors aisément que

$$\|e^{-iA}\phi(t)\| < +\infty$$

car

$$\int_{-\infty}^t (1 + |t + r - s|)^{-3/2} (1 + |s|)^{-3/2} ds \leq C (1 + |t + r|)^{-3/2}$$

Ceci démontre que la solution $\phi(t)$ ainsi construite est dans $\Sigma_{\text{diff}} \forall t \in (-\infty, T]$. Enfin on prolonge cette solution pour obtenir une solution globale de (6) en définissant $\phi(t)$ pour $t > T$ par

$$\phi(t) = M_{t-T}\phi(T)$$

$\phi(t)$ vérifie (6) et

$$\|\phi(t) - e^{-iAt}\phi_-\|_0 \leq \int_{-\infty}^t \|J\phi(s)\|_0 ds \rightarrow 0 \quad t \rightarrow -\infty$$

Ainsi a été construit un opérateur d'ondes Ω_-

$$\Omega_- : \phi_- \rightarrow \phi(0) = M_{-T}\phi(T)$$

Remarque. — La solution $\phi(t)$ ainsi construite vérifiant

$$\begin{aligned} \phi(t) &= e^{-iAt}\phi_- + \int_{-\infty}^t e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))ds \\ \phi(t) &= e^{-iAt} \left[\phi_- + \int_{-\infty}^0 e^{-iAs}J(\phi(s))ds \right] + \int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))ds \end{aligned}$$

satisfait (6) avec

$$\phi_0 = \phi_- + \int_{-\infty}^0 e^{-iAs}J(\phi(s))ds$$

Pour terminer établissons quelques propriétés de Ω_- . Il est tout d'abord facile de se convaincre à l'aide des estimations démontrées que pour tout t , M_t applique Σ_{diff} dans lui-même. Comme on sait que $\phi(T) \in \Sigma_{\text{diff}}$ cela permet de conclure que $\phi(0) = M_{-T}\phi(T)$ est aussi dans Σ_{diff} : Ω_- est donc une application non linéaire de Σ_{diff} dans Σ_{diff} .

Montrons maintenant que Ω_- est injective ; en effet si $\Omega_- \phi_-^{(1)} = \Omega_- \phi_-^{(2)}$ alors l'unicité locale assurée par le théorème 1 entraîne que $\phi_-^{(1)}(t) = \phi_-^{(2)}(t)$ et comme $e^{iAt} \phi_-^{(i)}(t) \rightarrow \phi_-^{(i)}$ on a bien $\phi_-^{(1)} = \phi_-^{(2)}$. Esquissons enfin la démonstration du fait que Ω_- est continue dans un sens qu'on va préciser. On peut noter que lorsque le théorème des applications contractantes a été utilisé le choix de T ne dépendait de ϕ_- qu'à travers η . Donc pour tous les ϕ_- tels que $\|\phi_-\|_{\text{diff}} \leq \eta$ on peut choisir le même $T(\eta)$. Supposant que $\|\phi_-^{(i)}\|_{\text{diff}} \leq \eta$ $i = 1, 2$ et utilisant l'équation intégrale et les estimations établies on a

$$\begin{aligned} & \|\phi_-^{(1)}(t) - \phi_-^{(2)}(t)\|_0 \\ & \leq \|e^{-iAt}(\phi_-^{(1)} - \phi_-^{(2)})\|_0 + \int_{-\infty}^t \|e^{-iA(t-s)}[J(\phi_-^{(1)}(s)) - J(\phi_-^{(2)}(s))]\|_0 ds \\ & \leq \|\phi_-^{(1)} - \phi_-^{(2)}\|_0 + C\eta^2 \int_{-\infty}^t (1 + |s|)^{-3/2} \|\phi_-^{(1)}(s) - \phi_-^{(2)}(s)\|_0 ds \end{aligned}$$

et cela $\forall t \in (-\infty, T]$ ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \|\phi_-^{(1)}(T) - \phi_-^{(2)}(T)\|_0 & \leq \|\phi_-^{(1)} - \phi_-^{(2)}\|_0 e^{C\eta^2 \int_{-\infty}^T (1 + |s|)^{-3/2} ds} \\ & \leq C(\eta) \|\phi_-^{(1)} - \phi_-^{(2)}\|_{\text{diff}} \end{aligned}$$

Le théorème 3 et les remarques ci-dessus entraînent que M_t pour tout t est uniformément continue dans la topologie de $\mathcal{H}_0$ sur les boules de $\mathcal{H}$. Appliquant ce résultat à M_{-T} ou on conclut que

$$\begin{aligned} \|\Omega_-(\phi_-^{(1)}) - \Omega_-(\phi_-^{(2)})\|_0 & = \|\phi_-^{(1)}(0) - \phi_-^{(2)}(0)\|_0 \\ \|\Omega_-(\phi_-^{(1)}) - \Omega_-(\phi_-^{(2)})\|_0 & \leq C(\eta) \|\phi_-^{(1)} - \phi_-^{(2)}\|_{\text{diff}} \end{aligned} \quad (14)$$

Les mêmes idées et les mêmes démonstrations permettent la construction de Ω_+ . On peut collecter les résultats obtenus :

THÉORÈME 6. — *Les opérateurs d'ondes Ω_+ et Ω_- existent pour l'équation (11) et définissent des applications injectives de Σ_{diff} dans lui-même. Ω_+ et Ω_- appliquent de façon uniformément continue les boules de $\mathcal{H}_0$ pour la $\|\cdot\|_{\text{diff}}$ -topologie sur les boules de $\mathcal{H}_0$ pour la $\|\cdot\|_0$ -topologie (relation (14)).*

Remarque 1. — Pour que $\Omega_{\pm}$ soient continus dans la topologie de Σ_{diff} il aurait fallu introduire un autre ensemble d'états de diffusion. Une façon de procéder consiste à remarquer qu'on a à sa disposition deux estimations pour $K = \|e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))\|_{\infty}$.

$$\begin{aligned} K & \leq C \|\phi(s)\|_0 \|\phi(s)\|_{\infty}^2 \\ K & \leq C \|\phi(s)\|_0^2 (1 + |t-s|)^{-3/2} \|\phi(s)\|_{\infty} \end{aligned}$$

Écrivant alors $K = K^d K^{1-d}$ on en conclut que

$$\| e^{-iA(t-s)} J(\phi(s)) \|_{\infty} \leq C \| \phi(s) \|_0^{\gamma} (1 + |t-s|)^{-(1+\beta)} \| \phi(s) \|_{\infty}^{1+\alpha}$$

avec $\alpha > 0 \quad \frac{1}{2} > \beta > 0$

En définissant alors la norme $||| \cdot |||'$

$$||| \psi(t) |||' = \sup_t \| \psi(t) \|_0 + \sup_t (1 + |t|)^{1+\beta} \| \psi(t) \|_{\infty}$$

et en introduisant l'ensemble Σ'_{diff} associé on a alors dans l'estimation nécessaire pour conclure à la continuité de $\Omega_{\pm}$ dans la topologie de Σ'_{diff} à considérer l'expression $C'(t)$

$$C'(t) = \sup_r (1 + |r|)^{1+\beta} \int_{-\infty}^t (1 + |t+r-s|)^{-(1+\beta)} (1 + |s|)^{-(1+\beta)(1+\alpha)} ds$$

$q = 1 + \alpha$ étant strictement plus grand que 1 cette quantité tend vers zéro quand $t \rightarrow -\infty$ (voir [3], lemme p. 78).

Pour l'ensemble Σ_{diff} que nous avons considéré la quantité correspondante

$$C(t) = \sup_r (1 + |r|)^{3/2} \int_{-\infty}^t (1 + |t+r-s|)^{-3/2} (1 + |s|)^{-3/2} ds$$

ne tend pas vers zéro quand $t \rightarrow -\infty$.

A cette modification près les résultats du théorème 6 relatifs à $\Omega_{\pm}$ (Σ_{diff}) sont valables pour $\Omega'_{\pm}$ (Σ'_{diff}). L'introduction de cette nouvelle topologie et de ce nouvel ensemble d'états de diffusion ne permet malheureusement pas d'établir la complétude asymptotique de $\Omega'_{\pm}$ (Σ'_{diff}) (voir Remarque 4 ci-après).

Remarque 2. — A une dimension d'espace les solutions de l'équation libre décroissent pour $|t| \rightarrow \infty$ comme $C|t|^{-1/2}$ et la méthode utilisée ici pour montrer que $e^{iAt}\phi(t)$ est une suite de Cauchy cesse de s'appliquer car l'estimation fondamentale conduit alors à

$$\int_{t_1}^{t_2} \| J\phi(s) \|_0 ds \leq C \int_{t_1}^{t_2} \| u(s) \|_{\infty} ds$$

et l'intégrand n'est plus intégrable quand $|t_i| \rightarrow \infty$. L'introduction de nouvelles normes ou d'autres types de convergence s'avère donc nécessaire pour discuter ce problème.

Remarque 3. — Un soliton [8] est une solution d'une équation d'ondes non linéaire qui conserve sa forme, par exemple une solution de la forme $u(x+t)$. La présence de solutions du type soliton pour l'équation n'exclut pas la possibilité de construire une théorie de la diffusion. Deux cas sont

à considérer. Soit les solutions du type soliton ne sont pas normalisées c'est-à-dire pas suffisamment petites quand $|x| \rightarrow \infty$ pour être dans l'espace de Hilbert et dans ce cas il n'y a pas de raisons *a priori* pour penser que la présence de solutions du type soliton affecte la théorie de la diffusion qui s'intéresse elle aux données initiales petites quand $|x| \rightarrow \infty$: les solutions du type soliton ne jouent pas de rôle car elles ne sont pas dans la classe des données initiales que l'on considère pour construire une théorie de la diffusion. Soit, et c'est le cas le plus intéressant, les solutions du type soliton appartiennent à l'espace de Hilbert. Si ϕ_0 est la donnée initiale d'une solution du type soliton on ne s'attend pas à ce que $M_t \phi_0$ tende vers une solution de l'équation libre, la solution soliton conservant sa forme ; mais cela indique seulement que $\text{Range } \Omega_+$ et $\text{Range } \Omega_-$ vont être strictement contenus dans Σ_{diff} . La situation est semblable à celle rencontrée en mécanique quantique où l'on s'attend à ce que $\text{Range } \Omega_{\pm} = \sigma_{ac}(H)$. Il n'y a aucune contradiction entre le fait que l'hamiltonien possède des états liés et la possibilité de construire une théorie de la diffusion. En mécanique quantique la situation est cependant plus agréable car les états liés sont naturellement séparés des états de diffusion auxquels ils sont orthogonaux ; dans le cas des équations non linéaires on ne sait pas comment séparer dans Σ_{diff} les données initiales engendrant des solutions du type soliton de celles engendrant des états de diffusion.

Remarque 4. — Pour des équations non linéaires du type de celle considérée ici l'existence d'un opérateur de diffusion (d'une matrice S) est liée au problème de la complétude asymptotique. Si $\Omega_{\pm}$ sont asymptotiquement complets, c'est-à-dire si $\text{Ran } \Omega_+ = \text{Ran } \Omega_-$ on peut définir un opérateur de diffusion par

$$S = (\Omega_+)^{-1} \Omega_-$$

Démontrer la complétude asymptotique nécessite une estimation *a priori* de la décroissance des solutions de (11) du type des estimations établies par Morawetz et Strauss.

REFERENCES

- [1] I. SEGAL, The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction. *Bull. Soc. Mathématique de France*, t. **91**, 1963, p. 129-135.
- [2] C. MORAWETZ et W. STRAUSS, Decay and scattering of solutions of a non linear relativistic wave equation. *Commun. Pure and Applied Math.*, t. **25**, 1972, p. 1-31.
- [3] M. REED, Abstract non-linear wave equations. Springer lecture notes, n° 507, 1976.
- [4] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. III : *Analysis of operators*. Academic Press, New York, à paraître.
- [5] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I ; *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972.
- [6] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations*. Holt-Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [7] R. COURANT et D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Vol. II, Interscience, New York, 1962.

- [8] C. SCOTT, F. CHU, D. Mac LAUGHLIN, The soliton: a new concept in applied science. *Proc. I. E. E. E.*, t. **61**, 1973, p. 1443-1448.
- [9] W. STRAUSS, Non linear scattering theory, dans *Scattering Theory in Mathematical Physics*, édité par J. A. Lavita et J. P. Marchand, Reidel, Holland, 1974, p. 53-78.
- [10] I. SEGAL, Quantization and dispersion for non-linear relativistic equations. *Proc. Conference on Math.*, Theory Elem. Part. M. I. T. Press Cambridge, 1966, p. 79-108.
- [11] M. REED, Higher order estimates and smoothness of non-linear wave equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **51**, 1975, p. 79-85.
- [12] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, *Fourier Analysis and Self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
- [13] I. SEGAL, Non linear semi-groups. *Ann. Math.*, t. **78**, 1963, p. 339-364.
- [14] C. MORAWETZ et W. STRAUSS, On a non-linear scattering operator. *Comm. Pure Appl. Math.*, t. **26**, 1973, p. 47-54.
- [15] F. BROWDER, On non-linear wave equations. *Math. Zeit.*, t. **80**, 1962, p. 249-264.
- [16] W. von WAHL, Klassische Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen im Grossen. *Math. Zeit.*, t. **112**, 1969, p. 241-279.

(Manuscrit reçu le 9 décembre 1975).