

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LUIS BEL

JESUS MARTIN

Formes hamiltoniennes et systèmes conservatifs

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, n° 3 (1975), p. 173-199

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_3_173_0>

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Formes hamiltoniennes et systèmes conservatifs

par

Luis BEL

Département de Mécanique, Université de Paris VI ⁽¹⁾ et E. R. 2 C. N. R. S.

et

Jesus MARTIN

Becario del Grupo Interuniversitario de Física Teórica, España

ABSTRACT. — We define the Hamilton Form (H. F.) in the past (resp. future) of a Predictive Poincaré Invariant System (P. I. S.). Under rather general assumptions we prove that the H. F. in the past (resp. future), when they exist, they are unique. We define a Conservative System as a P. I. S. for which the H. F.'s in the past and in the future exist and coincide. Conservative Systems are, we believe, the closest generalization of Hamiltonian non relativistic systems. Using perturbation theory we prove, at the first order, the existence of H. F.'s in the past and in the future for short range P. I. S. And with a slight change in the definition, the existence of not unique, H. F.'s for long range P. I. S. The paper ends with some applications of the general Theory of H. F.'s and Conservative Systems, including the calculation of the Energy-Momentum and the Intrinsic Angular Momentum for scalar and vector interactions.

I. — INTRODUCTION

En Mécanique Classique l'intérêt des systèmes dynamiques Hamiltoniens est évident. On sait en effet, pour de tels systèmes, définir sans ambiguïté l'Énergie E , l'impulsion P_i , le Moment Cinétique J_i et $K_i = MR_i$, M étant

⁽¹⁾ Tours 65-66, 11, quai Saint-Bernard, 75-Paris-5^e.

la masse totale et R_i le Centre de masses, en les identifiant aux fonctions génératrices des transformations canoniques infinitésimales correspondant respectivement aux déplacements dans le temps, les translations d'espace, les rotations, et les transformations de Galilée pures. En outre ce n'est que pour les systèmes Hamiltoniens que l'on sait vraiment construire la Mécanique Statistique ou la Mécanique Quantique.

La théorie des Systèmes Prédicatifs Invariants par le Groupe de Poincaré (S. P. I.), c'est-à-dire la théorie relativiste des systèmes isolés de particules ponctuelles en interaction a été développée depuis quelques années de manière tout à fait satisfaisante, mais la notion de S. P. I. Hamiltonien, dont on attend qu'elle contienne l'information nécessaire pour accomplir en Relativité Restreinte ce qui fut accompli en Relativité Galiléenne, s'est montrée difficile à saisir.

La première tentative dans laquelle le problème était correctement posé, pour définir cette notion, est due à Currie Jordan et Sudarshan [10]. La notion proposée généralisait de la façon la plus naturelle qui soit la notion classique mais elle s'est soldée par un théorème de non-interaction. Autrement dit les seuls systèmes qui étaient Hamiltoniens dans leur sens étaient les systèmes de particules libres. Depuis ce travail tous les efforts pour définir la notion de S. P. I. Hamiltonien ont porté sur le choix d'hypothèses, nécessairement plus faibles que celles de [10], soumises essentiellement à une double restriction : 1) elles doivent être compatibles avec l'interaction et notamment avec les interactions intéressantes, comme par exemple l'interaction électromagnétique, et 2) elles doivent être suffisamment restrictives pour permettre de définir sans ambiguïté les grandeurs intéressantes. Il est, par exemple, aussi inconfortable de ne pas savoir définir l'Énergie d'un système que d'avoir plusieurs quantités qui répondent à la définition proposée.

L'idée principale de ce travail est d'utiliser systématiquement la propriété de séparabilité des S. P. I. considérés en imposant à la formulation Hamiltonienne proposée la condition de se réduire à la formulation Hamiltonienne connue des systèmes de particules libres quand la séparation spatiale des particules tend vers l'infini. Cette idée a été proposée pour la première fois par Hill et Kerner [17]. Elle est ici précisée et complétée. Nous utilisons le formalisme manifestement covariant, formalisme qui a déjà été utilisé pour l'étude de ce problème par Droz-Vincent [18] [19]. Les travaux de Hirondelet [20] et Kennedy [21] recoupent partiellement le nôtre, soit conceptuellement soit par le résultat de certains calculs. Le lecteur soucieux de compléter la bibliographie consacrée à ce sujet, mais dans un esprit très éloigné du nôtre, pourra également consulter les articles de Arens [22] [23] et Kunzle [24].

Le second paragraphe de ce travail est consacré à une très brève présentation de la théorie des S. P. I. dans le formalisme manifestement covariant, auquel nous avons apporté une légère retouche sans laquelle ce formalisme

ne serait pas adapté aux développements ultérieurs. Les principales hypothèses et les éléments de la technique de calcul utilisée y sont introduits.

Nous précisons au troisième paragraphe la notion de S. P. I. séparables et définissons l'indice de séparabilité du système qui mesure la décroissance de l'interaction quand la distance spatiale des particules tend vers infini.

Le quatrième paragraphe contient une brève introduction de la théorie des perturbations sous une de ses formes : celle qui consiste à faire des développements suivant les puissances de la constante de couplage. Les résultats correspondant aux interactions scalaire et vectorielle, au premier ordre, y sont rappelés explicitement pour leur intérêt. Ce paragraphe contient aussi l'énoncé de la généralisation de la loi de Newton pour les S. P. I., loi qui se révèle être aussi importante pour ces systèmes que la loi de Newton de la Mécanique Classique l'est pour les systèmes invariants par le Groupe de Galilée Inhomogène.

La partie de ce travail proprement consacrée à la notion de S. P. I. Hamiltoniens commence au cinquième paragraphe. Nous y définissons notamment la notion de Forme Hamiltonienne (F. H.) dans le passé (resp. futur) d'un S. P. I. donné comme étant une forme symplectique définie sur l'espace des phases du système, possédant les mêmes symétries que celui-ci et coïncidant avec la forme symplectique des systèmes de particules libres quand la distance spatiale entre celles-ci tend vers infini et les vitesses correspondent à une situation d'approche (resp. séparation). Sous des hypothèses assez générales, nous démontrons formellement à tous les ordres de la théorie des perturbations que si la F. H. dans le passé (resp. futur) existe, elle est unique. D'où l'intérêt de cette notion. Nous définissons un Système Conservatif comme étant un S. P. I. pour lequel les F. H. dans le passé et futur existent et coïncident. Nous aurions pu appeler de tels systèmes des Systèmes Hamiltoniens car ce sont eux qui généralisent de plus près les Systèmes Hamiltoniens de la Mécanique Classique, mais la terminologie choisie nous semble plus appropriée.

Au sixième paragraphe nous définissons l'Énergie-Impulsion P_α et le Moment Cinétique Généralisé $J_{\lambda\mu}$ en les identifiant aux fonctions génératrices de transformations canoniques infinitésimales associées à l'invariance de la F. H. *dans le passé* par les translations d'espace-temps et par le Groupe de Lorentz. Ces fonctions ne sont définies en général qu'à des constantes additives près mais la structure de l'algèbre de Lie du Groupe de Poincaré permet de les fixer sans ambiguïté. Cette approche pour définir P_α et $J_{\lambda\mu}$ est tout à fait connue. La seule nouveauté consiste à les associer à la F. H. *dans le passé*. Par construction P_α et $J_{\lambda\mu}$ tendent vers les expressions correspondantes des systèmes de particules libres quand la distance entre les particules tend vers l'infini passé. Il n'en est pas de même quand cette distance tend vers l'infini futur. Sauf pour les Systèmes Conservatifs ce qui justifie cette terminologie.

Dans le cadre de la théorie des perturbations au premier ordre nous

démontrons au septième paragraphe que tout S. P. I. dont l'indice de séparabilité est $s > 2$ admet une et une seule F. H. dans le passé (resp. futur). Si $s = 2$ il n'y a pas de F. H. dans le passé (resp. futur) au même sens que précédemment. Nous proposons dans ce cas, qui contient entre autres l'interaction électromagnétique, une définition légèrement moins restrictive de F. H. dans le passé (resp. futur). Cette notion se révélera utile malgré le fait qu'on puisse trouver une pluralité de F. H. répondant à la définition. Nous démontrons aussi que tout S. P. I. avec $s > 2$, invariant par renversement du temps et satisfaisant à la loi de Newton est conservatif. Toujours au premier ordre de la théorie des perturbations, les mêmes calculs qui servent à cette démonstration prouvent qu'il existe des coordonnées canoniques de la F. H. qui tendent vers les positions et les impulsions des particules libres quand la distance spatiale tend vers l'infini passé ET futur.

Le huitième paragraphe est consacré aux applications des résultats précédents aux interactions scalaire et vectorielle de courte ou longue portée, interactions qui sont conservatives au premier ordre. Tous les éléments permettant le calcul de la F. H., de l'Énergie-Impulsion P_α et du Moment Cinétique Généralisé $J_{\lambda\mu}$ y sont explicitement déterminés. Pour les interactions de longue portée toutes les F. H. sont déterminées, et nous voyons que toutes ces F. H. conduisent aux mêmes expressions pour P_α et W^α , le Moment Cinétique Intrinsèque.

L'Appendice de cet article permet de passer du formalisme manifestement covariant au formalisme avec invariance temporelle manifeste. Ceci est important car ce n'est que dans le cadre de ce formalisme que des notions importantes, et notamment celle d'Hamiltonien, y ont un sens. Utilisant les résultats du paragraphe huit et en développant les Hamiltoniens correspondant à l'interaction scalaire de courte portée et à l'interaction électromagnétique en puissances de c^{-1} , c étant la vitesse de la lumière dans le vide, jusqu'à c^{-2} y compris nous retrouvons respectivement l'Hamiltonien de Bopp [15] et Darwin [16]. Ceci établit le lien entre la théorie moderne des systèmes de particules en interaction en Relativité Restreinte et ses ancêtres.

II. — SYSTÈMES PRÉDICTIFS INVARIANTS PAR LE GROUPE DE POINCARÉ

Considérons un système isolé de deux particules ponctuelles sans structure. En Mécanique Relativiste Prédictive (M. R. P.) l'évolution d'un tel système est régie, dans le formalisme manifestement covariant [1]-[5], par un Système Prédictif Invariant par la composante connexe du Groupe de Poincaré (S. P. I.):

$$(II.1) \quad \frac{dx_a^\alpha}{d\lambda} = \pi_a^\alpha, \quad \frac{d\pi_a^\alpha}{d\lambda} = \theta_a^\alpha(x_b^\beta, \pi_c^\gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3; a, b, c = 1, 2).$$

Le système différentiel (1) est par définition un S. P. I. si les fonctions θ_a^α satisfont aux conditions suivantes :

i) pour toute configuration $(x_a^\alpha, \pi_b^\beta)$ générique, c'est-à-dire pour toute configuration telle que les trois vecteurs $x^\alpha \equiv x_1^\alpha - x_2^\alpha$, π_b^β soient linéairement indépendants, π_b^β étant orientés dans le temps et dans le futur ($\pi_b^0 > 0$), elles peuvent s'écrire sous la forme ⁽²⁾ :

$$(II.2) \quad \theta_a^\alpha = \eta_a a_\alpha x^\alpha + b_{aa} \pi_a^\alpha + b_{aa'} \pi_{a'}^\alpha + c_a n^\alpha$$

où

$$\eta_a \equiv (-1)^{a+1}, \quad n^\alpha \equiv \delta^{\alpha\beta\lambda\mu} x_\beta \pi_{1\lambda} \pi_{2\mu},$$

et où a_α , b_{ab} et c_a sont des fonctions des six scalaires ⁽³⁾ :

$$(II.3) \quad \pi_b^2 \equiv -\pi_b^\alpha \pi_{b\alpha} > 0, \quad (x\pi_b) \equiv x^\alpha \pi_{b\alpha}, \quad k \equiv -\pi_1^\alpha \pi_{2\alpha} \geq 1, \quad x^2 \equiv x^\alpha x_\alpha.$$

ii) vérifient les contraintes :

$$(II.4) \quad \theta_a^\alpha \pi_{a\alpha} = 0$$

iii) sont des solutions du système d'équations :

$$(II.5) \quad \pi_{a'}^\rho \frac{\partial \theta_a^\alpha}{\partial x^{\alpha'\rho}} + \theta_{a'}^\rho \frac{\partial \theta_a^\alpha}{\partial \pi^{\alpha'\rho}} = 0.$$

Si m_a sont les masses des particules considérées, leurs mouvements possibles sont les solutions du système différentiel (1) satisfaisant aux contraintes $\pi_a^2 = m_a^2$. Pour obtenir ces solutions il suffit d'après (4) d'imposer ces contraintes aux conditions initiales.

Remarque 1. — Le lecteur comprendra plus tard pourquoi contrairement aux travaux précédents [2] [6] [7] [8], dont on pourra consulter un résumé dans [9], nous avons introduit les scalaires π_a^2 comme variables indépendantes. L'identification de π_a^2 avec m_a^2 , c'est-à-dire la « géométrisation » des masses est possible grâce aux propriétés (4) et (5) des S. P. I. Les fonctions ξ_a^α utilisées précédemment, où on supposait $u_b^2 = -u_b^\alpha u_{b\alpha} = 1$ sont liées aux fonctions θ_a^α par les formules :

$$(II.6) \quad \xi_a^\alpha(x^\beta, u_b^\gamma; m_c) = m_a^{-2} \theta_a^\alpha(x^\beta, m_b u_b^\gamma); \quad \theta_a^\alpha(x^\beta, \pi_b^\gamma) = \pi_a^2 \xi_a^\alpha(x^\beta, \pi_b^{-1} \pi_b^\gamma; \pi_c).$$

La base utilisée pour écrire les expressions (2) ainsi que le système de scalaires (3) est le choix le plus naturel que l'on puisse faire et doit être considérée comme base de référence, mais ce choix n'est pas toujours le plus commode. Introduisons les deux scalaires :

$$(II.7) \quad z_a \equiv \eta_a \Lambda^{-2} [\pi_a^2 (x\pi_a) - k(x\pi_{a'})] \quad \text{où} \quad \Lambda^2 \equiv k^2 - \pi_a^2 \pi_{a'}^2 \geq 0$$

⁽²⁾ Nous utiliserons toujours la convention $a' \neq a$.

⁽³⁾ Nous utilisons la signature + 2 de l'Espace-Temps de Minkowski M_4 .

et les trois vecteurs :

$$(II.8) \quad h^\alpha \equiv x^\alpha - z_1 \pi_1^\alpha + z_2 \pi_2^\alpha, \quad t_a^\alpha \equiv \pi_a^2 \pi_a^\alpha - k \pi_a^\alpha.$$

L'intérêt de ces quantités repose sur les propriétés suivantes, dont nous ferons un usage tacite constant :

$$(II.9) \quad h^\alpha \pi_{\alpha\alpha} = 0, \quad t_a^\alpha \pi_{\alpha\alpha} = 0, \quad t_a^\alpha \pi_{\alpha\alpha} = \Lambda^2$$

$$(II.10) \quad D_a h^\alpha = 0, \quad D_a z_b = \delta_{ab} \quad \text{avec} \quad D_a \equiv \pi_a^\rho \frac{\partial}{\partial x^{\alpha\rho}}.$$

Compte tenu des contraintes (4) nous pouvons écrire les fonctions θ_a^α sous la forme :

$$(II.11) \quad \theta_a^\alpha = \eta_a a_a h^\alpha + l_{aa'} t_{a'}^\alpha + c_a n^\alpha \quad \text{où} \quad l_{aa'} = \pi_a^{-2} (b_{aa'} - z_a \cdot a_a)$$

avec a_a et $l_{aa'}$ des fonctions des six scalaires $(\pi_b^2, k, z_c, h^2 \equiv h^\alpha h_\alpha)$.

Remarque 2. — Les configurations pour lesquelles $\Lambda^2 = 0$ ne sont pas des configurations génériques puisque pour elles les deux vecteurs π_a^α sont parallèles. Lorsqu'on souhaite atteindre une configuration avec $\Lambda^2 = 0$ par un passage à la limite ce passage doit se faire à partir des expressions (2). En effet pour $\Lambda^2 = 0$ les formules de transformation pour les deux bases considérées ainsi que pour les deux systèmes de scalaires introduits ne sont pas régulières.

Nous supposons dorénavant que le S. P. I. considéré est invariant par le Groupe de Poincaré orthochrone, ou autrement dit qu'il est aussi invariant par la symétrie discrète d'inversion d'espace. Ceci se traduit par $c_a = 0$ et par conséquent les expressions (11) deviennent :

$$(II.12) \quad \theta_a^\alpha = \eta_a a_a h^\alpha + l_{aa'} t_{a'}^\alpha.$$

C'est une hypothèse de simplicité de calcul. L'abandonner ne changerait rien d'essentiel. Nous ne supposons pas toujours l'invariance par inversion temporelle. Quand elle existe cette invariance se traduit par les propriétés de parité suivantes :

$$(II.13) \quad \begin{aligned} a_a(\pi_b^2, k, h^2, z_c) &= a_a(\pi_b^2, k, h^2, -z_c) \\ l_{aa'}(\pi_b^2, k, h^2, z_c) &= -l_{aa'}(\pi_b^2, k, h^2, -z_c). \end{aligned}$$

Nous supposons dorénavant aussi que les deux particules qui composent le système considéré sont de même type, ou autrement dit que le S. P. I. est aussi invariant par le groupe de permutations S_2 . Ceci se traduit, avec des notations faciles à comprendre, par les relations :

$$(II.14) \quad \begin{aligned} a_a(\pi_a^2, \pi_{a'}^2, k, h^2, z_a, z_{a'}) &= a_a(\pi_{a'}^2, \pi_a^2, k, h^2, z_{a'}, z_a) \\ l_{a'a}(\pi_a^2, \pi_{a'}^2, k, h^2, z_a, z_{a'}) &= l_{aa'}(\pi_{a'}^2, \pi_a^2, k, h^2, z_{a'}, z_a). \end{aligned}$$

III. — SÉPARABILITÉ

Il est clair que l'interaction d'un système isolé de deux particules doit être séparable. C'est-à-dire qu'elle doit tendre vers zéro plus ou moins rapidement quand la distance spatiale les séparant tend vers infini. Plus précisément nous dirons qu'un S. P. I. est séparable si :

$$(III.1) \quad \lim_{x^2 \rightarrow +\infty} \theta_a^\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x^2 \rightarrow +\infty} x a_a = 0, \quad \lim_{x^2 \rightarrow +\infty} l_{aa'} = 0$$

a_a et $l_{aa'}$ étant les coefficients de θ_a^α dans les expressions (II.12).

De la définition (II.8) du vecteur h^α il résulte que :

$$(III.2) \quad x^2 = h^2 - \pi_1^2 z_1^2 - \pi_2^2 z_2^2 + 2k z_1 z_2.$$

Pour des valeurs de z_b et k fixées nous avons donc nécessairement :

$$(III.3) \quad \lim_{x^2 \rightarrow +\infty} h^2 \rightarrow \infty.$$

Pour des valeurs de h^2 et k fixées nous pouvons représenter la courbe $x^2 = 0$ sur un plan cartésien dont l'abscisse porte z_1 et l'ordonnée z_2 . Cette courbe est une hyperbole centrée à l'origine et dont les asymptotes sont les droites :

$$(III.4) \quad z_2 = \pi_2^{-2} (k \pm \Lambda) z_1.$$

La pente de ces deux asymptotes est positive et l'origine appartient à la région $x^2 > 0$; par conséquent nous aurons :

$$(III.5) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{x^2 \rightarrow \infty} z_2 = \gamma \infty \quad \text{avec} \quad \gamma = \pm 1.$$

Nous pouvons donc traduire les conditions (1) caractérisant les S. P. I. séparables de la manière suivante :

$$(III.6) \quad \begin{array}{ll} \lim_{x^2 \rightarrow \infty} x a_a = 0 & \lim_{x^2 \rightarrow \infty} l_{aa'} = 0 \\ z_b \rightarrow \gamma \infty, \forall h^2 & z_b \rightarrow \gamma \infty, \forall h^2 \\ h^2 \rightarrow \infty, \forall z_b & h^2 \rightarrow \infty, \forall z_b \end{array} \quad \left(k - \Lambda \leq \frac{\pi_2^2 z_2}{z_1} \leq k + \Lambda \right).$$

Étant donné une fonction f des scalaires (h^2, k, π_a^2, z_b) nous dirons qu'elle tend vers zéro à l'infini passé (resp. futur) si elle satisfait les conditions ci-dessus pour $l_{aa'}$ pour $\gamma = -1$ (resp. $\gamma = +1$). Nous écrirons en abrégé $\lim_{x^2 \rightarrow \infty p} f = 0$ (resp. $\lim_{x^2 \rightarrow \infty f} f = 0$). Utilisant cette terminologie nous dirons donc qu'un S. P. I. est séparable si les fonctions $x \cdot a_a$ et $l_{aa'}$, et donc les vecteurs θ_a^α , tendent vers zéro à l'infini passé et futur. Pour un vecteur ou tenseur t quelconque invariant par le groupe de Poincaré, développable donc comme combinaison linéaire des produits tensoriels de la base $(h^\alpha, \pi_a^\beta, n^\gamma)$, nous utiliserons des définitions analogues. Par exemple nous

dirons qu'un tenseur du second ordre tend vers zéro à l'infini passé (resp. futur) si $\lim_{x^2 \rightarrow \infty} x^r f = 0$, f étant les composantes de t dans cette base et r étant 2, 1 ou zéro dépendant d'une manière évidente, de la composante en question.

Nous dirons que s est l'indice de séparabilité d'un S. P. I. si s est le plus grand nombre pour lequel $x^{s+1} \cdot a_a$ et $x^s \cdot l_{aa'}$ tendent vers zéro à l'infini passé et futur. Nous dirons qu'une interaction est de longue portée si $s \leq 2$ et qu'elle est de courte portée dans le cas contraire.

IV. — S. P. I. APPROCHÉS

La M. R. P. telle que nous l'avons résumée dans les paragraphes précédents n'est qu'un cadre général. Il est clair que d'autres conditions doivent être introduites si l'on veut restreindre ce cadre à l'étude d'un type d'interaction particulier. Ceci a été accompli [6] [8] dans le cadre d'une théorie de perturbations pour les interactions que dans le langage de la théorie des champs on appelle interactions scalaire ou vectorielle de longue ou courte portée. Nous rappelons ci-dessous quelques résultats simples.

Supposons que les fonctions θ_a^α et donc les coefficients a_a et $l_{aa'}$ puissent être représentés par des développements en séries de puissances d'une constante de couplage g de la forme :

$$(IV.1) \quad \theta_a^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \theta_a^{(n)\alpha} : a_a = \sum_{n=1}^{\infty} g^n a_a^{(n)} \quad , \quad l_{aa'} = \sum_{n=1}^{\infty} g^n l_{aa'}^{(n)}.$$

L'emploi de ces développements dans les équations (II. 5) fournit, en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de g , un algorithme récurent pour calculer les fonctions $a_a^{(n)}$ et $l_{aa'}^{(n)}$, à partir de $a_a^{(1)}$, $l_{aa'}^{(1)}$ et de fonctions arbitraires $a_a^{(n)*}$ et $l_{aa'}^{(n)*}$ qui ne dépendent pas de z_a . Les fonctions $a_a^{(1)}$ et $l_{aa'}^{(1)}$ sont elles-mêmes de cette forme, de sorte que dans le cadre de cette approche le S. P. I. le plus général est, au premier ordre, défini par deux fonctions :

$$(IV.2) \quad a_a^{(1)} = a_a^{(1)*}(h^2, k, \pi_b; z_a) \quad l_{aa'}^{(1)} = l_{aa'}^{(1)*}(h^2, k, \pi_b; z_a).$$

La théorie des champs permet dans chaque cas particulier, compte tenu des conditions de causalité de Liénard-Wiechert dans le cas de l'interaction électromagnétique ou les conditions analogues dans les autres cas, de déterminer ces fonctions ainsi que celles d'ordre supérieur. Pour l'interaction scalaire le résultat est le suivant :

$$(IV.3) \quad \begin{aligned} a_a^{(1)} &= -\pi_a r_a^{-3} (1 + \mu r_a) \exp(-\mu r_a) \\ l_{aa'}^{(1)} &= \pi_a^{-1} \pi_{a'}^{-2} k r_a^{-3} (1 + \mu r_a) z_a \exp(-\mu r_a) \end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$(IV.4) \quad r_a \equiv + (h^2 + \Lambda^2 \pi_a^{-2} z_a^2)^{1/2}$$

et désigné par μ^{-1} la portée du champ. Pour l'interaction vectorielle le résultat est :

$$(IV.5) \quad \begin{aligned} a_a^{(1)} &= \pi_a^{-1} k r_a^{-3} (1 + \mu r_a) \exp(-\mu r_a) \\ l_{aa'}^{(1)} &= -\pi_a^{-1} r_a^{-3} (1 + \mu r_a) z_a \exp(-\mu r_a) \end{aligned}$$

$\mu = 0$ correspond ici au cas de l'interaction électromagnétique, la constante de couplage étant $g = e_1 e_2$, le produit des deux charges.

On remarquera par inspection des formules (3) et (5) que les S. P. I. approchés correspondants satisfont aux équations (II.13) et que par conséquent sont invariants par inversion du temps. Ils sont évidemment invariants par inversion d'espace puisque $c_a = 0$. Et ils sont invariants par S_2 .

Nous dirons qu'un S. P. I. qui puisse être représenté par des séries du type (1) satisfait à la loi de Newton si les fonctions $\theta_a^{(1)z}$ sont homogènes et de degré 1 par rapport aux variables π_a^β , et homogènes et de degré 0 par rapport aux variables π_a^α , pourvu que ces deux vecteurs demeurent orientés vers le futur. Cette loi se traduit sur les coefficients $a_a^{(1)}$ et $l_{aa'}^{(1)}$ par les propriétés suivantes :

$$(IV.6) \quad \begin{aligned} a_a^{(1)}(h^2, v_a v_a' k, v_a \pi_a, v_a' \pi_a'; v_a^{-1} z_a) &= v_a a_a(h^2, k, \pi_a, \pi_a'; z_a) \\ l_{aa'}^{(1)}(h^2, v_a v_a' k, v_a \pi_a, v_a' \pi_a'; v_a^{-1} z_a) &= v_a^{-1} v_a'^{-1} l_{aa'}(h^2, k, \pi_a, \pi_a'; z_a) \\ &\quad \forall v_a > 0, v_a' > 0. \end{aligned}$$

Les S. P. I. correspondant à (3) et (5) satisfont à la loi de Newton.

Remarque 1. — Si on définit un S. P. I. par des fonctions $\zeta_a^\alpha(x_b^\beta, u_c^\gamma; m_d)$ où les masses apparaissent explicitement comme des paramètres (voir première remarque du paragraphe II) la loi précédente est une conséquence de :

$$(IV.7) \quad \zeta_a^{(1)z} = m_a^{-1} \zeta_a^\alpha(x_b^\beta, u_c^\gamma)$$

d'où le nom que nous lui avons donné. Une généralisation naïve de cette loi qui consisterait à exiger la formule précédente pour les fonctions exactes conduirait à des résultats désastreux et serait incompatible avec les termes d'ordre supérieur correspondant aux interactions scalaire et vectorielle.

Les indices de séparabilité des S. P. I. approchés définis par (3) et (5) sont $s = 2$ si $\mu = 0$ et $s = \infty$ si $\mu > 0$.

V. — FORMES HAMILTONIENNES. SYSTÈMES CONSERVATIFS

Soit $(TM_4)^2$, TM_4 étant le fibré tangent à M_4 , l'espace des phases d'un S. P. I. Le groupe de Poincaré opère sur $(TM_4)^2$ d'une manière naturelle

par extension du groupe dérivé. Les générateurs du sous-groupe des translations d'espace-temps et du sous-groupe de Lorentz sont respectivement ⁽⁴⁾ :

$$(V.1) \quad \begin{aligned} \vec{P}_\mu &= -\varepsilon_b \delta_\mu^\rho \frac{\partial}{\partial x_b^\rho} \quad (\varepsilon_b = 1) \\ \vec{J}_{\lambda\mu} &= (\delta_\lambda^\rho \eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^\rho \eta_{\lambda\sigma}) \left(x_b^\sigma \frac{\partial}{\partial x_b^\rho} + \pi_b^\sigma \frac{\partial}{\partial \pi_b^\rho} \right) \end{aligned}$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique de M_4 . Les crochets de Lie de ces champs de vecteurs vérifient les relations de commutation de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré :

$$(V.2) \quad \begin{aligned} [\vec{P}_\lambda, \vec{P}_\mu] &= 0 \\ [\vec{J}_{\mu\nu}, \vec{J}_{\lambda\sigma}] &= \eta_{\mu\lambda} \vec{J}_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} \vec{J}_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma} \vec{J}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} \vec{J}_{\mu\sigma} \\ [\vec{P}_\lambda, \vec{J}_{\mu\nu}] &= \eta_{\lambda\nu} \vec{P}_\mu - \eta_{\lambda\mu} \vec{P}_\nu. \end{aligned}$$

Considérons sur $(TM_4)^2$ les deux champs de vecteurs :

$$(V.3) \quad \vec{H}_a \equiv \delta_{ab} \pi_b^\rho \frac{\partial}{\partial x_b^\rho} + \delta_{ab} \theta_b^\rho \frac{\partial}{\partial \pi_b^\rho}.$$

Dire que le système différentiel (II.1) est un S. P. I. est équivalent, comme on peut le voir facilement, à dire que ces deux champs de vecteurs satisfont aux conditions suivantes :

$$(V.4) \quad [\vec{P}_\mu, \vec{H}_a] = 0 \quad ; \quad [\vec{J}_{\lambda\mu}, \vec{H}_a] = 0 \quad (\text{équations (II.2)})$$

$$(V.5) \quad \mathcal{L}(\vec{H}_a) \pi_a^2 = 0 \quad (\text{équations (II.4)})$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur dérivée de Lie. Et :

$$(V.6) \quad [\vec{H}_a, \vec{H}_{a'}] = 0 \quad (\text{équations (II.5)}).$$

Nous voyons donc, compte tenu des équations (2), (4) et (6) qu'à tout S. P. I. correspond une extension triviale par une algèbre de Lie abélienne de dimension 2 de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. Nous appellerons le groupe de transformations de $(TM_4)^2$ engendré par $\vec{P}_\alpha, \vec{J}_{\lambda\mu}$ et $\vec{H}_a$ le Groupe de Symétrie Complet du S. P. I. considéré.

Soit Ω une 2-forme symplectique de $(TM_4)^2$. On sait que si $\vec{\Xi}$ est un champ de vecteurs qui laisse invariante Ω ,

$$(V.7) \quad \mathcal{L}(\vec{\Xi})\Omega = 0$$

(4) Nous appliquons également la convention de sommation aux indices a, b, c .

on peut associer à $\vec{\Xi}$ une fonction $F(\vec{\Xi})$, définie à une constante additive près, par la formule :

$$(V.8) \quad i(\vec{\Xi})\Omega = -dF(\vec{\Xi})$$

où $i(\vec{\Xi})$ est l'opérateur produit intérieur. Si Φ est une fonction quelconque définie sur $(TM_4)^2$ alors :

$$(V.9) \quad \mathcal{L}(\vec{\Xi})\Phi = [F(\vec{\Xi}), \Phi]$$

où $[\quad , \quad]$ désigne ici le crochet de Poisson de deux fonctions au sens de la forme symplectique Ω . On sait aussi que si $\vec{\Xi}_1$ et $\vec{\Xi}_2$ sont deux champs de vecteurs qui satisfont (7) on a :

$$(V.10) \quad d[F(\vec{\Xi}_1), F(\vec{\Xi}_2)] = dF([\vec{\Xi}_1, \vec{\Xi}_2])$$

autrement dit les deux fonctions dont on prend les différentielles diffèrent au plus par une constante.

Considérons le S. P. I. de deux particules qui n'interagissent pas : $\theta_a^\alpha = 0$; et soit $\Omega^{(0)}$ la 2-forme symplectique :

$$(V.11) \quad \Omega^{(0)} = \eta_{\alpha\beta} \delta^{ab} dx_a^\alpha \wedge d\pi_b^\beta = dx_a^\alpha \wedge d\pi_a^\alpha.$$

Cette 2-forme est invariante par le groupe de symétrie complet du système :

$$(V.12) \quad \mathcal{L}(\vec{P}_\mu)\Omega^{(0)} = 0 \quad , \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\lambda\mu})\Omega^{(0)} = 0$$

$$(V.13) \quad \mathcal{L}(\vec{H}_a^{(0)})\Omega^{(0)} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{H}_a^{(0)} = \delta_{ab}\pi_b^\rho \frac{\partial}{\partial x_b^\rho} = D_a.$$

Elle est aussi invariante par S_2 puisqu'elle ne change pas en permutant a et a' . Un choix possible des fonctions associées aux générateurs du groupe de symétrie complet par la formule (8), que nous désignerons par $P_\mu^{(0)}$, $J_{\lambda\mu}^{(0)}$ et $H_a^{(0)}$ est :

$$(V.14) \quad P_\mu^{(0)} = \varepsilon_a \pi_\mu^a \quad , \quad J_{\lambda\mu}^{(0)} = x_{a\lambda} \pi_\mu^a - x_{a\mu} \pi_\lambda^a$$

$$(V.15) \quad H_a^{(0)} = -\frac{1}{2} \pi_a^\alpha \pi_{a\alpha} \equiv \frac{1}{2} \pi_a^2.$$

On obtiendrait les fonctions les plus générales en ajoutant aux fonctions ci-dessus des constantes arbitraires.

Compte tenu du fait que π_a^2 doit être interprété comme le carré m_a^2 de la masse de la particule a (voir parag. II) et que par conséquent $\pi_a^\alpha = m_a u_a^\alpha$, u_a^α étant les vecteurs vitesse unitaire des particules, nous voyons que $P_\mu^{(0)}$ est l'Énergie-Impulsion totale du système et $J_{\lambda\mu}^{(0)}$ est le Moment Cinétique Généralisé. Par conséquent le Moment Cinétique Intrinsèque est :

$$(V.16)$$

$$W^{(0)\alpha} = \frac{1}{2} M^{-1} \delta^{\alpha\beta\lambda\mu} P_\beta^{(0)} J_{\lambda\mu}^{(0)} = M^{-1} n^\alpha \quad (M^2 \equiv -P_\alpha^{(0)} P^{(0)\alpha} = \pi_1^2 + \pi_2^2 + 2k).$$

Les fonctions (14) et (15) satisfont les relations de commutation (2), (4) et (6) en remplaçant les crochets de Lie par les crochets de Poisson. La formule (10) garantit en général ce résultat à certains éléments neutres près.

Remarque 1. — Pour que la formule (11) définisse une forme symplectique il faut qu'elle soit de rang maximum et par conséquent, en particulier, les π_a^2 doivent être considérés comme des variables indépendantes. Cette remarque doit permettre au lecteur de comprendre la Remarque 1 du paragraphe II.

L'intérêt d'exhiber une 2-forme symplectique $\Omega^{(0)}$ satisfaisant aux équations (12) et (13) est entre autres qu'elle permet d'établir un lien précis entre $P_\mu^{(0)}$, $J_{\lambda\mu}^{(0)}$, $\pi_a^2 = m_a^2$ et les symétries du S. P. I. des particules libres. En fait aussi bien la Mécanique Quantique Relativiste que la Mécanique Statistique Relativiste des systèmes à N particules semblent devoir reposer sur la possibilité de pouvoir généraliser les considérations précédentes à d'autres S. P. I.

Considérons un S. P. I. général et soit Ω une forme symplectique de $(TM_4)^2$. Nous écrirons avec des notations évidentes :

$$(V.17) \quad \Omega = \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{ab} dx_a^\alpha \wedge dx_b^\beta + \Omega_{\alpha\beta}^{ab} dx_a^\alpha \wedge d\pi_b^\beta + \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{ab} d\pi_a^\alpha \wedge d\pi_b^\beta$$

où numériquement $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$. Supposons que Ω soit invariante par le Groupe de Symétrie Complet :

$$(V.18) \quad \mathcal{L}(\vec{P}_\mu)\Omega = 0 \quad , \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\mu\nu})\Omega = 0$$

$$(V.19) \quad \mathcal{L}(\vec{H}_a)\Omega = 0.$$

Dans ces conditions chaque groupe de coefficients pour a et b fixés dans (17) définit un tenseur de M_4 invariant par le Groupe de Poincaré. Nous appellerons ces tenseurs les composantes tensorielles de Ω .

Nous dirons que Ω est compatible avec le S. P. I. considéré si elle satisfait aux équations (18) et (19), et si elle est invariante par le groupe de permutations S_2 . C'est-à-dire si, pour α et β (ou α^* et β^*) fixés, on a :

$$(V.20) \quad \begin{aligned} \Omega^{a'a}(x_a^\rho, x_{a'}^\sigma, \pi_a^\lambda, \pi_{a'}^\mu) &= \Omega^{aa'}(x_{a'}^\sigma, x_a^\rho, \pi_{a'}^\mu, \pi_a^\lambda) \\ \Omega^{a'a'}(x_a^\rho, x_{a'}^\sigma, \pi_a^\lambda, \pi_{a'}^\mu) &= \Omega^{aa'}(x_{a'}^\sigma, x_a^\rho, \pi_{a'}^\mu, \pi_a^\lambda). \end{aligned}$$

Nous dirons qu'une 2-forme symplectique Ω est une forme Hamiltonienne (F. H.) dans le passé (resp. futur) si elle est compatible avec le S. P. I. et si :

$$(V.21) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty \text{ } p(f)} (\Omega - \Omega^{(0)}) = 0$$

ce qui signifie que toutes les composantes tensorielles de $\Omega - \Omega^{(0)}$ tendent vers zéro à l'infini passé (resp. futur) au sens du paragraphe III.

Nous allons démontrer le résultat formel suivant : Si un S. P. I. est repré-

sentable par des développements du type (IV.1) et $\Omega_{1,2}$ sont deux F. H. dans le passé (resp. futur) représentables par des développements de la forme :

$$(V.22) \quad \Omega_{1,2} = \Omega^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \Omega_{1,2}^{(n)}$$

avec :

$$(V.23) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_{p(f)}} \Omega_{1,2}^{(n)} = 0$$

alors $\Omega_1 = \Omega_2$ à tous les ordres. Autrement dit sous les hypothèses faites, la F. H. dans le passé (resp. futur), si elle existe, est unique. Posons : $\Sigma \equiv \Omega_1 - \Omega_2$. Par hypothèse nous aurons $\Sigma^{(0)} = 0$ et :

$$(V.24) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_{p(f)}} \Sigma^{(n)} = 0.$$

Procédons par induction en supposant que $\Sigma^{(j)} = 0, \forall j \leq n-1$. Compte tenu des équations (19) nous aurons pour $\Sigma^{(n)}$:

$$(V.25) \quad \mathcal{L}(\vec{H}_a^{(0)})\Sigma^{(n)} = 0.$$

Soit après calcul :

$$(V.26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^c} \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^{(n)ab} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial z^c} \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta^*}^{(n)ab} + \delta_c^b \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^{(n)ab} = 0 \\ (\alpha^* &= \alpha, \beta^* = \beta) \\ \frac{\partial}{\partial z^c} \tilde{\Sigma}_{\alpha^*\beta^*}^{(n)ab} + \delta_c^a \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta^*}^{(n)ab} - \delta_c^b \tilde{\Sigma}_{\alpha^*\beta}^{(n)ab} &= 0 \end{aligned}$$

où les tildes indiquent qu'il s'agit de composantes par rapport à la base $(h^\alpha, \pi_\beta^b, n^\gamma)$. Le premier groupe d'équations nous dit que $\tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^{(n)ab}$ ne dépendent pas de z^c . Or d'après (24) ces composantes doivent être nulles pour $z_c = -\infty$ (resp. $z_c = +\infty$); donc elles doivent être nulles partout. Utilisant ce résultat et le second groupe d'équations un raisonnement identique prouve que $\tilde{\Sigma}_{\alpha\beta^*}^{(n)ab} = 0$. Le troisième groupe d'équations prouve finalement que $\tilde{\Sigma}_{\alpha^*\beta^*}^{(n)ab} = 0$. Le résultat énoncé est donc démontré.

Considérons un S. P. I. tel que la F. H. dans le passé Ω_p et la F. H. dans le futur Ω_f soient uniques. Nous dirons que ce système est un Système Conservatif si :

$$(V.27) \quad \Omega_p = \Omega_f$$

Soit (q_a^α, p_β^b) un système de coordonnées canoniques d'une 2-forme symplectique Ω compatible avec le S. P. I.; c'est-à-dire un système de coordonnées tel que l'on ait :

$$(V.28) \quad \Omega = dq_a^\alpha \wedge dp_\alpha^a.$$

Nous dirons que (q_a^a, p_b^b) est un système de coordonnées adaptées si ces fonctions satisfont aux équations suivantes :

$$(V.29) \quad \mathcal{L}(\vec{P}_\mu)q_a^a = -\varepsilon_a\delta_\mu^a, \quad \mathcal{L}(\vec{P}_\mu)p_b^b = 0$$

$$(V.30) \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\lambda\mu})q_a^a = \delta_\lambda^a q_{a\mu} - \delta_\mu^a q_{a\lambda}, \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\lambda\mu})p_b^b = \eta_{\lambda b} p_\mu^b - \eta_{\mu b} p_\lambda^b,$$

ce qui est équivalent à dire que $q_a^a - x_a^a$ et p_b^b sont des vecteurs invariants par le groupe de Poincaré, et :

$$(V.31) \quad \begin{aligned} q_a^a(x_a^\beta, x_{a'}^\gamma, \pi_a^\lambda, \pi_{a'}^\mu) &= q_a^a(x_{a'}^\gamma, x_a^\beta, \pi_{a'}^\mu, \pi_a^\lambda) \\ p_a^a(x_a^\beta, x_{a'}^\gamma, \pi_a^\lambda, \pi_{a'}^\mu) &= p_a^a(x_{a'}^\gamma, x_a^\beta, \pi_{a'}^\mu, \pi_a^\lambda). \end{aligned}$$

Nous dirons qu'un système de coordonnées adaptées de Ω_p (resp. Ω_f) est régulier à l'infini passé (resp. futur) si :

$$(V.32.1, 2) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_{p(f)}} (p_b^b - \pi_b^b) = \lim_{x^2 \rightarrow \infty_{p(f)}} (q_a^a - x_a^a) = 0$$

Enfin, nous dirons que $(\hat{q}_a^a, \hat{p}_b^b)$ est un système de coordonnées de Hamilton-Jacobi dans le passé (resp. futur) s'il est un système de coordonnées adaptées de $\Omega_{p(f)}$ régulier à l'infini passé (resp. futur) et

$$(V.33.1, 2) \quad \mathcal{L}(\vec{H}_b)\hat{p}_a^a = 0, \quad \mathcal{L}(\vec{H}_b)\hat{q}_a^a = \delta_{ba}\hat{p}_a^a.$$

On peut voir facilement que, étant donné un S. P. I., s'il existe des fonctions indépendantes $(\hat{q}_a^a, \hat{p}_b^b)$ satisfaisant aux équations (29), (30), (31), (32 pour ∞_p) (resp. (32 pour ∞_f)) et (33) la 2-forme

$$(V.34) \quad \Omega_{p(f)} = d\hat{q}_a^a \wedge d\hat{p}_a^a$$

est une F. H. dans le passé (resp. futur) du S. P. I. considéré. Les fonctions H_a étant pour ce système de coordonnées égales, à une constante additive près, à :

$$(V.35) \quad H_a = -\frac{1}{2}\hat{p}_a^a \hat{p}_{aa}.$$

VI. — ÉNERGIE-IMPULSION ET MOMENT CINÉTIQUE GÉNÉRALISÉ

Soit Ω une forme symplectique compatible avec un S. P. I. donné, et soient P_α et $J_{\lambda\mu}$ les fonctions associées aux générateurs $\vec{P}_\alpha$ et $\vec{J}_{\lambda\mu}$ par la formule (V.8). Ces fonctions ne sont définies qu'à des constantes additives près, mais s'agissant du groupe de Poincaré il est bien connu que l'on peut choisir ces constantes de manière univoque de sorte que les crochets de Poisson

de ces fonctions entre elles soient identiques aux relations de commutation (V.2) ⁽⁵⁾ :

$$\begin{aligned}
 & [P_\lambda, P_\mu] = 0 \\
 (VI.1) \quad & [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = \eta_{\mu\lambda} J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} J_{\mu\sigma} \\
 & [P_\lambda, J_{\mu\nu}] = \eta_{\lambda\nu} P_\mu - \eta_{\lambda\mu} P_\nu.
 \end{aligned}$$

On dispose donc d'un critère pour définir sans ambiguïté les fonctions P_λ et $J_{\mu\nu}$, qui ne dépendent dans ce sens que du S. P. I. et de la 2-forme Ω considérés. Dorénavant en parlant de ces fonctions nous nous référerons aux fonctions ainsi précisées.

On peut prouver aussi que :

$$(VI.2.1, 2) \quad [P_\mu, H_a] = 0, \quad [J_{\lambda\mu}, H_a] = 0.$$

En effet les formules (V.9) et (V.10) garantissent que :

$$(VI.3.1, 2) \quad [P_\mu, H_a] = C_{a\mu}, \quad [J_{\lambda\mu}, H_a] = C_{a\lambda\mu}.$$

Les $C_{a\mu}$ et $C_{a\lambda\mu}$ étant des constantes. Mais ces constantes sont nécessairement nulles. Démontrons par exemple que $C_{a\mu} = 0$. De l'identité de Jacobi :

$$(VI.4) \quad [J_{\mu\nu}, [P_\lambda, H_a]] + [H_a, [J_{\mu\nu}, P_\lambda]] + [P_\lambda, [H_a, J_{\mu\nu}]] = 0,$$

de (3) et du troisième groupe d'équations (1) il vient :

$$(VI.5) \quad [H_a, \eta_{\lambda\mu} P_\nu - \eta_{\lambda\nu} P_\mu] = 0$$

soit :

$$(VI.6) \quad \eta_{\lambda\nu} C_{a\mu} - \eta_{\lambda\mu} C_{a\nu} = 0$$

qui par contraction des indices λ et ν donne bien $C_{a\mu} = 0$.

De (V.6), (V.9) et (V.10) il vient :

$$(VI.7) \quad [H_a, H_{a'}] = C_{aa'}$$

où $C_{aa'} = -C_{a'a}$ est une constante. Mais ici encore un raisonnement simple basé sur (II.14) et (V.20) prouve que cette constante est nécessairement nulle :

$$(VI.18) \quad [H_a, H_{a'}] = 0.$$

Soit Ω_p la F. H. dans le passé d'un S. P. I. L'Énergie-Impulsion et le Moment Cinétique Généralisé seront par définition les fonctions $P_{p\alpha}$ et $J_{p\lambda\mu}$ associées à $\vec{P}_\alpha$ et $\vec{J}_{\lambda\mu}$ par Ω_p . Ces fonctions coïncident à l'infini passé, c'est-à-dire pour des configurations correspondant à des particules qui n'ont pas encore interagi, avec $P_\alpha^{(0)}$ et $J_{\lambda\mu}^{(0)}$. Ceci joint au fait qu'il s'agit d'une définition proche de celle qui permet de définir ces dernières quantités justifie notre interprétation.

⁽⁵⁾ Voir par exemple la démonstration de [10].

Si le S. P. I. est tel que $\Omega_p = \Omega_f = \Omega$ alors $P_{p\alpha} = P_{f\alpha} \equiv P_\alpha$ et $J_{p\lambda\mu} = J_{f\lambda\mu} \equiv J_{\lambda\mu}$ et ces quantités coïncident avec $P_\alpha^{(0)}$ et $J_{\lambda\mu}^{(0)}$ à l'infini passé ET futur. C'est pour cette raison que nous avons appelé ces systèmes des Systèmes Conservatifs.

De (V.9), (1) et (2) il vient :

$$(VI.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{P}_\lambda)P_\alpha &= 0 \quad , \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\mu\nu})P_\alpha = \eta_{\mu\alpha}P_\nu - \eta_{\nu\alpha}P_\mu \\ \mathcal{L}(\vec{H}_a)P_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

et :

$$(VI.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{P}_\lambda)J_{\mu\nu} &= \eta_{\lambda\nu}P_\mu - \eta_{\lambda\mu}P_\nu \\ \mathcal{L}(\vec{J}_{\mu\nu})J_{\lambda\sigma} &= \eta_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} \\ \mathcal{L}(\vec{H}_a)J_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Les équations (9) et (10) jointes aux conditions asymptotiques :

$$(VI.11) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_p} P_\alpha = P_\alpha^{(0)} \quad , \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_p} J_{\lambda\mu} = J_{\lambda\mu}^{(0)}$$

permettent également de caractériser l'Énergie-Impulsion et le Moment Cinétique Généralisé du système.

Le Moment Cinétique Intrinsèque du système est le pseudo-vecteur

$$(VI.12) \quad W^\alpha = \frac{1}{2} P^{-1} \delta^{\alpha\beta\lambda\mu} P_\beta J_{\lambda\mu} \quad (P \equiv + (-P^\alpha P_\alpha)^{1/2} ; \delta^{0123} = 1)$$

W^α est caractérisé par les équations :

$$(VI.13) \quad \mathcal{L}(\vec{P}_\lambda)W^\alpha = 0 \quad , \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\mu\nu})W^\alpha = \delta_\mu^\alpha W_\nu - \delta_\nu^\alpha W_\mu$$

jointes à la condition asymptotique :

$$(VI.14) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_p} W^\alpha = W^{(0)\alpha}.$$

Les fonctions P_α et $J_{\lambda\mu}$ sont respectivement d'après (9) et (10) un vecteur et un tenseur invariants par le groupe de Lorentz. Seulement P_α et W^β sont également invariants par le sous-groupe des translations d'espace-temps. P_α et $J_{\lambda\mu}$ sont invariants quand on permute a et a' , et pour tout système de coordonnées adaptées de Ω_p ils prennent la forme :

$$(VI.15) \quad P_\alpha = \varepsilon_a p_\alpha^a \quad , \quad J_{\mu\nu} = q_{a\mu} p_\nu^a - q_{a\nu} p_\mu^a.$$

De (V.9), (2) et (8) il vient :

$$(VI.16) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{P}_\mu)H_a &= 0 \quad , \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\lambda\mu})H_a = 0 \\ \mathcal{L}(\vec{H}_b)H_a &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations, qui impliquent en particulier que H_a sont des scalaires inva-

riants par le groupe de Poincaré, jointes à la condition asymptotique :

$$(VI.17) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_p} H_a = \frac{1}{2} \pi_a^2$$

caractérisent complètement les H_a . Il n'y a plus de constante additive arbitraire puisqu'elle est fixée par (17).

On peut prouver sous des hypothèses analogues à celles qui assurent l'unicité de la F. H. Ω que nécessairement on a :

$$(VI.18) \quad H_a = \frac{1}{2} \pi_a^2$$

à tous les ordres. $(\hat{q}_a^\alpha, \hat{p}_b^\beta)$ étant des coordonnées de Hamilton-Jacobi nous aurons donc d'après (V.34) :

$$(VI.19) \quad \hat{p}_a^\alpha \hat{p}_{a\alpha} = \pi_a^\alpha \pi_{a\alpha}.$$

VII. — THÉORIE DES PERTURBATIONS AU PREMIER ORDRE

Jusqu'à présent nous nous sommes bornés à donner quelques définitions et si parfois nous avons été en mesure d'énoncer des théorèmes d'unicité de certains des objets introduits nous avons passé sous silence les problèmes d'existence. Ce sont ces problèmes que nous abordons ici dans le cadre de la théorie des perturbations au premier ordre dont nous avons déjà résumé les principes.

Considérons un S. P. I. défini au premier ordre par des fonctions θ_a^α .

$$(VII.1) \quad \theta_a^\alpha = g(a_a^{(1)} h^\alpha + l_{aa'}^{(1)} t_a'^\alpha)$$

$a_a^{(1)}$ et $l_{aa'}^{(1)}$ étant des fonctions de $(h^2, k, \pi_b; z_a)$ (voir paragraphe IV).

Supposons que le S. P. I. considéré soit de courte portée (indice de séparabilité $s > 2$). Nous nous proposons de démontrer par construction explicite que sous cette hypothèse il existe des fonctions uniques :

$$(VII.2.1, 2) \quad \hat{p}_\beta^b = \pi_\beta^b + g \hat{p}_\beta^{(1)b} \quad , \quad \hat{q}_a^\alpha = x_a^\alpha + g \hat{q}_a^{(1)\alpha}$$

telles que :

$$(VII.3.1, 2) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_{p(f)}} \hat{p}_\beta^{(1)b} = 0 \quad , \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_{p(f)}} \hat{q}_a^{(1)\alpha} = 0$$

et telles que les équations (V.29), (V.30), (V.31) et (V.33) soient satisfaites au premier ordre (toutes les puissances de la constante de couplage g étant négligées). Nous aurons ainsi démontré, au même ordre, que la 2-forme $\Omega_{p(f)}$

$$(VIII.4) \quad \Omega_{p(f)} = dx_a^\alpha \wedge d\pi_a^\alpha + g(dx_a^\alpha \wedge \hat{dp}_a^{(1)\alpha} + \hat{dq}_a^{(1)\alpha} \wedge d\pi_a^\alpha)$$

est une F. H. dans le passé (resp. futur) du S. P. I. Autrement dit nous aurons démontré l'existence de cette F. H. que nous savions déjà unique et en même temps l'existence et unicité des coordonnées de Hamilton-Jacobi dans le passé (resp. futur).

Posons :

$$(VII.5) \quad \widehat{p}_b^{(1)\beta} = \eta_b \widehat{\alpha}_b^{(1)} h^\beta + \widehat{\mu}_{bb}^{(1)} t_b^\beta + \widehat{\mu}_{bb'}^{(1)} t_b'^\beta,$$

$$(VII.6) \quad \widehat{q}_a^{(1)\alpha} = \eta_a \widehat{\gamma}_a^{(1)} h^\alpha + \widehat{v}_{aa}^{(1)} t_a^\alpha + \widehat{v}_{aa'}^{(1)} t_a'^\alpha,$$

tous les coefficients étant des fonctions de (h^2, k, π_a, z_b) de sorte que les équations (V.29) et (V.30) seront satisfaites. De (VI.19) il vient :

$$(VII.7) \quad \pi_a \widehat{p}_{aa}^{(1)} = 0 \Leftrightarrow \widehat{\mu}_{aa}^{(1)} = 0.$$

Compte tenu de cette simplification la substitution de $\widehat{p}_a^\alpha$ dans (V.33.1) donne :

$$(VII.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\alpha}_a^{(1)}}{\partial z^a} &= -a_a^{(1)} \quad , \quad \frac{\partial \widehat{\alpha}_a^{(1)}}{\partial z^{a'}} = 0 \\ \frac{\partial \widehat{\mu}_{aa'}^{(1)}}{\partial z^a} &= -l_{aa'}^{(1)} \quad , \quad \frac{\partial \widehat{\mu}_{aa'}^{(1)}}{\partial z^{a'}} = 0. \end{aligned}$$

Les solutions de ces équations qui satisfont les conditions (3.1) dans le passé ($\gamma = -1$) ou dans le futur ($\gamma = +1$) sont :

$$(VII.9) \quad \widehat{\alpha}_a^{(1)} = -R_a(h^2, k, \pi_b; z_a) \quad , \quad \widehat{\mu}_{aa'}^{(1)} = -S_{aa'}(h^2, k, \pi_b; z_a)$$

où nous avons posé :

$$(VII.10) \quad R_a \equiv \int_{\gamma_\infty}^{z_a} a_a^{(1)}(h^2, k, \pi_b; u) du \quad , \quad S_{aa'} \equiv \int_{\gamma_\infty}^{z_a} l_{aa'}^{(1)}(h^2, k, \pi_b; u) du$$

$\widehat{p}_a^\alpha$ étant les vecteurs ainsi obtenus, la substitution de (2.2) dans (V.33.2) donne :

$$(VII.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\gamma}_a^{(1)}}{\partial z^a} &= -R_a \quad , \quad \frac{\partial \widehat{\gamma}_a^{(1)}}{\partial z^{a'}} = 0 \\ \frac{\partial \widehat{v}_{aa'}^{(1)}}{\partial z^a} &= -S_{aa'} \quad , \quad \frac{\partial \widehat{v}_{aa'}^{(1)}}{\partial z^{a'}} = 0 \\ \frac{\partial \widehat{v}_{aa}^{(1)}}{\partial z^a} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial \widehat{v}_{aa}^{(1)}}{\partial z^{a'}} = 0. \end{aligned}$$

Et par conséquent les solutions de ces équations qui permettent de satisfaire (3.2) sont :

$$(VII.12) \quad \widehat{\gamma}_a^{(1)} = - \int_{\gamma_\infty}^{z_a} R_a(h^2, k, \pi_b; u) du \quad , \quad \widehat{v}_{aa'}^{(1)} = - \int_{\gamma_\infty}^{z_a} S_{aa'}(h^2, k, \pi_b; u) du \quad , \quad \widehat{v}_{aa}^{(1)} = 0$$

Il est clair que les fonctions $(\hat{q}_a^\alpha, \hat{p}_\beta^b)$ ainsi obtenues satisfont également les équations (V.31). Ceci termine la démonstration du résultat énoncé.

Remarque 1. — Les expressions (8) permettent de satisfaire les conditions (3.1) même si l'indice de séparabilité du S. P. I. est $s = 2$. Ce sont les conditions (3.2) qui obligent à supposer $s > 2$. Si on veut généraliser la notion de F. H. dans le passé (resp. futur) dans le cas $s = 2$, cas intéressant puisqu'il contient en particulier l'interaction électromagnétique, on peut remplacer ces dernières conditions par :

$$(VII.13) \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty_{p(f)}} x^{-1}(\hat{q}_a^\alpha - x_a^\alpha) = 0$$

et définir $\Omega_{p(f)}$ par les expressions (V.28) correspondantes. Ceci ne détermine pas toutefois de manière univoque les fonctions $\hat{q}_a^\alpha$ et par conséquent il n'y a pas non plus d'unicité de $\Omega_{p(f)}$. Mais toutes les 2-formes possibles conduisent au même résultat pour P_α et W^λ . Nous verrons ceci avec plus de détails au paragraphe VIII lors de l'étude de deux cas particuliers.

Supposons maintenant que le S. P. I. de courte portée considéré satisfasse à la loi de Newton (voir parag. IV). Des propriétés d'homogénéité (IV.6) on déduit facilement que les fonctions (10) R_a sont homogènes de degré zéro par rapport aux variables π_a^α et $\pi_{a'}^\beta$. Il en résulte qu'elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$(VII.14) \quad R_a = R(h^2, k\Lambda^{-1}; \pi_a^{-1}kz_a).$$

Supposons en outre que le S. P. I. est invariant par renversement du temps. Dans ce cas de (II.13) il vient en particulier :

$$(VII.15) \quad S_{aa'}(h^2, k, \pi_b; -z_a) = S_{aa'}(h^2, k, \pi_b; z_a).$$

T étant une fonction de (h^2, k, π_a, z_b) considérons la transformation de coordonnées de $(TM_4)^2$:

$$(VII.16) \quad q_a^\alpha = \hat{q}_a^\alpha - g \frac{\partial T}{\partial \pi_a^\alpha}, \quad p_\beta^b = \hat{p}_\beta^b + g \frac{\partial T}{\partial x_\beta^b}$$

les variables $(\hat{q}_a^\alpha, \hat{p}_\beta^b)$ étant, par exemple, les coordonnées de Hamilton-Jacobi (2) dans le passé. Cette transformation laisse invariante la 2-forme Ω_p (4) à des termes de l'ordre de g^2 près :

$$(VII.17) \quad \Omega_p = dx_a^\alpha \wedge d\pi_a^\alpha + g(dq_a^{(1)\alpha} \wedge d\pi_a^\alpha + dx_a^\alpha \wedge dp_a^{(1)\alpha})$$

$q_a^{(1)\alpha}$ et $p_b^{(1)\beta}$ étant définies par :

$$(VII.18) \quad p_b^\beta = \pi_b^\beta + gp_b^{(1)\beta}, \quad q_a^\alpha = x_a^\alpha + gq_a^{(1)\alpha}.$$

Autrement dit (16) est au premier ordre une transformation canonique.

Posons :

$$(VII.19) \quad p_b^{(1)\beta} = \eta_b \alpha_b^{(1)} h^\beta + \mu_{bb}^{(1)} t_b^\beta + \mu_{bb'}^{(1)} t_b'^\beta,$$

$$(VII.20) \quad q_a^{(1)\alpha} = \eta_a \gamma_a^{(1)} h^\alpha + v_{aa}^{(1)} t_a^\alpha + v_{aa'}^{(1)} t_a'^\alpha,$$

on obtient :

$$(VII.21) \quad \begin{aligned} \alpha_a^{(1)} &= \widehat{\alpha}_a^{(1)} + 2 \frac{\partial T}{\partial h^2} \\ \mu_{aa}^{(1)} &= \widehat{\mu}_{aa}^{(1)} + \Lambda^{-2} \frac{\partial T}{\partial z^a}, \quad \mu_{aa'}^{(1)} = \widehat{\mu}_{aa'}^{(1)} - \Lambda^{-2} \frac{\partial T}{\partial z^{a'}}, \end{aligned}$$

et :

$$(VII.22) \quad \begin{aligned} \gamma_a^{(1)} &= \widehat{\gamma}_a^{(1)} - \Lambda^{-2} \left(\pi_{a'}^2 \frac{\partial T}{\partial z^a} + k \frac{\partial T}{\partial z^{a'}} - 2 \Lambda^2 z_a \frac{\partial T}{\partial h^2} \right) \\ v_{aa}^{(1)} &= \widehat{v}_{aa}^{(1)} - \Lambda^{-2} \left(k \frac{\partial T}{\partial k} + 2 \pi_a^2 \frac{\partial T}{\partial \pi^{a^2}} - z_a \frac{\partial T}{\partial z^a} \right) \\ v_{aa'}^{(1)} &= \widehat{v}_{aa'}^{(1)} - \Lambda^{-2} \left(z_a \frac{\partial T}{\partial z^{a'}} + \pi_{a'}^2 \frac{\partial T}{\partial k} + 2k \frac{\partial T}{\partial \pi^{a'^2}} \right). \end{aligned}$$

Introduisons la fonction :

$$(VII.23) \quad T \equiv \frac{1}{4} \int_{+\infty}^{h^2} [R_a(v, k, \pi_b; z_a) + R_{a'}(v, k, \pi_b; z_{a'})] dv$$

et utilisons (9) et (12) avec $\gamma = -1$. On obtient ainsi :

$$(VII.24) \quad \alpha_a^{(1)} = -\frac{1}{2} (R_a - R_{a'}) \quad , \quad \mu_{aa}^{(1)} = \frac{1}{4} \Lambda^{-2} N_a \quad , \quad \mu_{aa'}^{(1)} = -S_{aa'} - \frac{1}{4} \Lambda^{-2} N_{a'},$$

où nous avons posé :

$$(VII.25) \quad N_a \equiv \int_{\infty}^{h^2} a_a(v, k, \pi_b; z_a) dv,$$

et :

$$(VII.26) \quad \begin{aligned} \gamma_a^{(1)} &= - \int_{-\infty}^{z_a} R_a(h^2, k, \pi_b; u) du - \frac{1}{2} z_a (R_a - R_{a'}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \Lambda^{-2} (\pi_{a'}^2 N_a + k N_{a'}) + \int_{-\infty}^{z_a} u a_a(h^2, k, \pi_b; u) du \\ v_{aa}^{(1)} &= 0 \\ v_{aa'}^{(1)} &= - \int_{-\infty}^{z_a} S_{aa'}(h^2, k, \pi_b; u) du - \frac{1}{4} \Lambda^{-2} z_a N_{a'} \\ &\quad - \frac{1}{4} \Lambda^{-2} \left[\pi_{a'}^2 \int_{-\infty}^{z_a} \frac{\partial}{\partial k} N_a(h^2, k, \pi_b; u) du + 2k \int_{-\infty}^{z_a} \frac{\partial}{\partial \pi^{a^2}} N_a(h^2, k, \pi_b; u) du \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} \Lambda^{-2} \left[\pi_{a'}^2 \int_{-\infty}^{z_{a'}} \frac{\partial}{\partial k} N_{a'}(h^2, k, \pi_b; u) du + 2k \int_{-\infty}^{z_{a'}} \frac{\partial}{\partial \pi^{a'^2}} N_{a'}(h^2, k, \pi_b; u) du \right]. \end{aligned}$$

Un examen attentif des formules (24) et (26) prouve, en tenant compte entre autres des formules (14) et (15) et du fait que l'indice de séparabilité du S. P. I. est $s > 2$, que f étant l'une quelconque des fonctions ci-dessus, il existe une valeur de r telle que $x^r f$ tend vers zéro à l'infini passé ET futur, avec $r \geq 1$ s'il s'agit de $\alpha_a^{(1)}$ ou $\gamma_a^{(1)}$ et $r \geq 0$ s'il s'agit de toute autre fonction. Ainsi la 2-forme Ω_p (17) qui tendait vers $\Omega^{(0)}$ à l'infini passé tend également vers $\Omega^{(0)}$ à l'infini futur et coïncide donc avec Ω_f , la F. H. dans le futur.

Par conséquent nous avons démontré que tout S. P. I. de courte portée satisfaisant à la loi de Newton et invariant par renversement du temps est conservatif au premier ordre de la théorie des perturbations. Et nous avons démontré aussi qu'il existe des systèmes de coordonnées canoniques de Ω qui sont régulières à l'infini passé ET futur au sens du paragraphe V.

Remarque 2. — Naturellement ces coordonnées (q_a^α, p_β^b) que nous avons exhibées ne sont pas les seules qui possèdent cette propriété. Tout autre système déduit du précédent par une transformation canonique tangente à l'identité à l'infini passé et futur posséderait la même propriété. Ceci est la source d'une difficulté importante pour tout programme de quantification canonique des S. P. I. Nous aborderons ce problème dans un article ultérieur.

VIII. — INTERACTIONS SCALAIRE ET VECTORIELLE

Nous donnons ici, tous calculs faits, certains résultats explicites les plus significatifs concernant les S. P. I. associés aux interactions scalaire et vectorielle de courte ou longue portée. Les fonctions θ_a^α correspondantes étant au premier ordre données par (IV.3) et (IV.5). Si $\mu \neq 0$ les coordonnées de Hamilton-Jacobi dans le passé, $\gamma = -1$, ou dans le futur, $\gamma = +1$, se déduisent de (VII.5) et (VII.6) avec :

(VIII.1)

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_a^{(1)} &= -A_a h^{-2} \left\{ z_a r_a^{-1} \exp(-\mu r_a) + \mu \int_{\gamma_\infty}^{z_a} \exp[-\mu(h^2 + \Lambda^2 \pi_a^{-2} u^2)^{1/2}] du \right\} \\ \widehat{\mu}_{aa}^{(1)} &= 0, \quad \widehat{\mu}_{aa'}^{(1)} = L_{aa'} \Lambda^{-2} \pi_a^2 r_a^{-1} \exp(-\mu r_a) \\ \widehat{\gamma}_a^{(1)} &= -A_a h^{-2} \left\{ \Lambda^{-2} \pi_a^2 r_a \exp(-\mu r_a) + \mu z_a \int_{\gamma_\infty}^{z_a} \exp[-\mu(h^2 + \Lambda^2 \pi_a^{-2} u^2)^{1/2}] du \right\} \\ \widehat{v}_{aa}^{(1)} &= 0, \\ \widehat{v}_{aa'}^{(1)} &= L_{aa'} \Lambda^{-2} \pi_a^2 \int_{\gamma_\infty}^{z_a} (h^2 + \Lambda^2 \pi_a^{-2} u^2)^{1/2} \exp[-\mu(h^2 + \Lambda^2 \pi_a^{-2} u^2)^{1/2}] du\end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$(VIII.2) \quad A_a = -\pi_a, \quad L_{aa'} = \pi_a^{-1} \pi_a'^{-2} k$$

pour l'interaction scalaire, et :

$$(VIII.3) \quad A_a = \pi_a^{-1} k \quad , \quad L_{aa'} = -\pi_a^{-1}$$

pour l'interaction vectorielle.

L'Énergie-Impulsion P_α , le Moment Cinétique Généralisé $J_{\lambda\mu}$ et le Moment Cinétique Intrinsèque peuvent se calculer à partir des coordonnées de Hamilton-Jacobi dans le passé, $\gamma = -1$, en utilisant les formules (VI.15) et (VI.12). Posons en particulier :

$$(VIII.4) \quad \begin{aligned} P^\alpha &= P^{(0)\alpha} + g(\rho^{(1)}h^\alpha + \sigma_a^{(1)}t_a^\alpha + \sigma_{a'}^{(1)}t_{a'}^\alpha) \\ W^\alpha &= W^{(0)\alpha} + gW^{(1)}h^\alpha. \end{aligned}$$

On a alors :

$$(VIII.5) \quad \begin{aligned} \rho^{(1)} &= \eta_a(\hat{\alpha}_a^{(1)} - \hat{\alpha}_{a'}^{(1)}) \quad , \quad \sigma_a^{(1)} = \hat{\mu}_{a'}^{(1)} \\ W^{(1)} &= M^{-1}[\hat{\gamma}_a^{(1)} + \hat{\gamma}_{a'}^{(1)} - z_a\hat{\alpha}_a^{(1)} + z_{a'}\hat{\alpha}_{a'}^{(1)} + (\Lambda^2 M^{-2} - k)(\hat{\mu}_{aa'}^{(1)} + \hat{\mu}_{a'a}^{(1)})] \end{aligned}$$

On peut voir facilement de manière explicite que P_α et W^α , de même d'ailleurs que $J_{\lambda\mu}$, tendent respectivement vers $P_\alpha^{(0)}$, $W^{(0)\alpha}$ et $J_{\lambda\mu}^{(0)}$ à l'infini passé ET futur malgré le fait que $\hat{\alpha}_a^{(1)}$ et $\hat{\gamma}_a^{(1)}$ ne possèdent pas cette propriété. Nous savions déjà qu'il devait en être ainsi étant donné que les S. P. I. considérés sont de courte portée, invariants par inversion du temps, satisfont à la loi de Newton et sont donc conservatifs.

Si $\mu = 0$ l'indice de séparabilité de ces S. P. I. est $s = 2$. En tenant compte cette fois des conditions asymptotiques (V.32.1) et (VII.13) on obtient les résultats correspondants suivants :

$$(VIII.6) \quad \begin{aligned} \hat{\alpha}_a^{(1)} &= -A_a h^{-2}(z_a r_a^{-1} - \gamma \Lambda^{-1} \pi_a) \\ \hat{\mu}_{aa}^{(1)} &= 0 \quad , \quad \hat{\mu}_{aa'}^{(1)} = L_{aa'} \Lambda^{-2} \pi_a^2 r_a^{-1} \\ \hat{\gamma}_a^{(1)} &= -A_a h^{-2} \Lambda^{-1} \pi_a (\Lambda^{-1} \pi_a r_a - \gamma z_a) \\ \hat{v}_{aa}^{(1)} &= \hat{v}_{aa}^{(1)*}(h^2, k, \pi_b) \\ \hat{v}_{aa'}^{(1)} &= L_{aa'} \Lambda^{-3} \pi_a^3 \ln[h^{-1}(r_a + \Lambda \pi_a^{-1} z_a)] + \hat{v}_{aa'}^{(1)*}(h^2, k, \pi_b) \end{aligned}$$

les deux fonctions étoilées étant arbitraires mais telles que :

$$(VIII.7) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} h^{-1} \hat{v}_{aa}^{(1)*} = \lim_{h \rightarrow \infty} h^{-1} \hat{v}_{aa'}^{(1)*} = 0.$$

Il n'y a pas donc d'unicité de solution pour le problème posé et donc pas non plus d'unicité de la F. H. dans le passé (resp. futur) (voir remarque 1, parag. VII). Mais toutes les F. H. ainsi construites conduisent aux mêmes expressions pour P_α et W^α . Ceci vient du fait que ces objets ne dépendent que de quantités qui sont parfaitement définies comme on le voit dans (5). Il n'en est pas de même pour $J_{\lambda\mu}$.

Plus explicitement les résultats sont :

$$(VIII.8) \quad P^{\alpha} = P^{(0)\alpha} + g[\eta_a h^{-2}(A_{a'} z_a r_{a'}^{-1} - A_a z_{a'} r_a^{-1}) h^{\alpha} + \Lambda^{-2}(L_{a'a} \pi_a^2 r_{a'}^{-1} t_a^{\alpha} + L_{aa'} \pi_{a'}^2 r_a^{-1} t_{a'}^{\alpha})]$$

$$(VIII.9) \quad W^{\alpha} = W^{(0)\alpha} - g M^{-1} \Lambda^{-2} \cdot \{ \pi_a^2 [A_a + (k - \Lambda^2 M^{-2}) L_{aa'}] r_a^{-1} + \pi_{a'}^2 [A_{a'} + (k - \Lambda^2 M^{-2}) L_{a'a}] r_{a'}^{-1} \} n^{\alpha}.$$

Ici encore P^{α} tend vers $P^{(0)\alpha}$ à l'infini passé ET futur. Pour W^{α} le comportement asymptotique doit être précisé comme ceci :

$$(VIII.10) \quad \lim_{z_a \rightarrow \pm \infty, \forall h < \infty} W^{\alpha} = W^{(0)\alpha}$$

$$(VIII.11) \quad \lim_{h \rightarrow \infty, \forall z_b} |W^{(1)\alpha}| < \infty$$

cette dernière formule correspondant au cas où $|W^{(0)\alpha}| = M^{-1} \Lambda h$ tend vers l'infini comme le paramètre d'impact h .

APPENDICE

Soit f une fonction de $(x_a^\alpha, \pi_b^\beta)$. Nous désignerons par $\bar{f}$ la restriction de f sur les hypersurfaces d'équations :

$$(A.1) \quad x_a^0 = 0 \quad , \quad \pi_a^2 = m_a^2$$

i, j, k prenant les valeurs 1, 2, 3, (x_a^i, v_b^i) avec :

$$(A.2) \quad v_b^j = \lambda_b \pi_b^j \quad \text{où} \quad \lambda_b \equiv (m_b^2 + \pi_b^j \pi_{bj})^{-1/2} = m_b^{-1} (1 - v_b^2)^{1/2}$$

est, pour chaque couple de valeurs de m_a données, un système de coordonnées admissible sur l'hypersurface correspondante. Nous pourrions donc poser :

$$(A.3) \quad \bar{f}(x_a^i, v_b^j, m_c) = f[x_a^i, x_b^0 = 0 \quad , \quad \pi_d^j = m_d (1 - v_d^2)^{-1/2} v_d^j \quad , \quad \pi_e^0 = m_e (1 - v_e^2)^{-1/2}]$$

On sait [2], [9] que tout S. P. I., tel que nous les avons définis au paragraphe II, est équivalent à un système différentiel du type :

$$(A.4) \quad \frac{dx_a^i}{dt} = v_a^i \quad , \quad \frac{dv_a^i}{dt} = a_a^i(x_b^j, v_c^k; m_d)$$

avec :

$$(A.5) \quad a_a^i = m_a^{-2} (1 - v_a^2) (\bar{\theta}_a^i - v_a^i \bar{\theta}_a^0)$$

dans ce sens que $\phi_a^i(x_{0b}^j, v_{0c}^k; t)$ étant la solution générale du système (4) pour des données initiales à $t = 0$, les courbes de M_4 définies par :

$$(A.6) \quad x_a^0 = t \quad , \quad x_a^i = \phi_a^i(x_{0b}^j, v_{0c}^k; t)$$

coïncident avec les solutions de (II. 1) associées à des conditions initiales telles que $\pi_a^2 = m_a^2$. Nous appelons ce formalisme le formalisme avec invariance temporelle manifeste.

Les fonctions a_a^i sont les solutions du système d'équations [11], [12], [13] :

$$(A.7) \quad \varepsilon_b^i \frac{\partial a_a^i}{\partial x_b^j} = 0 \quad , \quad \delta_{.k}^s \left(x_a^k \frac{\partial a_b^i}{\partial x_a^s} + v_a^k \frac{\partial a_b^i}{\partial v_a^s} \right) = \delta_{.kj}^i a_b^k$$

$$v_a^s (x_{aj} - x_{bj}) \frac{\partial a_b^i}{\partial x_a^s} + [v_a^s v_{aj} + a_a^s (x_{aj} - x_{bj}) - \varepsilon_a \delta_j^s] \frac{\partial a_b^i}{\partial v_a^s} = 2v_{bj} a_b^i + v_b^i a_{bj}$$

A tout S. P. I. du type (4) est associée une réalisation du Groupe de Poincaré dans l'espace des phases du système. Un système de générateurs de cette réalisation, que nous appelons la réalisation induite, étant :

$$(A.8) \quad \vec{H} = -v_a^i \frac{\partial}{\partial x_a^i} - a_a^i \frac{\partial}{\partial v_a^i}$$

$$\vec{P}_k = -\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial x_a^k}$$

$$\vec{J}_k = \delta_{k.i} x_a^j \frac{\partial}{\partial x_a^i} + \delta_{k.j} v_a^i \frac{\partial}{\partial v_a^i}$$

$$\vec{K}_j = -x_{aj} v_a^i \frac{\partial}{\partial x_a^i} + (\varepsilon_a \delta_j^i - a_a^i x_{aj} - v_a^i v_{aj}) \frac{\partial}{\partial v_a^i} .$$

$\vec{H}$, $\vec{P}_k$, $\vec{J}_k$ et $\vec{K}_j$ sont respectivement les générateurs des translations dans le temps, des translations d'espace, des rotations et des transformations de Lorentz pures.

Considérons de nouveau une fonction $f(x_a^\alpha, \pi_b^\beta)$ et posons :

$$(A.9) \quad \mathcal{L}(\vec{H}_a)f = f_a.$$

On peut prouver les formules suivantes :

$$(A.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{H})\bar{f} &= -\overline{\mathcal{L}(\vec{P}_0)f} - \lambda^a \bar{f}_a \\ \mathcal{L}(\vec{P}_j)\bar{f} &= \overline{\mathcal{L}(\vec{P}_j)f} \\ \mathcal{L}(\vec{J}^k)\bar{f} &= \frac{1}{2} \delta^{kij} \overline{\mathcal{L}(\vec{J}_{ij})f} \\ \mathcal{L}(\vec{K}_j)\bar{f} &= -\overline{\mathcal{L}(\vec{J}_{j0})f} - \lambda^a x_{aj} \bar{f}_a \end{aligned}$$

$\vec{P}_\alpha$ et $\vec{J}_{\lambda\mu}$ étant aux seconds membres les générateurs du Groupe de Poincaré agissant dans $(TM_4)^2$ définis par (V.1).

Soit Ω une 2-forme symplectique compatible avec le S. P. I. (voir parag. V) et telle que :

$$(A.11) \quad i(\vec{H}_a)\Omega = -d\left(\frac{1}{2}\pi_a^2\right) = -dH_a$$

hypothèse qui comme nous l'avons vu au paragraphe VI se trouve réalisée sous des conditions assez générales si $\Omega = \Omega_{p(f)} \cdot (q_a^\alpha, p_\beta^b)$ étant un système de coordonnées canoniques de Ω la restriction $\bar{\Omega}$ de cette 2-forme sur une quelconque des hypersurfaces d'équations (1) sera donnée par :

$$(A.12) \quad \bar{\Omega} = \overline{dq_a^\alpha} \wedge \overline{dp_\alpha^a}$$

ou étant donné que pour toute fonction f on a :

$$(A.13) \quad \overline{df} = d\bar{f}$$

nous avons aussi :

$$(A.14) \quad \bar{\Omega} = d\bar{q}_a^\alpha \wedge d\bar{p}_\alpha^a$$

Nous savons que compte tenu de (V.8) nous aurons en particulier :

$$(A.15) \quad i(\vec{P}_0)\Omega = \mathcal{L}(\vec{P}_0)q_a^\alpha dp_\alpha^a - \mathcal{L}(\vec{P}_0)p_\alpha^a dq_a^\alpha = -dP_0$$

d'où il vient en utilisant (10) :

$$(A.16) \quad -d\bar{P}_0 = -[\mathcal{L}(\vec{H})\bar{q}_a^\alpha - \lambda^b \overline{\mathcal{L}(\vec{H}_b)q_a^\alpha}]d\bar{p}_\alpha^a + [\mathcal{L}(\vec{H})\bar{p}_\alpha^a - \lambda^b \overline{\mathcal{L}(\vec{H}_b)p_\alpha^a}]d\bar{q}_a^\alpha$$

Soit :

$$(A.17) \quad -d\bar{P}_0 = -[\mathcal{L}(\vec{H})\bar{q}_a^\alpha d\bar{p}_\alpha^a - \mathcal{L}(\vec{H})\bar{p}_\alpha^a d\bar{q}_a^\alpha] + \lambda^b d\bar{H}_b.$$

Mais d'après (11) $\bar{H}_b = \frac{1}{2}\pi_b^2 = \frac{1}{2}m_b^2$ à une constante près. Donc nous avons démontré que :

$$(A.18) \quad -d\bar{P}_0 = -i(\vec{H})\bar{\Omega}.$$

Autrement dit nous avons démontré que $\bar{\Omega}$ est invariante par $\vec{H}$:

$$(A.19) \quad \mathcal{L}(\vec{H})\bar{\Omega} = 0$$

et que la fonction H associée à $\vec{H}$ est, à une constante additive près :

$$(A.20) \quad H = -\bar{P}_0.$$

Un calcul similaire prouve également que :

$$(A.21) \quad \mathcal{L}(\vec{P}_i)\bar{\Omega} = 0, \quad \mathcal{L}(\vec{J}_i)\bar{\Omega} = 0, \quad \mathcal{L}(\vec{K}_i)\bar{\Omega} = 0$$

les fonctions associées correspondantes étant, à des constantes additives près :

$$(A.22) \quad P_i = \bar{P}_i, \quad J^i = \frac{1}{2} \delta^{ijk} \bar{J}_{jk}, \quad K_i = -\bar{J}_{i0}.$$

L'un de nous (L. B.) a considéré précédemment [14] le problème de la définition des S. P. I. Hamiltoniens dans le cadre du formalisme avec invariance temporelle manifeste. L'existence d'une forme symplectique σ satisfaisant aux équations (19) et (21) faisait partie de la définition proposée. Mais cette condition était assortie d'une deuxième restriction : les crochets de Poisson au sens de σ des différences de position x^i devaient être nuls. Nous voyons ici que la 2-forme $\bar{\Omega}$ possède la première propriété requise de σ . Mais nous avons pu voir dans le cadre de la théorie des perturbations au premier ordre que la deuxième condition n'est pas vérifiée dans les exemples discutés au paragraphe VIII. Ceci lui enlève tout intérêt.

Notre approche actuelle consiste donc à obtenir les F. H. dans le cadre du formalisme avec invariance temporelle manifeste par restriction des F. H. du formalisme manifestement covariant. De même nous définissons l'Énergie H , l'Impulsion P_i , le Moment Cinétique J_i et le Centre de masses $R^i = H^{-1}K^i$ comme les restrictions, respectivement, de P^0 , P_i , le dual de J_{ij} et $(P^0)^{-1}J^{i0}$.

$\bar{P}^0 = H$ en particulier devient donc ainsi, pour tout S. P. I. conservatif, l'Hamiltonien du système. Rétablissant la vitesse de la lumière dans le vide c dans toutes les formules et développant les expressions de $\bar{P}^0$ obtenues au paragraphe VIII en puissance de c^{-1} jusqu'à c^{-2} y compris nous avons obtenu pour l'interaction scalaire de courte portée :

$$(A.23) \quad H = \frac{1}{2} \dot{m}_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - g r^{-1} e^{-\mu r} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{3}{8} m_1 v_1^4 + \frac{3}{8} m_2 v_2^4 - \frac{1}{2} g r^{-1} e^{-\mu r} [v_1^2 + v_2^2 - (v_1 v_2) + r^{-2} (1 + \mu r) (x v_1)(x v_2)] \right\}$$

qui n'est autre que l'Hamiltonien de Bopp [15] correspondant à cette interaction, et pour l'interaction électromagnétique :

$$(A.24)$$

$$H = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + g r^{-1} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{3}{8} m_1 v_1^4 + \frac{3}{8} m_2 v_2^4 + \frac{1}{2} g r^{-1} [(v_1 v_2) + r^{-2} (x v_1)(x v_2)] \right\}$$

qui n'est autre que l'Hamiltonien de Darwin [16].

RÉFÉRENCES

- [1] Ph. DROZ-VINCENT, *Phys. Scripta*, t. 2, 1970, p. 129.
- [2] L. BEL, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 14, 1971, p. 189.
- [3] R. ARENS, *Arch. for Rat. Mech. and Analysis*, t. 47, 1972, p. 255.
- [4] J. G. WRAY, *Phys. Rev.*, D, t. 1, 1970, p. 8.
- [5] H. P. KUNZLE, Preprint Department of Mathematics. University of Alberta.

- [6] L. BEL, A. SALAS et J. M. SANCHEZ-RON, *Phys. Rev.*, D, t. 7, 1973, p. 1099.
- [7] L. BEL et J. MARTIN, *Phys. Rev.*, D, t. 8, 1973, p. 12.
- [8] L. BEL et J. MARTIN, *Phys. Rev.*, D, t. 9, 1974, p. 10.
- [9] L. BEL dans Journées Relativistes de Toulouse (1974). Université de Toulouse, Département de Mathématiques.
- [10] D. G. CURRIE, T. F. JORDAN et E. C. SUDARSHAN, *Rev. Mod. Phys.*, t. 35, 1963, p. 530.
- [11] D. G. CURRIE, *Phys. Rev.*, t. 142, 1966, p. 817.
- [12] R. N. HILL, *J. Math. Phys.*, t. 8, 1967, p. 201.
- [13] L. BEL, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 12, 1970, p. 307.
- [14] L. BEL, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 18, 1973, p. 57.
- [15] P. HAVAS et J. STACHEL, *Phys. Rev.*, t. 185, 1969, p. 1636.
- [16] C. G. DARWIN, *Phil. Mag.*, t. 39, 1920, p. 537.
- [17] R. N. HILL et E. H. KERNER, *Phys. Rev. Lett.*, t. 17, 1966, p. 1156.
- [18] Ph. DROZ-VINCENT, *Il Nuovo Cimento*, t. 12 B, 1972, p. 1.
- [19] Ph. DROZ-VINCENT, Preprint.
- [20] D. HIRONDEL, *J. Math. Phys.*, t. 15, 1974, p. 1689.
- [21] F. J. KENNEDY, Preprint. Department of Physics. University of Alberta.
- [22] R. ARENS, à paraître aux *Proc. Roy. Soc. London*.
- [23] H. P. KUNZLE, *J. Math. Phys.*, t. 15, 1974, p. 1033.

(Manuscrit reçu le 12 novembre 1974)