

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. FRONTEAU

**Et si la chaleur était d'essence non covariante ?
(Contribution à la relativisation de la thermodynamique
sur la base d'une thermodynamique fine)**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, n° 1 (1975), p. 63-79

[<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_1_63_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_1_63_0)

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Et si la chaleur était d'essence non covariante ?

(Contribution à la relativisation de la thermodynamique
sur la base d'une thermodynamique fine)

par

J. FRONTEAU
Université d'Orléans (*).

RÉSUMÉ. — Sur la base d'une dynamique covariante non conservative, l'auteur tente de définir les notions de chaleur et de température au plan microscopique. Il en déduit, pour les grandeurs macroscopiques correspondantes, les lois de transformation relativiste de Planck :

$$\Delta Q = \frac{\Delta Q_0}{\gamma} \quad \text{et} \quad T = \frac{T_0}{\gamma}.$$

ABSTRACT. — On the basis of covariant non conservative dynamics, the author attempts to define the notions of heat and temperature at the microscopic level. For the corresponding macroscopic quantities, he then derives Planck's relativistic transformation laws:

$$\Delta Q = \frac{\Delta Q_0}{\gamma} \quad \text{et} \quad T = \frac{T_0}{\gamma}.$$

I. INTRODUCTION D'UN MODÈLE DISSIPATIF COVARIANT

La plupart des physiciens qui s'intéressent actuellement à la relativisation de la Thermodynamique raisonnent soit dans le cadre d'une certaine mécanique à masse au repos variable [1] [5] [7] [8] [10] [11] [12] [14] [19], soit dans le cadre d'une mécanique dissipative [6] [15] [20]. Dans la mesure où l'on a récemment démontré l'équivalence des formulations covariantes

(*) Le présent article est le texte d'un exposé fait au CNAM, le 7 mars 1974, dans le cadre du séminaire de mathématiques appliquées (A. AVEZ).

de la mécanique dissipative et des mécaniques à masse au repos variable [20], il semble pratique de postuler ce formalisme covariant unique c'est-à-dire en coordonnées galiléennes réduites,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds}(M_0 c^2 u^\alpha) = \mathcal{F}^\alpha + D^\alpha & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \mathcal{F}^\alpha u_\alpha \equiv 0; & D^\alpha u_\alpha \neq 0 \end{cases}$$

et de se poser le problème — essentiel — de son interprétation physique.

Pour les systèmes conservatifs régis par

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds}(M_0 c^2 u^\alpha) = \mathcal{F}^\alpha \\ \mathcal{F}^\alpha u_\alpha \equiv 0 \end{cases}$$

il a été facile de reconnaître le travail mécanique $\delta\mathcal{T}$ et la variation de l'énergie cinétique dE_{cin} parmi les termes de la somme $\mathcal{F}^\alpha u_\alpha$. Le problème fondamental de la relativisation de la Thermodynamique sera de même de reconnaître l'apport de chaleur δQ parmi les termes de la somme $D^\alpha u_\alpha$ mais, contrairement à la précédente, cette question est très épineuse. En effet — et les auteurs qui utilisent un modèle de type (1) ne l'ont peut-être pas suffisamment dit — les forces D^α et $\mathcal{F}^\alpha$ sont de nature physique très différente. O. Costa de Beauregard [17], lui, les appelle respectivement ⁽¹⁾ « néoforce » et « paléoforce », soulignant ainsi la nouveauté du terme D^α par rapport au terme traditionnel $\mathcal{F}^\alpha$.

La force D^α possède un caractère dissipatif assez gênant *a priori* (nous le comprendrons plus loin), à tel point que nombreux sont les physiciens qui doutent que D^α puisse jamais constituer un modèle valable. Cependant nous admettons avec R. Thom [16] qu'« il n'est pas impossible que pour certains processus naturels, l'approche de l'équilibre se fasse par superposition d'une composante réversible à caractère hamiltonien et d'une composante irréversible à caractère de gradient », et nous remarquerons que J. Henry et C. Barrabes [12] [19] ont récemment proposé une interprétation simple de D^α , à savoir l'émission ou l'absorption de rayonnements divers, qu'ils décrivent à l'aide d'un terme $\delta P^\alpha = D^\alpha ds$.

II. UNE DÉFINITION « FINE » DE L'APPORT DE CHALEUR

Décomposons la quadriforce dissipative D^α en deux composantes, respectivement parallèle et orthogonale à u^α , la décomposition étant toujours possible puisque $u^\alpha u_\alpha = 1 \neq 0$. Ainsi,

⁽¹⁾ Pour être très exact, il faut dire que ce n'est pas D^α mais sa composante Au^α , que O. Costa de Beauregard appelle « néoforce ».

$$D^\alpha = F^\alpha + Au^\alpha \quad (F^\alpha u_\alpha \equiv 0 \text{ par définition } ^{(2)}, \quad A \text{ scalaire } ^{(3)})$$

Il vient :

$$\mathcal{F}^\alpha + D^\alpha = \mathcal{F}^\alpha + F^\alpha + Au^\alpha$$

En posant $\mathcal{F}^\alpha + F^\alpha = 0^\alpha$, $0^\alpha u_\alpha \equiv 0$, nous écrirons donc (1) sous la forme

(3)

$$\frac{d}{ds} (M_0 c^2 u^\alpha) = 0^\alpha + Au^\alpha$$

Pour obtenir la formulation tridimensionnelle de cette mécanique, séparons les composantes spatiales et temporelle des quadrivecteurs. Nous écrirons successivement, en suivant A. Lichnerowicz [2] :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & \frac{dt}{ds} &= \frac{\gamma}{c}, & u^j &= v^j \frac{\gamma}{c}, & u^4 &= \gamma \\ & \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} (M_0 c^2 u^\alpha) &= 0^\alpha + Au^\alpha \\ & \begin{cases} \frac{d}{dt} (M_0 \gamma v^j) = \frac{0^j}{\gamma} + \frac{A}{\gamma} u^j & j = 1, 2, 3 \\ \frac{d}{dt} (M_0 \gamma c) = \frac{0^4}{\gamma} + \frac{A}{\gamma} u^4 \end{cases} \end{aligned}$$

⁽²⁾ Pour la distinguer de la force traditionnelle $\mathcal{F}^\alpha$, J. Henry et C. Barrabes [12] [19] appellent F^α la « poussée ».

⁽³⁾ Dans le cas du rayonnement électromagnétique, e étant la charge de la particule, le scalaire A aura pour expression :

$$A = \frac{2}{3} e^2 \frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds}$$

En d'autres termes, $F^{\alpha\lambda}$ étant le tenseur du champ électromagnétique, l'émission du rayonnement sera décrite par l'un ou l'autre des systèmes d'équations suivants, qui sont équivalents [cf. (3) et (6)] :

$$\frac{d}{ds} [M_0 c^2 u^\alpha] = e F^{\alpha\lambda} u_\lambda + \frac{2}{3} e^2 \frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds} u^\alpha$$

ou

$$M_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = e F^{\alpha\lambda} u_\lambda; \quad \frac{d}{ds} (M_0 c^2) = \frac{2}{3} e^2 \frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds}$$

Des calculs tout à fait parallèles aux calculs classiques [cf. L. Landau et E. Lifchitz [9], p. 258] conduisent alors aux relations ci-dessous, dans lesquelles $\vec{v}$ et $\vec{\phi}$ sont respectivement la vitesse et la force dissipative tridimensionnelles, et W_0^2 le carré de l'accélération de la particule dans le repère galiléen par rapport auquel elle est au repos à l'instant considéré :

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= \frac{A}{c} \vec{v} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{M_0^2 c^5} (F_{\nu\mu} u^\mu) (F^{\nu\lambda} u_\lambda) \vec{v} = - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} W_0^2 \vec{v} \\ \gamma \frac{d}{dt} (M_0 c^2) &= - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} W_0^2 \end{aligned}$$

L'utilisation du formalisme (3) implique donc que l'énergie électromagnétique rayonnée provienne de la réserve énergétique que constitue la masse. On retrouve ainsi le problème de la renormalisation de la masse, mais sous un jour un peu nouveau.

c'est-à-dire, en posant $f^j = \frac{0^j}{\gamma}$,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (M_0 \gamma v^j) = f^j + \frac{A}{c} v^j \\ \frac{d}{dt} (M_0 \gamma c) = \frac{0^4}{\gamma} + A \end{cases}$$

Nous obtiendrons un bilan énergétique complet en détaillant l'identité $(0^\alpha + A u^\alpha) u_\alpha = A u^\alpha u_\alpha = A$, c'est-à-dire :

$$A = 0^4 u_4 - 0^j u_j + A (u_4)^2 - A u^j u_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

d'où, puisque $0^j = \gamma f^j$, $u^j = v^j \frac{\gamma}{c}$, $u^4 = \gamma$,

$$A = 0^4 \gamma - \frac{\gamma^2}{c} f^j v_j + A \gamma^2 - \frac{A \gamma^2}{c^2} v^j v_j$$

Pour passer à des grandeurs qui aient mêmes dimensions qu'une puissance mécanique, il faut multiplier cette relation par $\frac{c}{\gamma^2}$. Il vient alors :

$$(5) \quad \frac{c}{\gamma^2} A = \frac{0^4}{\gamma} c - f^j v_j + A c - \frac{A}{c} v^j v_j$$

Introduisons maintenant l'équivalence suivante, établie dans un précédent article [20] :

$$(6) \quad \boxed{\frac{d}{ds} (M_0 c^2 u^\alpha) = 0^\alpha + A u^\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{ds} (M_0 c^2) = A \\ M_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = 0^\alpha \end{cases}}$$

La méthode qui nous a permis de passer de (3) à (4) transforme l'équation

$$M_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = 0^\alpha$$

en deux relations

$$(7) \quad \begin{cases} M_0 \frac{d}{dt} (\gamma v^j) = f^j \\ M_0 \frac{d}{dt} (\gamma c) = \frac{0^4}{\gamma} \end{cases}$$

Remarquons en passant qu'il s'agit là de la mécanique de H. Arzeliers [14].

Quant à la relation $A = \frac{d}{ds}(M_0 c^2)$, elle s'écrit encore :

$$(8) \quad A = \gamma \frac{d}{dt}(M_0 c)$$

Du fait de (7) et (8), le bilan énergétique (5) devient enfin :

$$(9) \quad \left\{ \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt}(M_0 c^2) = M_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt} - f^j v_j + \gamma \frac{d}{dt}(M_0 c^2) - \gamma v^2 \frac{dM_0}{dt} \right\}$$

Il est facile de vérifier que la relation d'orthogonalité $0^\alpha u_\alpha = 0$ implique :

$$\frac{0^4}{\gamma} c - f^j v_j = 0$$

c'est-à-dire :

$$M_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt} - f^j v_j = 0$$

Nous remarquons d'autre part que le reste de la relation (9) est une identité. Nous garderons cependant tous les termes qui figurent dans (9), notre but étant justement de bien comprendre l'origine de ces divers termes afin de les interpréter physiquement.

Analysons maintenant les diverses définitions proposées d'ordinaire pour l'apport de chaleur δQ .

(Pour la bibliographie, cf. [7] [8] [10] [11])

$$1) \quad \delta Q^{(A)} = \gamma d(M_0 c^2)$$

Cette grandeur $\delta Q^{(A)} = A c dt$ est le terme temporel de la circulation du « quadrivecteur » $\left(\frac{A}{c} v^j, A \right)$.

L'origine physique de ce choix du δQ est extrêmement simple : la chaleur reçue ou rejetée est une énergie ; elle est donc équivalente à une certaine masse, et se comporte comme telle, c'est-à-dire $\delta Q^{(A)} = \gamma \delta Q_0^{(A)}$.

Cette conception a l'avantage de permettre une représentation covariante de l'apport de chaleur. Il suffit en effet de définir un quadrivecteur « impulsion calorifique-chaleur » dont $\delta Q^{(A)}$ soit la composante temporelle.

$$2) \quad \delta Q^{(B)} = \frac{1}{\gamma} d(M_0 c^2).$$

Remarquons que la relation (9) peut s'écrire :

$$\delta Q^{(B)} = d(M_0 \gamma c^2) - f^j v_j dt - \frac{A}{c} v^j v_j dt$$

Ceci montre que l'origine physique du choix de $\delta Q^{(B)}$ est très subtile, et conforme à une conception très courante du phénomène calorifique.

De la chaleur émise, c'est de l'énergie « qui se dissipe » c'est-à-dire de l'énergie « qui se perd » ; or c'est justement ce que chiffre la grandeur $\delta Q^{(B)}$, puisque c'est la différence entre le travail de toutes les forces appliquées $\left(f^j \text{ et } \frac{A}{c} v^j \right)$, et la variation totale de l'énergie du système ponctuel considéré, $d(M_0 \gamma c^2)$.

On regrette généralement que le choix de $\delta Q^{(B)}$, qui implique

$$\delta Q^{(B)} = \frac{1}{\gamma} \delta Q_0^{(B)},$$

ne permette pas une formulation covariante de l'apport de chaleur.

$$3) \quad \delta Q^{(C)} = \delta Q_0^{(C)} = d(M_0 c^2)$$

Ce choix de $\delta Q^{(C)}$ est loin d'être sans intérêt physique. Il signifie que le δQ n'est défini physiquement que dans le référentiel propre du système considéré. Or l'apport de chaleur est généralement conçu comme un apport d'énergie cinétique relatif au référentiel propre du système, l'énergie de translation d'ensemble n'ayant rien à voir avec le phénomène calorifique.

Par ailleurs, on peut écrire successivement :

$$\delta Q^{(C)} = d(M_0 c^2) = A ds = A u^\alpha u_\alpha ds = D^\alpha u_\alpha ds.$$

La relation entre le $\delta Q^{(C)}$ et le quadrivecteur dissipatif D^α est immédiate, et la formulation essentiellement covariante.

Notre propos n'est pas ici de choisir entre les trois définitions ci-dessus. En effet, nous avons montré qu'elles admettaient toutes une certaine justification physique, et l'on sait que les arguments en faveur des trois thèses sont très nombreux [7] [8] [10] [11], à tel point même qu'on a la regrettable impression qu'on ne pourra pas trancher la question tant qu'elle sera posée de cette façon [21]. En conséquence, plutôt que de choisir entre $\delta Q^{(A)}$, $\delta Q^{(B)}$ et $\delta Q^{(C)}$, ce que nous voudrions faire ici, c'est souligner que ces trois définitions admettent un point commun essentiel, à savoir leur caractère macroscopique. Puis, ceci étant admis, nous tenterons d'introduire une définition « fine », ou microscopique, de l'apport de chaleur.

Le point commun aux trois thèses énoncées ci-dessus est que :

$$(10) \quad \delta Q_0^{(A)(B)(C)} = d(M_0 c^2),$$

ce qui signifie, physiquement, qu'on peut apporter de la chaleur à un corps au repos. Ceci est tout à fait possible pour un système (un gaz par exemple) que l'on chauffe dans un référentiel lié à son centre de masse, la chaleur absorbée par les molécules du gaz étant traitée comme une augmentation de l'énergie de masse du système considéré globalement. Mais, pour un objet ponctuel (une molécule), il nous semble que (10) ne peut pas repré-

senter un apport de chaleur. En effet, selon la conception courante du phénomène, chauffer un gaz, c'est augmenter l'énergie cinétique de ses molécules ; or cela n'a pas de sens d'augmenter l'énergie cinétique d'une molécule (ponctuelle) par rapport au référentiel propre de ladite molécule.

Autrement dit, pour un objet ponctuel, l'apport de chaleur δQ ne peut exister que par rapport à un référentiel où l'objet n'est pas identiquement au repos, ce qui implique $\delta Q_0 \equiv 0$. En d'autres termes, du fait de (10) les trois modèles $\delta Q^{(A)}$, $\delta Q^{(B)}$, $\delta Q^{(C)}$ utilisent le formalisme (3), qui est une mécanique du point, pour traiter un objet étendu (un gaz), d'où le caractère macroscopique des trois descriptions $\delta Q^{(A)}$, $\delta Q^{(B)}$, $\delta Q^{(C)}$. Nous nous proposons ici, au contraire, d'utiliser le formalisme (3) pour traiter l'apport de chaleur relatif à un objet ponctuel (toute molécule d'un gaz par exemple). Il nous faudra donc définir un δQ^f qui échappera à l'écueil (10).

Nous proposons la définition suivante :

(11)

$$\delta Q^f = \gamma v^2 dM_0$$

que nous allons maintenant essayer de justifier :

+ δQ^f est un certain apport d'énergie cinétique ; ainsi δQ^f satisfait-il à la conception courante de la chaleur, et l'on a bien $\delta Q_0^f \equiv 0$ ($v \equiv 0$ dans le référentiel propre de la molécule).

+ Dans (9), δQ^f est la seule grandeur de type nouveau qui possède ce caractère cinétique. Ainsi, en acceptant le concept d'un δQ fin, on échappe à la nécessité de choisir *ex abrupto* entre les diverses possibilités macroscopiques $\delta Q^{(A)}$, $\delta Q^{(B)}$, $\delta Q^{(C)}$.

$$+ \delta Q^f = \gamma v^2 dM_0 = \frac{A}{c} v^j v_j dt \quad (\text{cf. (5) et (9)}).$$

Ainsi, δQ^f est le travail de la force dissipative $\frac{A}{c} v^j$, au même titre que $\delta \mathcal{T}$ est le travail de la force « mécanique » f^j . Cette symétrie n'est pas désagréable à l'esprit.

+ On peut objecter que δQ^f n'est pas une grandeur covariante ; ceci est vrai, mais la physique vit bien avec $\delta \mathcal{T}$, qui n'est ni plus ni moins covariant. L'important est que δQ^f soit la partie spatiale de la circulation du « quadrivecteur » $\left[\frac{A}{c} v^j, A \right]$ de même que $\delta \mathcal{T}$ est la partie spatiale de la circulation de $\left[f^j, \frac{0^4}{\gamma} \right]$. On notera en passant que $\delta Q^{(A)}$ est la partie temporelle associée à δQ^f , et que

$$\delta Q^f = \frac{v^2}{c^2} \delta Q^{(A)} = \beta^2 \delta Q^{(A)}$$

Quoique deux d'entre elles s'appliquent à un système macroscopique et

une à un objet ponctuel, nous allons regrouper ci-dessous, dans un même tableau-résumé, trois définitions de δQ .

$\begin{cases} \frac{d}{dt}(M_0 \gamma v^j) = f^j + \frac{A}{c} v^j \\ \frac{d}{dt}(M_0 \gamma c) = \frac{0^4}{\gamma} + A \end{cases}$				
T_1	$\frac{c}{\gamma^2} A dt$	$= \frac{0^4}{\gamma} c dt$	$- f^j v_j dt$	$+ A c dt - \frac{A}{c} v^j v_j dt$
	$\frac{1}{\gamma} d(M_0 c^2)$	$= M_0 c^2 d\gamma$	$- f^j v_j dt$	$+ \gamma d(M_0 c^2) - \gamma v^2 dM_0$
	défaut d'énergie (énergie « perdue » ou « dissipée »)	variation cinétique de l'énergie	apport mécanique d'énergie	variation massique de l'énergie
	$\delta Q^{(B)}$	δE_{cin}	$\delta \mathcal{T}$	$\delta Q^{(A)}$
				δQ^f

III. UNE DÉFINITION « FINE » DE LA TEMPÉRATURE

Rappelons tout d'abord l'existence de la notion d'entropie fine, que nous avons introduite il y a quelques années [6].

Soit la mécanique (3) écrite sous forme d'un système du 1^{er} ordre

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{1}{M_0 c} p^\alpha \\ \frac{dp^\alpha}{ds} = \frac{1}{c} \left[0^\alpha + \frac{A}{M_0 c} p^\alpha \right] \end{cases} \quad (\text{avec } p^\alpha = M_0 c u^\alpha)$$

Considérons le jacobien

$$(13) \quad J_{(i)} = \frac{D[x^\alpha, p^\alpha]}{D[x_{(i)}^\alpha, p_{(i)}^\alpha]}, \quad \text{où } (i) \text{ caractérise le point initial,}$$

et appelons entropie fine le scalaire $S_{(8)}^f = k \text{ Log } J_{(8)}$, k étant la constante de Boltzmann.

En appliquant au système (12) le théorème de Liouville pris sous sa forme générale [15] [20], x^α et p^α étant alors des variables indépendantes, il vient :

$$\frac{d}{ds} \text{Log } J_{(8)} = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{1}{M_0 c} p^\alpha \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \left[\frac{A}{M_0 c} p^\alpha + 0^\alpha \right] \right\}$$

Si 0^α est une fonction des x^ν (et de s éventuellement), et si M_0 est une fonction de s [ce qui implique que A est également une fonction de s puisque

$A = \frac{d}{ds} (M_0 c^2)$] on obtient ⁽⁴⁾ :

$$\frac{d}{ds} \text{Log } J_{(8)} = \sum_{\alpha} \left[- \frac{1}{M_0^2 c^2} \frac{d(M_0 c)}{ds} \frac{\partial s}{\partial x^\alpha} \right] p^\alpha + \frac{1}{c} \frac{A}{M_0 c} \sum_{\alpha} \frac{\partial p^\alpha}{\partial p^\alpha}$$

$$\frac{d}{ds} \text{Log } J_{(8)} = \sum_{\alpha} \left[- \frac{1}{M_0^2 c^2} \frac{d(M_0 c)}{ds} u_\alpha \right] p^\alpha + 4 \frac{A}{M_0 c^2}$$

$$\frac{d}{ds} \text{Log } J_{(8)} = - \sum_{\alpha} \frac{1}{M_0^2 c^2} \frac{d(M_0 c)}{ds} u_\alpha M_0 c u^\alpha + 4 \frac{A}{M_0 c^2}$$

$$\frac{d}{ds} \text{Log } J_{(8)} = 3 \frac{A}{M_0 c^2} = 3 \frac{dM_0/ds}{M_0}$$

⁽⁴⁾ Les hypothèses soulignées sont importantes. En effet, étant donné un champ classique $0^\alpha(x^\nu)$, avec $0^\alpha u_\alpha \equiv 0$, on peut en déduire 3 grands types de mouvement, suivant la nature de la masse du mobile

a) mouvement à masse constante [modèle conservatif] $\Rightarrow dS_{(8)}^f = 0$;

b) mouvement à champ de masse (M_0 fonction donnée des x^ν) [modèle Broglie [4] [5] [13]

et modèle hydrodynamique [11]] $\Rightarrow dS_{(8)}^f = -k \frac{dM_0}{M_0}$;

c) mouvement à variation « interne » de la masse (M_0 fonction donnée de s) [modèle utilisé ici] $\Rightarrow dS_{(8)}^f = 3k \frac{dM_0}{M_0}$.

On remarquera que le flot défini par les mouvements b) et c) n'est pas un symplectomorphisme dans l'espace des phases $x^\alpha, M_0 c u^\alpha$, puisqu'il n'y conserve pas la mesure

$$[dS_{(8)}^f] = -k dM_0/M_0 \quad \text{ou} \quad 3k dM_0/M_0 \neq 0$$

Cependant, il est possible de définir pour b) un autre espace des phases (x^α, p^α), avec $p^\alpha = M_0 c u^\alpha + \dots \neq M_0 c u^\alpha$, tel que le flot correspondant soit un symplectomorphisme. On obtient alors la formulation hamiltonienne, ou symplectique, de la mécanique des fluides relativistes [11] [18].

d'où enfin :

$$(14) \quad dS_{(8)}^f = 3k \frac{dM_0}{M_0} \quad (5)$$

Un certain nombre d'arguments justifient la définition de $S_{(8)}^f$; nous ne les indiquerons pas ici, le point essentiel étant en définitive la forme obtenue pour $dS_{(8)}^f$. Il est par ailleurs évident que l'entropie macroscopique devra être comprise comme une certaine moyenne de $S_{(8)}^f$,

$$S_{(8)} = \langle S_{(8)}^f \rangle$$

mais ceci n'est pas notre propos.

La différentielle $dS_{(8)}^f$ jouera, pour la thermodynamique « fine », le même rôle que la forme $\delta S = \frac{\delta Q}{T}$ pour la Thermodynamique macroscopique. En effet, puisque $\delta Q^f = \gamma v^2 dM_0$, on est porté à introduire une température « fine » $\tau^f = \frac{1}{3k} \gamma v^2 M_0$ qui conduit à la forme

$$(15) \quad dS_{(8)}^f = \frac{\delta Q^f}{\tau^f}$$

Remarquons que la température macroscopique devra alors être comprise comme une certaine moyenne de τ^f . Pour ne pas avoir de surprises, contentons-nous pour l'instant d'écrire cela dans le référentiel où le gaz est au repos macroscopique :

$$T_0 = \langle \tau_0^f \rangle$$

On aura donc :

$$\tau_0^f = \frac{1}{3k} \gamma_0 v_0^2 M_0 = \frac{2}{3k} \left(\frac{1}{2} M_0 \gamma_0 v_0^2 \right)$$

$$\tau_0^f = \frac{2}{3k} (E_{\text{cin}}^*)_0 \quad E_{\text{cin}}^* = \text{pseudo-énergie cinétique}$$

$$T_0 = \langle \tau_0^f \rangle = \frac{2}{3k} \langle (E_{\text{cin}}^*)_0 \rangle$$

c'est-à-dire

$$\langle (E_{\text{cin}}^*)_0 \rangle = \frac{3}{2} k T_0.$$

(⁵) On s'étonnera de voir apparaître ici un facteur 3 — providentiel pour l'interprétation physique — à la place du facteur 4 qui figure dans un précédent article [20]. C'est qu'en effet, jusqu'alors, on n'avait pas tenu compte, dans l'expression de $\frac{d}{ds} \text{Log } J_{(8)}$, du terme en $\frac{\partial s}{\partial x^a}$. L'auteur doit cette importante correction à M. Pham Mau Quan, dont on connaît les travaux sur la Thermodynamique macroscopique en Relativité Générale [3].

Le fait que la température macroscopique soit proportionnelle à la pseudo-énergie cinétique est une idée courante, et il est remarquable que le facteur de proportionnalité soit le $\frac{3}{2}k$ traditionnel. Cette double remarque justifie la définition des grandeurs fines δQ^f , S^f et τ^f .

L'approche macroscopique du même problème est très rapide. On admet que, dans le référentiel propre, la température doit être proportionnelle à l'énergie de masse du système ($T_0 = CM_0c^2$, $C = \text{Cste}$) puis on postule l'invariance de δS d'où l'on déduit l'expression de T . Nous retiendrons les divers résultats sous la forme d'un tableau :

T_2	Thermodynamique macroscopique
	$\delta S = \frac{\delta Q}{T} \left\{ \begin{array}{l} \delta Q^{(A)} = \gamma d(M_0 c^2) \Rightarrow T^{(A)} = C\gamma M_0 c^2 \\ \delta Q^{(B)} = \frac{1}{\gamma} d(M_0 c^2) \Rightarrow T^{(B)} = C \frac{1}{\gamma} M_0 c^2 \\ \delta Q^{(C)} = d(M_0 c^2) \Rightarrow T^{(C)} = CM_0 c^2 \end{array} \right.$
	Thermodynamique « fine »
	$dS_{(8)}^f = \frac{\delta Q^f}{\tau^f}; \quad \delta Q^f = \gamma v^2 dM_0 \Rightarrow \tau^f = \frac{1}{3k} M_0 \gamma v^2 = \frac{2}{3k} E_{\text{cin}}^*$

Deux commentaires s'imposent :

1) Compte tenu du fondement même du traitement macroscopique du problème, qui consiste à représenter un système par un point, il est presque évident que la température propre T_0 ne peut apparaître que comme la masse du système ponctualisé multipliée par un coefficient approprié, mais ceci implique que l'on renonce à l'image cinématique de la température.

2) L'approche « fine » préserve au contraire l'image cinématique de la température, mais au prix d'un défaut de covariance au niveau de τ^f . Rappelons cependant que τ^f intervient comme une grandeur dérivée d'un formalisme parfaitement covariant (cf. (12) (13) (14)), de même que δQ^f et le travail mécanique $\delta \mathcal{T}$, qui sont des sous-produits du même formalisme.

IV. VARIANCE RELATIVISTE DES GRANDEURS THERMODYNAMIQUES

On vient de voir que τ^f et δQ^f sont proportionnels à $v^2\gamma$. Ecrivons donc la variance de $v^2\gamma$. Reprenons à cet effet les notations utilisées dans un précédent article [15].

Soient deux référentiels $K_0 (x_0, y_0, z_0)$ et $K (x, y, z)$ en translation uniforme l'un par rapport à l'autre le long de l'axe des z , et

v_e = vitesse de K_0 par rapport à K (vitesse d'entraînement)

$$\beta_e = \frac{v_e}{c}$$

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}$$

Si l'on pose $\lambda = \gamma_e$, $\mu = \gamma_e \beta_e c$, $v = \gamma_e \beta_e / c$, la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = \lambda z_0 + \mu t_0 \\ t = v z_0 + \lambda t_0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ v & \lambda \end{vmatrix} = 1$$

d'où, pour les vitesses

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x'_0}{\lambda + v z'_0} \\ \dot{y} = \frac{y'_0}{\lambda + v z'_0} \\ \dot{z} = \frac{\mu + \lambda z'_0}{\lambda + v z'_0} \end{cases}$$

le signe $\dot{}$ représentant la dérivation par rapport à t , et le signe $'$ la dérivation par rapport à t_0 , t et t_0 étant respectivement le temps dans K et dans K_0 .

On en déduit l'expression du carré de la vitesse d'un point par rapport à K :

$$v^2 = \frac{1}{(\lambda + v z'_0)^2} [x_0'^2 + y_0'^2 + (\mu + \lambda z'_0)^2]$$

Après quelques lignes de calcul on en déduit aussi la relation bien connue:

$$(16) \quad \gamma = \gamma_0 \gamma_e \left(1 + \beta_e \frac{z'_0}{c} \right)$$

où

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}}$$

Quelques transformations simples permettent ensuite d'écrire v^2 sous la forme suivante :

$$v^2 = \frac{1}{\left(1 + \beta_e \frac{z'_0}{c}\right)^2} \left[\frac{v_0^2}{\gamma_e^2} + v_e^2 + v_e z'_0 \left(2 + \beta_e \frac{z'_0}{c}\right) \right]$$

d'où, en utilisant (16),

$$(17) \quad v^2 \gamma = \frac{1}{1 + \beta_e \frac{z'_0}{c}} \left[\frac{(v_0^2 \gamma_0)}{\gamma_e} + (v_e^2 \gamma_e) \gamma_0 + \gamma_0 z'_0 \gamma_e v_e \left(2 + \beta_e \frac{z'_0}{c}\right) \right]$$

Ce résultat n'est pas simple, mais une hypothèse raisonnable va permettre de l'utiliser sous forme simplifiée, et cette hypothèse, c'est la considération d'un gaz parfait ⁽⁶⁾ non relativiste à l'état propre. Pour un tel gaz, on a $v_0 \ll c$ pour toute molécule, ce qui implique entre autres

$$\beta_e \frac{|z'_0|}{c} < \frac{|z'_0|}{c} \ll 1$$

En négligeant ce terme par rapport à 1, on écrit (17) sous la forme :

$$(18) \quad v^2 \gamma = \frac{(v_0^2 \gamma_0)}{\gamma_e} + (v_e^2 \gamma_e) \gamma_0 + 2 \gamma_0 z'_0 \gamma_e v_e \quad (|z'_0| \ll c)$$

Remarquons que $v_0 \ll c$ implique $\gamma_0 \simeq 1$; les facteurs γ_0 qui figurent dans (18) n'ont donc été gardés que pour mettre en lumière la symétrie des divers termes. Si maintenant K_0 est le référentiel par rapport auquel le gaz est au repos macroscopique, on a par définition

$$\Sigma \vec{p}_0 = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Sigma M_0 \gamma_0 \vec{v}_0 = 0,$$

la somme étant étendue à toutes les molécules du gaz (M_0 est la masse de la $n^{\text{ième}}$ molécule). On a donc en particulier $\Sigma M_0 \gamma_0 z'_0 = 0$ d'où, en utilisant (18), $\gamma_0 = 1$, et en sommant sur N molécules,

$$(19) \quad \sum_1^N M_0 \gamma v^2 = \frac{1}{\gamma_e} \sum_1^N M_0 v_0^2 + \left(\sum_1^N M_0 \right) \gamma_e v_e^2 \quad (|z'_0| \ll c)$$

Dans la dynamique (3) (4), le « quadrivecteur » $\left(\frac{A}{c} v^j, A \right)$ agit à vitesse constante (cf. l'expression de δQ^f et $\delta Q^{(A)}$). En conséquence, $\Sigma M_0 \gamma_0 \vec{v}_0 = 0$ implique, en différentiant à vitesse constante, $\Sigma (dM_0) \gamma_0 \vec{v}_0 = 0$.

⁽⁶⁾ Ce gaz sera traité comme un ensemble de particules distinctes, contrairement à la méthode macroscopique de relativisation qui — rappelons-le — considère tout système comme ponctualisé.

(18) donne donc également :

$$(20) \quad \sum_1^N \gamma v^2 dM_0 = \frac{1}{\gamma_e} \sum_1^N v_0^2 dM_0 + \left(\sum_1^N dM_0 \right) \gamma_e v_e^2 \quad (|z'_0| \ll c)$$

Posons

$$\langle \tau^f \rangle = \frac{1}{N} \sum_1^N \frac{M_0 \gamma v^2}{3k} \quad (k, \text{ constante de Boltzmann})$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_1^N M_0, \quad \Delta M_0 = \sum_1^N dM_0$$

(19) et (20) donnent alors :

$$(21) \quad \begin{cases} \langle \tau^f \rangle = \frac{1}{\gamma_e} \langle \tau_0^f \rangle + \frac{\mu}{3k} \gamma_e v_e^2 \\ \Sigma \delta Q^f = \frac{1}{\gamma_e} \Sigma \delta Q_0^f + \gamma_e v_e^2 \Delta M_0 \end{cases}$$

(gaz au repos macroscopique dans K_0 , et non relativiste dans K_0).

Ces résultats, et la conception courante selon laquelle la température est une énergie cinétique moyenne moins une énergie de translation, nous amènent à poser les définitions suivantes, dont découle immédiatement la variance relativiste des grandeurs ainsi définies :

T_3

$T = \langle \tau^f \rangle - \frac{\mu}{3k} \gamma_e v_e^2$
$\Delta Q = \Sigma \delta Q^f - \gamma_e v_e^2 \Delta M_0$
$T = \frac{T_0}{\gamma_e}, \quad \Delta Q = \frac{\Delta Q_0}{\gamma_e}$

On retrouve ainsi la même variance que par la méthode macroscopique lorsque l'on définit l'apport de chaleur et la température par $\delta Q^{(B)}$ et $T^{(B)}$.

V. CONCLUSION A PROPOS DE LA NON-COVARIANCE DE T ET DE ΔQ

On reproche d'ordinaire à la tradition classique (Planck, de Broglie) le choix macroscopique $\delta Q^{(B)}$, $T^{(B)}$ qui conduit aux règles de transformation

$T = \frac{T_0}{\gamma_e}$, $\Delta Q = \frac{\Delta Q_0}{\gamma_e}$, jugées incompatibles avec la covariance des lois de la physique.

On vient de voir d'autre part que, même en partant du formalisme covariant (3), l'apport de chaleur étant alors dû à une absorption de rayonnements divers, on est amené tout naturellement aux règles de transformation de Planck *si l'on tient à garder une image cinématique de la chaleur*. On retrouve ainsi le même écueil de non-covariance des grandeurs fondamentales associées aux phénomènes calorifiques.

Nous pensons qu'il convient encore de faire la remarque suivante, qui amplifie la difficulté. Le modèle microscopique de la chaleur, tel qu'il a été présenté ci-dessus, postule que tout apport fin $\delta Q^f = \gamma v^2 dM_0$ implique un apport de masse dM_0 pour la particule considérée. Or ceci ne correspond absolument pas au modèle courant du gaz que l'on chauffe (chauffer, c'est augmenter l'énergie cinétique des molécules sans modifier leur masse). Si donc l'on veut serrer de plus près la conception courante de l'apport de chaleur tout en gardant un modèle dissipatif (modèle dissipatif à masse constante pour chaque molécule), on est obligé d'abandonner la formulation covariante (3) au profit d'un modèle non covariant. En effet (3) implique $A = c^2 \frac{dM_0}{ds}$ [cf. (6)] ce qui signifie qu'il ne saurait exister de phénomène dissipatif covariant sans variation de la masse propre. Par contre, une mécanique non covariante du type suivant :

$$(22) \quad \boxed{\frac{dp^j}{dt} = f^j + A p^j; \quad p^j = m_0 \gamma v^j; \quad \underline{m_0} = C_{ste}} \quad (j = 1, 2, 3)$$

décrit l'apport de chaleur comme un phénomène dissipatif à masse constante. Les calculs ayant déjà été publiés par ailleurs [20], nous n'en reproduirons que les résultats. Le lecteur comparera avec le paragraphe III du présent exposé.

La mécanique (22) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx^j}{dt} = \frac{1}{m_0 \gamma} p^j \\ \frac{dp^j}{dt} = f^j + A p^j \end{cases}$$

Par définition,

$$\delta Q^f = A p^j v_j dt \quad (\text{travail de la force dissipative})$$

et

$$J_{(6)} = \frac{D[x^j, p^j]}{D[x_{(i)}^j, p_{(i)}^j]},$$

où (i) caractérise le point initial.

On en déduit rigoureusement, *en supposant que f^j et A ne dépendent pas des p^l ,*

$$dS_{(6)}^f = kd \text{Log } J_{(6)} = \frac{3k}{m_0 \gamma v^2} \delta Q^f,$$

ce qui conduit à poser :

$$\tau^f = \frac{1}{3k} m_0 \gamma v^2 = \frac{2}{3k} E_{\text{cin}}^* \quad (E_{\text{cin}}^* = \text{pseudo-énergie cinétique})$$

pour obtenir

$$dS'_{(6)} = \frac{\delta Q^f}{\tau^f}$$

et, dans le référentiel où le gaz est au repos macroscopique,

$$\langle (E_{\text{cin}}^*)_0 \rangle = \frac{3}{2} k T_0, \quad \text{avec} \quad T_0 = \langle \tau_0^f \rangle$$

Le point essentiel de tout cela est que, plus l'on veut coller à la réalité quotidienne du concept de température et du phénomène « apport de chaleur », plus l'on est amené à s'éloigner de la formulation covariante. Nous concluons donc comme suit :

Il existe une forme covariante des phénomènes calorifiques (échauffement ou refroidissement d'un gaz par absorption ou émission de rayonnements divers), mais les grandeurs traditionnelles (chaleur et température) sont mal adaptées à l'étude de tels phénomènes puisque ce ne sont pas des grandeurs covariantes.

Quant à la forme courante des phénomènes calorifiques (échauffement ou refroidissement d'un gaz dont les molécules gardent une masse propre constante), elle n'est pas covariante, et c'est là l'origine de la non-covariance des grandeurs traditionnelles que sont la chaleur et la température.

QUELQUES RÉFÉRENCES

(On trouvera dans [7] [8] [10] [11] une ample bibliographie commentée).

- [1] O. COSTA DE BEAUREGARD, *La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris, 1949.
- [2] A. LICHNEROWICZ, *Éléments de calcul tensoriel*, Armand-Colin, Paris, 1950.
- [3] PHAM MAU QUAN, *Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques*, Thèse, Paris, 1954.
- [4] L. DE BROGLIE, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
- [5] L. DE BROGLIE, *La thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [6] J. FRONTEAU, *L'entropie et la physique moderne*. C. E. R. N., MPS/Int, MU/EP 66-5, 1966.
- [7] H. ARZELIES, *Thermodynamique relativiste et quantique*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [8] G. CAVALLERI, G. SALGARELLI, Revision of the Relativistic Dynamics with variable rest mass, and application to Relativistic Thermodynamics. *Nuovo Cimento*, t. 62 A, 1969, p. 722.

- [9] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Théorie des champs*. Éditions Mir, Moscou, 1970.
- [10] A. GUESSOUS, *Thermodynamique relativiste*, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
- [11] L. A. SCHMID, Effects of heat exchange on relativistic fluid flow; dans *A critical review of Thermodynamics*, Mono Book Corporation, Baltimore, 1970.
- [12] C. BARRABES, Mouvement d'un objet ponctuel de masse propre variable. D. E. A. de Physique théorique. *Institut Henri Poincaré*, Paris, 1970.
- [13] L. DE BROGLIE, J.-L. ANDRADE E SILVA, *La réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire* (tome 1), Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [14] H. ARZELIÈS, *Relativistic point dynamics*, Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [15] J. FRONTEAU, Apports de chaleur et Mécanique dissipative. *Nuovo Cimento*, t. 2 B, 1971, p. 107 [+ t. 4 B, 1971, p. 347].
- [16] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modèles*. Benjamin, Reading Massachusetts, 1972.
- [17] O. COSTA DE BEAUREGARD, Intéressantes questions soulevées par H. Arzeliès dans Fluides relativistes, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 16 A, 1972, p. 103.
- [18] P. V. GROSJEAN, Théorie symplectique du fluide parfait relativiste. *Bull. Société Royale des Sciences de Liège*, t. 41 (1-2), 1972, p. 31.
- [19] J. HENRY, C. BARRABES, Covariant equations of the motion of a point body with variable rest mass. *A. J. P.*, t. 40, 1972, p. 724.
- [20] J. FRONTEAU, L'entropie fine, la mécanique dissipative et la notion de masse au repos variable. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 18 A, 1973, p. 99.
- [21] N. POLOMBO, *Variance de quelques grandeurs thermodynamiques en relativité restreinte*, Thèse de 3^e cycle, Paris-VI, 1973.

Complément bibliographique.

Parallèlement à la Thermodynamique fine, s'est créée et développée une Mécanique Statistique Dissipative. On trouvera dans [20] la référence de diverses publications de S. GUIAȘU et de P. CALDIROLA.

(Manuscrit reçu le 22 mars 1974).