

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MAHDY CISSOKO

Ondes et discontinuités en magnéto-hydrodynamique anisotrope relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, n° 1 (1975), p. 1-27

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Ondes et discontinuités en magnéto-hydrodynamique anisotrope relativiste

par

Mahdy CISSOKO

Laboratoire de Physique Mathématique.
Collège de France.

RÉSUMÉ. — Le présent travail est consacré à l'étude relativiste d'un schéma fluide anisotrope non dissipatif et de conductivité infinie. Dans une première section, nous avons construit un tel schéma fluide. A partir d'un point de vue macroscopique, nous avons fait une étude hydrothermodynamique du schéma fluide envisagé. Nous avons déduit le système différentiel fondamental de la magnéto-hydrodynamique anisotrope. La seconde section de ce travail a été consacrée à l'étude, pour un schéma fluide anisotrope polytropique, des variétés caractéristiques et de la propagation des ondes. Trois types de variétés caractéristiques ont été mis en évidence : les ondes d'entropie (ou ondes matérielles), les ondes magnéto-soniques et les ondes d'Alfvén. Les vitesses de propagation des ondes d'Alfvén et des ondes magnéto-soniques ont été placées les unes par rapport aux autres. L'étude des cônes d'ondes a permis de mettre en lumière d'une part certaines particularités de la propagation des ondes en magnéto-hydrodynamique anisotrope, d'autre part le caractère d'hyperbolicité des opérateurs différentiels associés aux différentes ondes.

INTRODUCTION

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude relativiste des schémas fluides. Le schéma fluide pur a fait l'objet de nombreuses études devenues classiques de A. Lichnerowicz et de L. P. Eisenhart. Le schéma fluide thermodynamique a été étudié par C. Eckart et par Pham Mau Quan. Le schéma fluide — champ électromagnétique a fait l'objet de nombreux

travaux de A. Lichnerowicz. Ce schéma a suscité d'intéressants travaux notamment ceux de Pham Mau Quan, de Madame Y. Choquet et de G. Pichon ; il a conduit dans un cas particulier à la magnéto-hydrodynamique relativiste dont l'étude a fait l'objet de très beaux travaux de A. Lichnerowicz et de Madame Choquet.

Mais dans tous ces travaux le schéma fluide considéré est supposé isotrope, c'est-à-dire parfait au sens de Taub et de Lichnerowicz. Comme il est bien connu, l'hypothèse de pression isotrope n'est plus valable en magnéto-hydrodynamique sans collisions.

Nous nous proposons ici de construire et d'étudier un schéma fluide anisotrope relativiste. Notre étude revêt un double intérêt mathématique et physique. Le schéma fluide anisotrope envisagé est susceptible d'être appliqué à l'étude des atmosphères stellaires ou solaires, des espaces interstellaires ou interplanétaires.

Le présent travail est divisé en deux sections. Dans la première section, à partir d'un point de macroscopique, nous avons construit un schéma fluide anisotrope relativiste, non dissipatif et de conductivité infinie. Nous avons fait une étude hydro-thermodynamique de ce schéma et déduit le système différentiel fondamental de la magnéto-hydrodynamique anisotrope relativiste. Le système différentiel obtenu pour un modèle schéma fluide anisotrope polytropique décrit un plasma anisotrope à collisions rares, soumis à un champ magnétique fort. Soulignons que pour de tels plasmas l'hypothèse de schéma milieu continu est justifiée. Dans la seconde section nous avons étudié, par la technique des distributions, les variétés caractéristiques du système différentiel d'un fluide anisotrope polytropique. Nous avons mis en évidence trois types de variétés caractéristiques : les ondes d'entropie (ou ondes matérielles), les ondes magnétosoniques et les ondes d'Alfvén. Nous avons mis en lumière les conditions que doivent satisfaire les quantités $\eta_{||}$ et $\eta_{\perp}$ pour que les vitesses de propagation des ondes d'Alfvén et des ondes magnétosoniques soient réelles. Ces conditions impliquent l'absence d'instabilités dans le fluide considéré. Les différentes vitesses de propagation ont été placées les unes par rapport aux autres ; à la différence de la magnéto-hydrodynamique isotrope, les vitesses de propagation des ondes magnétosoniques n'encadrent pas toujours la vitesse de propagation des ondes d'Alfvén. L'étude des cônes d'ondes a permis de mettre en lumière d'une part, certaines particularités de la propagation des ondes en magnéto-hydrodynamique anisotrope, d'autre part, le caractère d'hyperbolicité des opérateurs différentiels associés aux différentes ondes. Nous avons notamment montré que l'opérateur différentiel associé aux ondes magnétosoniques est hyperbolique strict dans trois cas définis par des inégalités fondamentales vérifiées par les quantités $\eta_{||}$, $\eta_{\perp}$ et hyperbolique non strict dans le cas défini par $1 + \eta_{\perp} = (1 + 3\bar{e})\eta_{||}$. Dans ce dernier cas, le cône d'ondes a deux génératrices contenues dans le 2-plan défini par (U, h) .

I. LE SCHÉMA FLUIDE ANISOTROPE RELATIVISTE

1. Le cadre géométrique de la mécanique relativiste des fluides

(a) Le cadre géométrique de la mécanique relativiste des fluides est un espace-temps (V_4, g) , variété différentiable de dimension quatre, munie d'une métrique riemannienne g du type hyperbolique normal et de signature $+- - -$. Dans un système de coordonnées locales admissibles x^α on a :

$$(1-1) \quad g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

Les $g_{\alpha\beta}$, appelés potentiels de gravitation, sont des fonctions de classe C^1 , C^3 par morceaux. La métrique g définit sur l'espace vectoriel tangent $T_x(V_4)$ en chaque point $x \in V_4$ une structure d'espace-temps minkowskien, c'est-à-dire une structure d'espace-temps de la relativité restreinte.

L'hypothèse faite sur le type de la métrique revient à dire qu'en chaque point x de V_4 , la métrique g peut se mettre sous la forme :

$$(1-2) \quad g = (\omega^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\omega^i)^2$$

où les ω^a sont un système de forme de Pfaff locales linéairement indépendantes.

(b) Dans la théorie de la relativité générale la métrique est astreinte à vérifier les équations d'Einstein

$$(1-3) \quad E_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

où $E_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ sont deux tenseurs symétriques et χ un facteur constant. $E_{\alpha\beta}$, de signification purement géométrique, est appelé tenseur d'Einstein. Si $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de la variété, le tenseur d'Einstein $E_{\alpha\beta}$ peut s'écrire

$$(1-4) \quad E_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$, de signification purement physique, est appelé tenseur d'énergie ; il doit décrire au mieux en chaque point x de l'espace-temps (V_4, g) l'état de la distribution énergétique.

En vertu des identités de Bianchi le tenseur d'Einstein satisfait les identités de conservation

$$(1-5) \quad \nabla_\alpha E^{\alpha\beta} = 0$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion définie par la métrique. D'après (1-3), les conditions de conservation (1-5) s'imposent à $T_{\alpha\beta}$

$$(1-6) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

2. Le tenseur d'énergie de la magnéto-hydrodynamique anisotrope relativiste

Le cadre géométrique étant précisé. Le premier pas de la théorie relativiste des fluides consiste à choisir l'expression du tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$. A chaque schéma fluide correspond un tenseur d'énergie qui doit être symétrique si l'on désire faire une étude valable dans tout le cadre relativiste. Mais pour que $T_{\alpha\beta}$ puisse décrire un fluide physique il faut et il suffit qu'il existe un champ de vecteurs unitaires U^α orientés dans le temps

$$(2-1) \quad g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 1$$

pour lequel le scalaire $T_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta$ est positif [1] [2].

U^α est appelé vecteur vitesse unitaire du fluide et ses trajectoires définissent les lignes de courant.

2-1. LE REPÈRE PROPRE [1] [3]

Considérons dans la variété espace-temps (V_4, g) un domaine Ω occupé par le fluide. Nous dirons que l'espace-temps (V_4, g) est associé au fluide. On appelle repère propre en un point x du domaine Ω de l'espace-temps (V_4, g) occupé par le fluide, un repère orthonormé $V^{(\lambda')}$ dont le premier vecteur $V^{(0')}$ coïncide avec le vecteur vitesse unitaire U et dont les trois autres $V^{(i')}$ définissent l'espace associé à U , direction temporelle. Ainsi

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} V^{(0')\alpha} V^{(0')\beta} &= 1 \\ g_{\alpha\beta} V^{(i')\alpha} V^{(i')\beta} &= -1 \end{aligned}$$

Le repère propre ainsi introduit est caractérisé par la matrice

$$\eta_{\mu'\gamma'} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 0 & -1 & \\ & -1 & \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

On peut naturellement rapporter le voisinage d'un point de (V_4, g) au repère propre en ce point. La métrique d'univers prend la forme canonique

$$(2-2) \quad g = \eta_{\mu'\nu'} \omega^{\mu'} \omega^{\nu'} = (\omega^{0'})^2 - \sum_{i'=1}^3 (\omega^{i'})^2$$

où les quatre formes $\omega^{\mu'}$ de Pfaff sont les 1-formes duales des champs de vecteurs $V^{(\lambda')}$, c'est-à-dire

$$\langle \omega^{\mu'}, V_{\nu'} \rangle = \delta_{\nu'}^{\mu'}$$

$\delta_{\nu'}^{\mu'}$ désignant le symbole de Kronecker.

Dans un repère quelconque rapporté à des coordonnées locales x^α , on a

$$(2-3) \quad \omega^{\mu'} = A_{\alpha}^{\mu'} dx^\alpha$$

où $A_{\alpha}^{\mu'}$ est la matrice de changement de repère.

Le repère propre ainsi défini doit être identifié à un repère galiléen local

où le fluide a en un point x une vitesse nulle. Rapporté à un repère propre, l'espace vectoriel tangent T_x doit être identifié à un espace-temps de la relativité restreinte, rapporté à un repère galiléen local.

Un tenseur peut être défini en un point x de (V_4, g) par ses composantes relativement au repère propre. Ses composantes dans un repère quelconque se déduisent des premiers par des formules tensorielles classiques. Réciproquement, l'interprétation d'un tenseur défini en un point x de (V_4, g) se déduit de l'espace-temps de Minkowski tangent. Les interprétations s'obtiennent ainsi en termes de temps et d'espace.

Rapportons maintenant l'espace-temps (V_4, g) au point considéré à un repère quelconque. Soit $(A_\alpha^{\beta'})$ la matrice de changement de repère et $(A_{\beta'}^\alpha)$ la matrice inverse. Les $A_\alpha^{\beta'}$ (resp. $A_{\beta'}^\alpha$) sont les composantes covariantes (resp. contravariantes) des vecteurs $V^{(i')}$ du repère propre dans le nouveau repère. Soit

$$(2-4) \quad \begin{aligned} A_\alpha^{0'} &= V_\alpha^{(0')} = U_\alpha & \text{et} & & A_{0'}^\alpha &= V_{(0')}^\alpha = U^\alpha \\ A_\alpha^{i'} &= -V_\alpha^{(i')} & & & A_{i'}^\alpha &= V_{(i')}^\alpha \end{aligned}$$

Si t est un tenseur d'ordre deux, des formules tensorielles classiques :

$$(2-5) \quad t_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\mu'} A_\beta^{\nu'} t_{\mu'\nu'}$$

On a en particulier pour le tenseur métrique d'après (2-4)

$$(2-6) \quad g_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\mu'} A_\beta^{\nu'} \eta_{\mu'\nu'} = U_\alpha U_\beta - \Sigma V_\alpha^{(i')} V_\beta^{(i')}$$

2-2. LE TENSEUR D'ÉNERGIE

DU SCHÉMA FLUIDE QUELCONQUE-CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Dans un domaine Ω de V_4 où règne un champ électromagnétique considérons un schéma fluide quelconque non dissipatif. En tout point x de Ω , ce schéma peut être décrit par un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ qui s'écrit dans un repère quelconque auquel est rapporté l'espace-temps (V_4, g) au point considéré [1] [4]

$$(2-7) \quad T_{\alpha\beta} = \rho U_\alpha U_\beta + \Pi_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$$

où ρ est un scalaire positif représentant la densité d'énergie totale ; $\Pi_{\alpha\beta}$, le tenseur des pressions propres satisfaisant aux identités

$$(2-8) \quad \Pi_{\alpha\beta} U^\beta = 0$$

et $\tau_{\alpha\beta}$, le tenseur d'énergie électromagnétique.

Le champ électromagnétique est décrit par deux 2-formes : une 2-forme H dite champ électrique — induction magnétique et une 2-forme G dite champ magnétique — induction électrique. Les vecteurs champ électrique e et champ magnétique h sont définis relativement à la direction temporelle U par

$$(2-9) \quad e_\beta = U^\alpha H_{\alpha\beta} ; \quad h_\beta = U^\alpha \dot{G}_{\alpha\beta}$$

les vecteurs induction électrique d et induction magnétique b étant

$$(2-10) \quad d_\beta = U^\alpha G_{\alpha\beta} ; \quad b_\beta = U^\alpha \dot{H}_{\alpha\beta}$$

où $\dot{H}$ et $\dot{G}$ sont les 2-formes adjointes de H et G au sens de l'élément de volume riemannien.

Nous supposons les vecteurs champ et induction proportionnels ; nous posons

$$d = ve ; \quad b = \mu h$$

où v et μ sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du fluide.

Le tenseur d'énergie du champ électromagnétique considéré est défini par :

$$(2-11) \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} H_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} - H_{\alpha\rho} G_{\beta}^{\rho}$$

qui peut s'écrire :

$$(2-12) \quad \tau_{\alpha\beta} = -(e_{\rho} d^{\rho} + h_{\rho} b^{\rho}) \left(U_{\alpha} U_{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) - (e_{\alpha} d_{\beta} + h_{\alpha} b_{\beta}) - (U_{\alpha} Q_{\beta} + U_{\beta} P_{\alpha})$$

où l'on a posé :

$$P_{\alpha} = \eta_{\alpha\rho\lambda\nu} U^{\rho} e^{\lambda} h^{\nu} ; \quad Q_{\alpha} = \eta_{\alpha\rho\lambda\nu} U^{\rho} j^{\lambda} b^{\nu}$$

P_{α} et $Q_{\alpha} = \mu\nu P_{\alpha}$ sont deux vecteurs de Poynting.

Nous supposons que, dans le domaine Ω considéré de V_4 , le champ électromagnétique satisfait les équations de Maxwell ordinaires

$$(2-13) \quad \nabla_{\alpha} \dot{H}^{\alpha\beta} = 0$$

$$(2-14) \quad \nabla_{\alpha} G^{\rho\alpha} = J^{\rho}$$

où J est le quadrivecteur courant électrique qu'on décompose en un courant de convection et en courant de conduction

$$J^{\rho} = q_0 U^{\rho} + \sigma e^{\rho}$$

q_0 étant la densité propre de charge et σ la conduction du fluide.

2-3. LE TENSEUR D'ÉNERGIE DU SCHÉMA FLUIDE ANISOTROPE

(a) Nous nous proposons de déterminer le tenseur d'énergie d'un schéma fluide anisotrope supposé non dissipatif et de conductivité infinie. Nous définissons la magnéto-hydrodynamique anisotrope comme étant l'étude des propriétés d'un tel fluide soumis à un champ magnétique intense créant l'anisotropie. Le courant j étant fini on a nécessairement dans ce cas $e = 0$, et le tenseur d'énergie $\tau_{\alpha\beta}$ défini par (2-12) se réduit, par rapport à la direction temporelle U , à sa partie magnétique

$$(2-15) \quad \tau_{\alpha\beta} = \mu |h|^2 \left(U_{\alpha} U_{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) - \mu h_{\alpha} h_{\beta} \quad \text{avec} \quad |h|^2 = -h_{\rho} h^{\rho}$$

Rapportons l'espace-temps (V_4, g) au voisinage d'un point x d'un domaine Ω occupé par le fluide au repère propre en ce point. Dans ce repère la matière est au repos au point envisagé. Le fluide y est caractérisé par une densité d'énergie T^0_0 , le tenseur des pressions $\Pi_{i'j'}$ et le

tenseur de Maxwell des contraintes $\tau_{i'j'}$. On a d'après (2-7) et (2-15) dans le repère propre

$$(2-16) \quad \begin{aligned} T_{0'0'} &= \rho + \frac{\mu |h|^2}{2} \\ T_{i'j'} &= \Pi_{i'j'} + \frac{\mu |h|^2}{2} \delta_{i'j'} - \mu h_i h_{j'} \end{aligned}$$

En magnéto-hydrodynamique isotrope (parfaite au sens de Taub-Lichnerowicz), la quadrique des pressions $\Pi_{i'j'}$ est une sphère : $\Pi_{i'j'} = P \delta_{i'j'}$, où P est la pression du fluide. Cette définition n'est plus valable en magnéto-hydrodynamique anisotrope.

(b) Par des considérations physiques et géométriques, nous nous proposons de déterminer l'expression du tenseur des pressions $\Pi_{i'j'}$ pour un fluide anisotrope. La seule anisotropie physique considérée ici est créée par le champ magnétique. Il y a isotropie par rapport au 2-plan invariant par rotation perpendiculaire au 2-plan (U, h) . On a donc deux degrés de liberté dans les directions transversales et un degré de liberté dans la direction longitudinale. Nous sommes ainsi conduits à décomposer la pression relativement au champ magnétique en composante transversale $P_{\perp}$ et longitudinale $P_{//}$. Les pressions $P_{\perp}$ et $P_{//}$ sont différentes, car il n'y a pas d'échange d'énergie entre les degrés de liberté. Dans le repère propre dont l'un des vecteurs, $V^{(3')}$ par exemple, est orienté le long du champ magnétique h , le tenseur $\Pi_{i'j'}$ a pour composantes d'après ce qui précède

$$(2-17) \quad \Pi_{i'j'} = \begin{bmatrix} P_{\perp} & & \\ 0 & P_{\perp} & 0 \\ & & P_{//} \end{bmatrix}$$

Introduisons le vecteur unitaire $\hat{h} = \frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}$. Le tenseur $\Pi_{i'j'}$ défini par (2-17) s'écrit alors dans un repère propre quelconque de façon invariante

$$(2-18) \quad \Pi_{i'j'} = (P_{//} - P_{\perp}) \hat{h}_i \hat{h}_{j'} + P_{\perp} \delta_{i'j'}$$

DÉFINITION. — Un fluide est dit anisotrope si la quadrique des pressions est définie dans le repère propre par (2-18)

(c) Les composantes $\Pi_{\alpha\beta}$ du tenseur des pressions dans un repère quelconque se déduisent de ses composantes $\Pi_{i'j'}$ dans le repère propre par les formules de transformations tensorielles (2-5)

$$(2-19) \quad \Pi_{\alpha\beta} = A_{\alpha}^{i'} A_{\beta}^{j'} \Pi_{i'j'}$$

En portant (2-18) dans (2-19), on obtient d'après (2-4)

$$(2-20) \quad \Pi_{\alpha\beta} = (P_{//} - P_{\perp}) \hat{h}_{\alpha} \hat{h}_{\beta} - P_{\perp} \gamma_{\alpha\beta}$$

où nous avons posé :

$$(2-21) \quad \hat{h}_\alpha = A_\alpha^{i'} \hat{h}_{i'} = -V_\alpha^{(i')} \hat{h}_{i'} = h_\alpha |h|^{-1}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - U_{\alpha\beta} \quad \text{qui est le projecteur d'espace}$$

Le quadrivecteur $\hat{h}_\alpha$ est manifestement un vecteur spatial.

Ainsi, en tout point x de (V_4, g) , un schéma fluide anisotrope non dissipatif et de conductivité infinie est décrit par un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ qui, d'après (2-2), (2-15) et (2-20) s'écrit dans un repère quelconque auquel est rapporté l'espace-temps au point considéré :

$$(2-22) \quad T_{\alpha\beta} = W U_\alpha U_\beta - q_\perp g_{\alpha\beta} - \mu(1 - \lambda) h_\alpha h_\beta$$

où l'on a posé :

$$(2-23) \quad W = \rho + P_\perp + \mu |h|^2 ; \quad q_\perp = P_\perp + \frac{\mu |h|^2}{2} ; \quad \lambda = \frac{P_\parallel - P_\perp}{\mu |h|^2}$$

3. Étude hydro-thermodynamique du schéma fluide anisotrope considéré

(a) Soit r la densité propre de matière du fluide considéré. Sa densité spécifique d'énergie interne ε peut être définie selon le point de vue de Taub [5] et de Lichnerowicz [4] par :

$$(3-1) \quad \rho = r(c^2 + \varepsilon)$$

Le scalaire W peut alors s'écrire :

$$W = c^2 r F + \mu |h|^2$$

où l'on a introduit la variable F définie par :

$$(3-2) \quad (F - 1)c^2 = \varepsilon + \frac{P_\perp}{r}$$

Dans toute la suite nous postulons la conservation de r au cours du mouvement

$$(3-3) \quad \nabla_\alpha (r U^\alpha) = 0$$

Pour le fluide envisagé, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$(3-4) \quad \nabla_\alpha \hat{H}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{avec} \quad \hat{H}^{\alpha\beta} = U^\beta h^\alpha - U^\alpha h^\beta$$

et les équations de la dynamique relativiste sont fournies par les conditions de conservation

$$(3-5) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{où } T^{\alpha\beta} \text{ est donné par (2-22)}$$

(b) Outre la pression, les grandeurs thermodynamiques telles que l'énergie spécifique interne ε , l'entropie spécifique S , la température propre T , etc., seront considérées comme dédoublées relativement au champ magnétique, les composantes transversale et longitudinale de chacune de ces grandeurs étant différentes. Toutes les variables thermodynamiques seront en outre considérées comme des scalaires et doivent nécessairement être évaluées par rapport au repère propre.

Nous introduisons formellement les « tenseurs » des entropies spécifiques $S_{\alpha\beta}$ et des températures propres $\theta_{\alpha\beta}$ définis par des relations analogues à (2-20), soit

$$(3-6) \quad S_{\alpha\beta} = (S_{//} - S_{\perp}) \hat{h}_{\alpha} \hat{h}_{\beta} - S_{\perp} \gamma_{\alpha\beta}$$

$$(3-7) \quad \theta_{\alpha\beta} = (T_{//} - T_{\perp}) \hat{h}_{\alpha} \hat{h}_{\beta} - T_{\perp} \gamma_{\alpha\beta}$$

$S_{//}$ et $S_{\perp}$ sont les composantes longitudinale et transversale de l'entropie spécifique, $T_{//}$ et $T_{\perp}$, celles de la température propre.

(c) Si τ désigne le temps propre, l'opérateur de dérivation le long des lignes de courant $U^{\alpha} \nabla_{\alpha} = \frac{d}{d\tau}$.

Pour des processus quasi-statiques d'échange d'énergie, la relation fondamentale de la thermodynamique peut s'écrire pour le fluide envisagé sous la forme différentielle

$$(3-8) \quad d\varepsilon = + \frac{\Pi^{\alpha\beta}}{r} \nabla_{\alpha} U_{\beta} d\tau + \theta_{\alpha\beta} dS^{\alpha\beta}$$

La loi de conservation (3-3) et les équations (3-4) de Maxwell permettent de développer le deuxième terme du membre de droite de la relation précédente. En effet, les équations de Maxwell s'explicitent sous la forme :

$$(3-9) \quad \nabla_{\alpha} \dot{H}^{\alpha\beta} = U^{\beta} \nabla_{\alpha} h^{\alpha} + h^{\alpha} \nabla_{\alpha} U^{\beta} - U^{\alpha} \nabla_{\alpha} h^{\beta} - h^{\beta} \nabla_{\alpha} U^{\alpha} = 0$$

En multipliant les relations précédentes scalairement par U_{β} et h_{β} il vient :

$$(3-10) \quad U_{\beta} \nabla_{\alpha} \dot{H}^{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} h^{\alpha} - U^{\alpha} U_{\beta} \nabla_{\alpha} h^{\beta} = 0$$

$$(3-11) \quad h_{\beta} \nabla_{\alpha} \dot{H}^{\alpha\beta} = |h|^2 \nabla_{\alpha} U^{\alpha} + \frac{U^{\alpha} \partial_{\alpha} |h|^2}{2} + h^{\alpha} h_{\beta} \nabla_{\alpha} U^{\beta} = 0$$

La relation (3-3) donne :

$$(3-12) \quad r \nabla_{\alpha} U^{\alpha} + U^{\alpha} \partial_{\alpha} r = 0$$

En utilisant (2-20), (3-6), (3-7), (3-10), (3-11) et (3-12), la relation (3-8) donne :

$$(3-13) \quad d\varepsilon = 2T_{\perp} dS_{\perp} + T_{//} dS_{//} - P_{//} d\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\mu\lambda}{2r} d|h|^2$$

Considéré comme une fonction donnée de $S_{\perp}$, $S_{//}$, r , $|h|$, l'énergie interne spécifique ε est un potentiel thermodynamique : $T_{\perp}$, $T_{//}$, $P_{\perp}$ et $P_{//}$ sont définies de façon unique comme des fonctions de $S_{\perp}$, $S_{//}$, r , $|h|$ au moyen des relations

$$(3-14) \quad T_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_{\perp}}; \quad T_{//} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_{//}}; \quad P_{//} = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}; \quad \frac{P_{//} - P_{\perp}}{r |h|} = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial |h|}$$

où l'on a posé $V = \frac{1}{r}$.

Ainsi on a, les composantes transversales et longitudinales des grandeurs considérées étant indépendantes

$$T_{\perp} = T_{\perp}(S_{\perp}, r, |h|); \quad T_{//} = T_{//}(S_{//}, r, |h|); \quad P_{\perp} = P_{\perp}(S_{\perp}, r, |h|); \quad P_{//} = P_{//}(S_{//}, r, |h|)$$

Pour définir les composantes $S_{//}$ et $S_{\perp}$ de l'entropie spécifique, introduisons l'énergie libre ψ du fluide définie par :

$$(3-15) \quad \psi = \varepsilon - \theta_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}$$

On en déduit d'après (3-13)

$$(3-16) \quad d\psi = -2S_{\perp}dT_{\perp} - S_{//}dT_{//} - P_{//}dV - \frac{\mu\lambda}{2r}d|h|^2$$

$\psi(T_{\perp}, T_{//}, r, |h|)$ est un potentiel thermodynamique : $S_{\perp}$, $S_{//}$, $P_{//}$ et $P_{\perp}$ sont définies de façon unique comme des fonctions données de $T_{\perp}$, $T_{//}$, r , $|h|$ par :

$$(3-17) \quad S_{\perp} = -\frac{1}{2} \frac{\partial\psi}{\partial T_{\perp}}; \quad S_{//} = -\frac{\partial\psi}{\partial T_{//}}; \quad P_{//} = -\frac{\partial\psi}{\partial V}; \quad \frac{P_{//} - P_{\perp}}{r|h|} = -\frac{\partial\psi}{\partial |h|}$$

Pour le scalaire F introduit, on a d'après (3-2) et (3-13)

$$(3-18) \quad c^2 dF = 2T_{\perp}dS_{\perp} + T_{//}dS_{//} + VdP_{\perp} - \frac{\mu\lambda r}{2}d\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)$$

Introduisons la variable φ définie par :

$$(3-19) \quad (\varphi - 1)c^2 = \varepsilon + \frac{P_{//}}{r}$$

On en déduit d'après (3-2)

$$(3-20) \quad c^2 r(\varphi - F) = P_{//} - P_{\perp}$$

et d'après (3-13)

$$(3-21) \quad c^2 d\varphi = 2T_{\perp}dS_{\perp} + T_{//}dS_{//} + VdP_{//} - \frac{\mu\lambda}{2r}d|h|^2$$

(d) En multipliant (3-5) scalairement par U_{β} , on obtient l'équation de continuité relativiste :

$$(3-22) \quad U_{\beta} \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} (W U^{\alpha}) - U^{\alpha} \partial_{\alpha} q_{\perp} - \mu(1 - \lambda) h^{\alpha} U_{\beta} \nabla_{\alpha} h^{\beta} = 0$$

Compte tenu de (3-3), (3-11) et (3-18), (3-22) donne :

$$(3-23) \quad 2T_{\perp} U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\perp} + T_{//} U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{//} = 0$$

Dans toute la suite nous postulons la conservation de l'entropie spécifique totale $S = 2S_{\perp} + S_{//}$ du fluide envisagé

$$(3-24) \quad \nabla_{\alpha} (r S U^{\alpha}) = 0$$

ou d'après (3-3)

$$(3-25) \quad U^{\alpha} \partial_{\alpha} S = 0$$

On déduit de (3-23) et (3-25) :

$$(3-26) \quad U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\perp} = 0; \quad U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{//} = 0$$

Les relations (3-25) et (3-26) expriment la conservation le long des lignes de courant de l'entropie spécifique totale et de ses composantes transversale et longitudinale.

Dans la suite nous considérerons r , $S_{\perp}$, $S_{\parallel}$, $|h|$ comme variables fondamentales de base. Les relations $P_{\perp} = P_{\perp}(r, S_{\perp}, |h|)$ et $P_{\parallel} = P_{\parallel}(r, S_{\parallel}, |h|)$ définissent alors pour le fluide envisagé des équations d'état.

Il résulte de cette étude que le système différentiel fondamental de la magnéto-hydrodynamique anisotrope relativiste est constitué par (3-3), (3-4), (3-5), (3-26). A ces relations il faut adjoindre la condition $U^{\alpha}U_{\alpha} = 1$.

4. Le fluide anisotrope polytropique

Dans tout ce qui suit nous supposons le schéma fluide envisagé polytropique. Ce modèle est susceptible de décrire un plasma anisotrope à collisions rares qui constitue essentiellement l'état de la matière en dehors du voisinage immédiat des planètes et des étoiles.

(a) L'équation d'état d'un gaz polytropique de pression p , de densité matérielle n et de température T est définie par [4]

$$(4-1) \quad \frac{P}{n} = (C_p - C_v)T = (\gamma - 1)C_v T \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

où C_p et C_v sont respectivement les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. Soit f le nombre de degrés de liberté. La quantité γ est une fonction de f donnée par :

$$\gamma = \frac{f + 2}{f}$$

Il résulte de (4-1) que l'énergie interne ε et la température T d'un gaz polytropiques sont définies par

$$(4-2) \quad E = \frac{f}{2} \frac{P}{n}, \quad T = \frac{f}{2C_v} \frac{P}{n}$$

Dans le cas qui nous intéresse, supposons l'énergie interne transversale totale $\varepsilon' = 2\varepsilon_{\perp}$ et l'énergie interne longitudinale $\varepsilon_{\parallel}$ définies d'après (4-2) par :

$$(4-3) \quad \varepsilon'_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{r}; \quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{P_{\parallel}}{2r}$$

Ce qui donne pour l'énergie interne spécifique totale $\varepsilon = 2\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}$

$$(4-4) \quad \varepsilon = \frac{P_{\perp}}{r} + \frac{P_{\parallel}}{2r}$$

En portant (4-4) dans (3-13), on obtient pour les composantes $S_{\perp}$ et $S_{\parallel}$ de l'entropie spécifique

$$(4-5) \quad T_{\perp} dS'_{\perp} = 2T_{\perp} dS_{\perp} = \frac{dP_{\perp}}{r} - \frac{P_{\perp}}{r^2} dr - \frac{P_{\perp}}{r} \frac{d|h|}{|h|}$$

$$(4-6) \quad T_{\parallel} dS_{\parallel} = \frac{1}{2} \left(\frac{dP_{\parallel}}{r} - 3P_{\parallel} \frac{dr}{r^2} + \frac{2P_{\parallel}}{r} \frac{d|h|}{|h|} \right)$$

Les températures $T_{\perp}$ dans une direction transversale et $T_{\parallel}$ dans la direction

longitudinale (pour un degré de liberté) sont supposées données d'après (4-2) par :

$$(4-7) \quad T_{\perp} = \frac{1}{2C_{\perp}v} \frac{P_{\perp}}{r}; \quad T_{\parallel} = \frac{1}{2C_{\parallel}v} \frac{P_{\parallel}}{r}$$

$C_{\perp}v$ et $C_{\parallel}v$ représentent respectivement les chaleurs spécifiques à volume constant dans une direction transversale et dans la direction longitudinale. On a naturellement $C_{\perp}v = C_{\parallel}v$. Les relations (4-5) et (4-6) donnent d'après (4-7)

$$(4-8) \quad dS'_{\perp} = 2C_{\perp}vd \ln (P_{\perp}r^{-1} |h|^{-1})$$

$$(4-9) \quad dS_{\parallel} = C_{\parallel}vd \ln (P_{\parallel}r^{-3} |h|^2)$$

En introduisant pour commodité la chaleur spécifique $\bar{C}_v$ définie par $\frac{1}{3}\bar{C}_v = C_{\perp}v = C_{\parallel}v$ les relations précédentes donnent :

$$(4-10) \quad dS'_{\perp} = \bar{C}_v d \ln (P_{\perp}^{2/3} r^{-2/3} |h|^{-2/3})$$

$$(4-11) \quad dS_{\parallel} = \bar{C}_v d \ln (P_{\parallel}^{1/3} r^{-1} |h|^{2/3})$$

Ces relations entraînent pour l'entropie spécifique totale $ds = ds'_{\perp} + ds_{\parallel}$

$$(4-12) \quad dS = \bar{C}_v d \ln (P_{\perp}^{2/3} P_{\parallel}^{1/3} r^{-5/3})$$

La relation précédente a été obtenue dans [6] par d'autres considérations et dans [7] par des considérations similaires aux nôtres.

Il résulte de (4-8) et (4-9) :

$$(4-13) \quad U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\perp} = 0 \Leftrightarrow U^{\alpha} \partial_{\alpha} M_{\perp} = 0$$

$$(4-14) \quad U^{\alpha} \partial_{\alpha} S_{\parallel} = 0 \Leftrightarrow U^{\alpha} \partial_{\alpha} M_{\parallel} = 0$$

où l'on a posé :

$$(4-15) \quad M_{\perp} = P_{\perp} r^{-1} |h|^{-1}; \quad M_{\parallel} = P_{\parallel} r^{-3} |h|^2$$

LEMME 1. — Pour un fluide anisotrope polytropique (au sens de (4-3)), la conservation le long des lignes de courant de l'entropie spécifique transversale $S_{\perp}$ (resp. longitudinale $S_{\parallel}$) est équivalente à celle de la quantité $M_{\perp}$ (resp. $M_{\parallel}$).

(b) Il résulte de cette étude que le système différentiel fondamental de la magnéto-hydrodynamique anisotrope relativiste pour un fluide polytropique, non dissipatif et de conductivité infinie est constitué par les relations (3-3), (3-5), (4-13), (4-14) et (2-1).

Dans la suite pour abréger, nous désignerons par I le système ainsi défini. Ce système se réduit dans l'espace plat à l'approximation classique au système obtenu par des arguments de théorie cinétique par Chew, Goldberger et Low [8].

II. VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES. PROPAGATION DES ONDES

Dans cette section nous étudions les variétés caractéristiques du système différentiel fondamental I et la propagation des ondes.

5. Discontinuités tensorielles à la traversée d'une hypersurface [9], [10]

Nous nous proposons de faire l'étude des variétés caractéristiques par la technique des distributions. Aussi rappelons-nous quelques définitions et résultats qui nous seront utiles dans l'étude envisagée et qui concernent les tenseurs-distributions associés aux discontinuités des grandeurs physiques.

(a) Dans un domaine Ω de (V_4, g) , soit Σ une hypersurface régulière d'équation locale $\Phi = 0$ (Φ de classe C^2) qui partage Ω en deux domaines Ω_1 et Ω_0 correspondant respectivement à $\Phi > 0$ et $\Phi < 0$. Nous posons $l = d\Phi$. Soit H^1 (resp. H^0) la fonction sur Ω qui vaut 1 (resp. 0) dans Ω_1 et 0 (resp. 1) dans Ω_0 . Ces fonctions définissent des distributions relatives à Φ désignées par les mêmes notations.

(b) Considérons un p -tenseur θ sur Ω satisfaisant les hypothèses suivantes :

(A₁) Sur chacun des domaines Ω_1 et Ω_0 , le tenseur θ est un tenseur ordinaire de classe C^1 .

(A₂) Quand Φ tend vers zéro par valeurs positives (resp. négatives), θ et sa dérivée covariante $\nabla\theta$ convergent uniformément vers des fonctions à valeurs tensorielles définies sur Σ et notées $\theta_1, (\nabla\theta)_1$ (resp. $\theta_0, (\nabla\theta)_0$).

On introduit les tenseurs-discontinuités sur Σ

$$[\theta] = \theta_1 - \theta_0 ; \quad [\nabla\theta] = (\nabla\theta)_1 - (\nabla\theta)_0$$

Ainsi dans Ω se trouvent définis de manière naturelle les tenseurs distributions $H^1\theta, H^1\nabla\theta, H^0\theta, H^0\nabla\theta$. Si θ^D est le tenseur-distribution défini par le tenseur θ défini presque partout dans Ω , on a en termes de distributions

$$\theta^D = H^0\theta + H^1\theta$$

Le tenseur-distribution $\nabla\theta^D$, dérivée au sens des distributions de θ^D , s'écrit :

$$\nabla\theta^D = \nabla(H^0\theta) + \nabla(H^1\theta)$$

avec :

$$\nabla(H^0\theta) = -l\bar{\delta} \otimes \theta_0 + H^0\nabla\theta$$

$$\nabla(H^1\theta) = l\bar{\delta} \otimes \theta_1 + H^1\nabla\theta$$

où $\bar{\delta}$ (scalaire-distribution) est la mesure de Dirac relative à Φ , de support Σ . Il en résulte

$$(5-1) \quad \nabla\theta^D = l\bar{\delta}[\theta] + (\nabla\theta)^D$$

où $(\nabla\theta)^D$ est le tenseur-distribution défini par le tenseur ordinaire défini presque partout $\nabla\theta$, dérivée covariante usuelle du tenseur θ . Le tenseur-distribution $l\bar{\delta}[\theta]$ est la σ -couche tensorielle correspondant au tenseur-discontinuité $[\theta]$ sur Σ . De l'étude de $\bar{\delta}[\theta]$ de Ω [9] il résulte qu'il existe un p -tenseur-distribution, noté $\delta\theta$, tel que l'on ait :

$$(5-2) \quad \bar{\delta}[\nabla\theta] = \nabla(\bar{\delta}[\theta]) + l.\delta\theta$$

Si θ satisfaisant toujours aux hypothèses (A_1) et (A_2) est supposé continu sur Ω , alors la formule précédente donne

$$(5-3) \quad \bar{\delta}[\nabla\theta] = l.\delta\theta$$

Ainsi, les tenseurs satisfaisant aux hypothèses (A_1) , (A_2) et qui sont continus sur Ω , définissent d'une manière naturelle une algèbre et δ est un opérateur de dérivation de cette algèbre. δ est appelé opérateur de discontinuité infinitésimale.

6. Variétés caractéristiques

(a) Considérons le système I. Compte tenu de (3-3) et de l'expression de λ , la relation (3-5) peut être explicitée sous la forme

$$(6-1) \quad WU^\alpha \nabla_\alpha U^\beta - \Gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha P_\perp + \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta \partial_\alpha P_{//} - \mu \chi^{\alpha\beta} \frac{\partial_\alpha |h|^2}{2} + \mu(1-\lambda)h^\alpha U_\rho \nabla_\alpha h^\rho U^\beta - \mu(1-\lambda)[\nabla_\alpha h^\alpha h^\beta + h^\alpha \nabla_\alpha h^\beta] = 0$$

où l'on a posé

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} + \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta; \quad \chi^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} + 2\lambda \hat{h}^\alpha \hat{h}^\beta$$

La relation (6-1) constitue le système différentiel aux lignes de courant. Par produit contracté par h^β on en déduit, d'après (3-10) et (3-11)

$$(6-2) \quad c^2 r \varphi \nabla_\alpha h^\alpha + h^\alpha \partial_\alpha P_{//} - \mu h^\alpha \frac{\partial_\alpha |h|^2}{2} = 0$$

En explicitant les relations :

$$U^\alpha \partial_\alpha M_\perp = 0; \quad U^\alpha \partial_\alpha M_{//} = 0$$

on obtient d'après (3-12)

$$(6-3) \quad P_\perp \nabla_\alpha U^\alpha + U^\alpha \partial_\alpha P_\perp - \mu \eta_\perp U^\alpha \partial_\alpha \frac{|h|^2}{2} = 0$$

$$(6-4) \quad 3P_{//} \nabla_\alpha U^\alpha + U^\alpha \partial_\alpha P_{//} + \mu \eta_{//} U^\alpha \partial_\alpha |h|^2 = 0$$

où l'on a posé :

$$(6-5) \quad \eta_\perp = (\mu |h|^2)^{-1} P_\perp; \quad \eta_{//} = (\mu |h|^2)^{-1} P_{//}$$

b) Soit Ω un domaine de (V_4, g) occupé par le fluide considéré. Si θ est l'une des variables hydro-thermodynamiques, θ sera un tenseur de classe $(C^0, C^1 \text{ par morceaux})$ satisfaisant à l'hypothèse (A_2) . Il résulte alors de (5-3) qu'il existe des tenseurs-distributions à support sur Σ notés $\delta P_\perp$, $\delta P_{//}$, $\delta S_\perp$, $\delta S_{//}$, δh^β , δU^β tels que :

$$(6-6) \quad \begin{aligned} \bar{\delta}[\nabla_\alpha P_\perp] &= l_\alpha \delta P_\perp; & \bar{\delta}[\nabla_\alpha P_{//}] &= l_\alpha \delta P_{//}; & \bar{\delta}[\nabla_\alpha S_\perp] &= l_\alpha \delta S_\perp; & \bar{\delta}[\nabla_\alpha S_{//}] &= l_\alpha \delta S_{//} \\ \bar{\delta}[\nabla_\alpha U^\beta] &= l_\beta \delta U^\beta; & \bar{\delta}[\nabla_\alpha h^\beta] &= l_\alpha \delta h^\beta \end{aligned}$$

c) Étudions les conditions pour que l'une au moins des distributions précédentes soit non nulle.

En écrivant les relations $U^\alpha \partial_\alpha S_\perp = 0$ et $U^\alpha \partial_\alpha S_{//} = 0$ de part et d'autre de l'hypersurface Σ et en retranchant, il vient après produit par δ

$$(6-7) \quad l_\alpha U^\alpha \delta S_\perp = 0; \quad l_\alpha U^\alpha \delta S_{//} = 0$$

Si $l_\alpha U^\alpha = 0$ (resp. $\delta S_\perp = \delta S_{//} = 0$) nécessairement $\delta S_\perp \neq 0$, $\delta S_{//} \neq 0$ (resp. $l_\alpha U^\alpha \neq 0$). Nous supposons dans la suite $\delta S_\perp = \delta S_{//} = 0$, c'est-à-dire $l_\alpha U^\alpha \neq 0$.

On déduit de même du système différentiel aux lignes de courant

$$(6-8) \quad W l_\alpha U^\alpha l_\beta \delta U^\beta - \Gamma^{\lambda\rho} l_\lambda l_\rho \delta P_\perp + (l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2 \delta P_{//} - \mu \chi^{\lambda\rho} l_\lambda l_\rho \frac{\delta |h|^2}{2} - \mu(1 - \lambda) l_\alpha h^\alpha l_\beta \delta h^\beta = 0$$

Les relations (3-10) et (3-11) entraînent

$$(6-9) \quad l_\beta \delta h^\beta - l_\alpha U^\alpha U_\beta \delta h^\beta = 0$$

$$(6-10) \quad |h|^2 l_\beta \delta U^\beta + l_\alpha U^\alpha \frac{\delta |h|^2}{2} - l_\alpha h^\alpha U_\beta \delta h^\beta = 0$$

En éliminant $U_\beta \delta h^\beta$ des relations précédentes, on obtient :

$$(6-11) \quad |h|^2 l_\alpha U^\alpha l_\beta \delta U^\beta + (l_\alpha U^\alpha)^2 \frac{\delta |h|^2}{2} - l_\alpha h^\alpha l_\beta \delta h^\beta = 0$$

De la relation, (6-2) on déduit :

$$(6-12) \quad l_\alpha h^\alpha \delta P_{//} - \mu \lambda l_\alpha h^\alpha \frac{\delta |h|^2}{2} + c^2 r \phi l_\beta \delta h^\beta = 0$$

Les relations (6-3) et (6-4) donnent :

$$(6-13) \quad P_\perp l_\beta \delta U^\beta + l_\alpha U^\alpha \delta P_\perp - \mu \eta_\perp l_\alpha U^\alpha \frac{\delta |h|^2}{2} = 0$$

$$(6-14) \quad 3P_{//} l_\beta \delta U^\beta + l_\alpha U^\alpha \delta P_{//} + \mu \eta_{//} l_\alpha U^\alpha \delta |h|^2 = 0$$

(6-8), (6-11)-(6-14) constituent un système de cinq équations linéaires aux inconnues $l_\beta \delta U^\beta$, $\delta P_\perp$, $\delta P_{//}$, $\delta |h|^2$, $l_\beta \delta h^\beta$. Son déterminant s'écrit :

$$H = \begin{vmatrix} W l_\alpha U^\alpha & -\Gamma^{\lambda\rho} l_\lambda l_\rho & (l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2 & -\mu \chi^{\lambda\rho} l_\lambda l_\rho & -\mu(1 - \lambda) l_\alpha h^\alpha \\ |h|^2 l_\alpha U^\alpha & 0 & 0 & (l_\alpha U^\alpha)^2 & -l_\alpha h^\alpha \\ 0 & 0 & l_\alpha h^\alpha & -\mu \lambda l_\alpha h^\alpha & c^2 r \phi \\ P_\perp & l_\alpha U^\alpha & 0 & -\mu \eta_\perp l_\alpha U^\alpha & 0 \\ 3P_{//} & 0 & l_\alpha U^\alpha & 2\mu \eta_{//} l_\alpha U^\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

Soit, après développement et quelques transformations élémentaires :

$$(6-15) \quad H(l) = P(l) l_\alpha U^\alpha$$

où l'on a posé :

$$(6-16) \quad P(l) = \Lambda_1 (l_\alpha U^\alpha)^4 + \Lambda_2 (l_\alpha U^\alpha)^2 l_\alpha l^\alpha + \Lambda_3 (l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2 (l_\alpha U^\alpha)^2 + \Lambda_4 (l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2 l_\alpha l^\alpha + \Lambda_5 (l_\alpha \hat{h}^\alpha)^4$$

où

$$(6-17) \quad \begin{cases} \Lambda_1 = c^2 r \varphi (c^2 r F - 2P_\perp) \\ \Lambda_2 = c^2 r \varphi (\mu |h|^2 + 2P_\perp) \\ \Lambda_3 = 3\mu |h|^2 P_{//} (1 + 2\eta_\perp)(1 - \alpha) + c^2 r \varphi (P_{//} + P_\perp) - 3P_{//} W \\ \Lambda_4 = -3\mu |h|^2 P_{//} (1 + 2\eta_\perp)(1 - \alpha) \\ \Lambda_5 = -3\mu |h|^2 P_{//} [(1 + 2\eta_\perp)(1 - \alpha) - (1 - \lambda)] \end{cases}$$

avec

$$(6-18) \quad \alpha = \frac{\eta_\perp^2}{3\eta_{//}(1 + 2\eta_\perp)}$$

Pour que le système considéré admette des solutions non nulles, il faut et il suffit que $H(l) = 0$, soit $P(l) = 0$. Le problème de Cauchy est dans ce cas indéterminé et l'hypersurface Σ est singulière au point de vue de ce problème. Le système considéré et la relation (3-12) permettent de déterminer $l_\rho \delta U^\beta$, $\delta P_\perp$, $\delta P_{//}$, $l_\beta \delta h^\beta$ et δr en fonction de $\delta |h|^2$

(d) L'étude précédente concernait $\delta P_\perp$, $\delta P_{//}$, $\delta |h|^2$ et les composantes normales à Σ de U^β et h^β . Décomposons ces vecteurs selon leurs composantes tangentielles et normales à Σ . Il vient :

$$U^\beta = v^\beta + \frac{l_\alpha U^\alpha}{l_\alpha l^\alpha} l^\beta ; \quad h^\beta = t^\beta + \frac{l_\alpha h^\alpha}{l_\alpha l^\alpha} l^\beta \quad \text{avec} \quad l_\beta U^\beta = l_\beta t^\beta = 0$$

D'après les résultats du (c), les équations (6-1) et (3-9) fournissent des relations de la forme :

$$(6-19) \quad W l_\alpha U^\alpha \delta v^\beta - \mu(1 - \lambda) l_\alpha h^\alpha \delta t^\beta \simeq 0$$

$$(6-20) \quad -l_\alpha h^\alpha \delta v^\beta + l_\alpha U^\alpha \delta t^\beta \simeq 0$$

où le symbole $\simeq$ signifie modulo des termes proportionnels à $\delta |h|^2$. Le déterminant de ces équations aux inconnues δv^β et δt^β s'écrit :

$$(6-21) \quad Q(l) = W(l_\alpha U^\alpha)^2 - \mu(1 - \lambda)(l_\alpha h^\alpha)^2$$

e) Ainsi, nous avons mis en évidence trois types de variétés caractéristiques du système I.

1) Les ondes d'entropie Σ_s (ou ondes matérielles), solutions de

$$(6-22) \quad U^\alpha \partial_\alpha \phi = 0$$

Elles correspondent à l'existence des discontinuités $\delta S_\perp$, $\delta S_{//}$ et sont tangentes en chaque point à la droite support de U^α duale du plan d'équation

$$(6-23) \quad E(l) = l_\alpha U^\alpha = 0$$

2) Les ondes magnétosoniques Σ_M , solutions de

$$(6-24) \quad P^{\lambda\rho\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial_\rho \phi \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = 0$$

où l'on a posé

$$P^{\lambda\rho\mu\nu} = \Lambda_1 U^\lambda U^\rho U^\mu U^\nu + \Lambda_2 U^\lambda U^\rho g^{\mu\nu} + \Lambda_3 U^\lambda U^\rho \hat{h}^\mu \hat{h}^\nu + \Lambda_4 \hat{h}^\lambda \hat{h}^\rho g^{\mu\nu} + \Lambda_5 \hat{h}^\lambda \hat{h}^\rho \hat{h}^\mu \hat{h}^\nu$$

Elles correspondent à l'existence des discontinuités $l_\beta \delta U^\beta$, $\delta P_\perp$, $\delta P_\parallel$, $l_\beta \delta h^\beta$ et sont tangentes en chaque point au cône caractéristique dual du cône d'équation

$$(6-25) \quad P(l) = P^{\lambda\rho\mu\nu} l_\lambda l_\rho l_\mu l_\nu = 0$$

3) Les ondes d'Alfvén Σ_A , solutions de

$$(6-26) \quad Q^{\nu\rho} \partial_\nu \phi \partial_\rho \phi = 0$$

où l'on a posé

$$Q^{\nu\rho} = W U^\lambda U^\rho - \mu(1 - \lambda) h^\nu h^\rho$$

Elles correspondent à l'existence des discontinuités δv^β , δt^β et sont tangentes en chaque point au cône caractéristique dual du cône d'équation

$$(6-27) \quad Q(l) = Q^{\nu\rho} l_\nu l_\rho = 0$$

Supposons $(1 - \lambda) > 0$. En posant $\beta = \sqrt{\frac{W}{\mu(1 - \lambda)}}$, l'équation précédente peut s'écrire

$$\{(\beta U^\alpha + h^\alpha) l_\alpha\} \{(\beta U^\alpha - h^\alpha) l_\alpha\} = 0$$

Ainsi, si $(1 - \lambda) > 0$ les ondes d'Alfvén sont engendrées par les trajectoires du champ de vecteurs

$$A^\alpha = \beta U^\alpha + h^\alpha$$

(ondes d'espèce A), soit du champ de vecteurs

$$B^\alpha = \beta U^\alpha - h^\alpha$$

(ondes d'espèce B). Sous la condition $(1 - \lambda) > 0$, ces vecteurs sont temporels.

7. Propagation des ondes

7-1. VITESSES DE PROPAGATION

a) La vitesse de propagation V^Σ par rapport au fluide d'une hypersurface Σ (d'équation locale $\Phi = 0$) est donnée par [I] [4] [II]

$$(7-1) \quad \left(\frac{V^\Sigma}{c}\right)^2 = y^\Sigma = [(l_\alpha U^\alpha)^2 - l_\alpha l^\alpha]^{-1} (l_\alpha U^\alpha)^2$$

C'est la pente spatio-temporelle du 3-plan tangent à Σ (7-1) entraîne :

$$(7-2) \quad (1 - y^\Sigma)(l_\alpha U^\alpha)^2 = -y^\Sigma l_\alpha l^\alpha$$

Sur (7-2) on voit que $\frac{V^\Sigma}{c} < 1$ si et seulement si $l_\alpha l^\alpha < 0$, c'est-à-dire si Σ est orientée dans le temps, ce que nous postulons dans la suite.

La composante $\hat{h}_n$ de $\hat{h}$ dans la direction spatiale de propagation définie par

$$(7-3) \quad \hat{h}_n^2 = [(l_\alpha U^\alpha)^2 - l_\alpha l^\alpha]^{-1} (l_\alpha \hat{h}^\alpha)^2$$

vérifie le lemme géométrique suivant [10].

LEMME 2. — On a toujours $\hat{h}_n^2 \leq 1$. Pour que $\hat{h}_n^2 = 1$, il faut et il suffit que l appartienne au 2-plan défini par (U, h) .

b) La quantité $Q(l)$ peut s'exprimer en termes de y d'après (7-2) et (7-3) par :

$$(7-4) \quad \frac{(1-y)}{-l_\alpha l^\alpha} Q(l) = D(y) = Wy - \mu(1-\lambda)h_n^2$$

Ainsi, les ondes d'Alfvén admettent par rapport au fluide une vitesse de propagation V^A donnée par :

$$(7-5) \quad \left(\frac{V^A}{c}\right)^2 = y^A = [c^2 r F + \mu |h|^2]^{-1} \mu(1-\lambda)h_n^2$$

Sur cette relation on voit que la vitesse de propagation des ondes d'Alfvén est réelle si

$$(H_1) \quad (1-\lambda) \geq 0$$

c) De même la quantité $P(l)$, compte tenu de (7-2) et (7-3), peut s'exprimer en termes de y par :

$$(7-6) \quad \frac{(1-y)^2}{(l_\alpha l^\alpha)^2} P(l) = \Pi(y) = Ay^2 - By + C$$

avec

$$(7-7) \quad \begin{cases} A = \Lambda_1 + \Lambda_2 \\ B = \Lambda_2 - (\Lambda_3 + \Lambda_4)\hat{h}_n^2 \\ C = (\Lambda_5 \hat{h}_n^2 - \Lambda_4)\hat{h}_n^2 \end{cases}$$

Considérons le trinôme $\Pi(y)$ dont les racines déterminent les vitesses de propagation par rapport au fluide des ondes magnétosoniques. Le coefficient

$$A = \Lambda_1 + \Lambda_2 = c^2 r \varphi (c^2 r F + \mu |h|^2)$$

est strictement positif. Les coefficients B et C , après quelques transformations élémentaires, peuvent s'écrire

$$(7-8) \quad B = c^2 r \varphi \mu |h|^2 b_n$$

$$(7-9) \quad C = 3\mu h_n^2 P_{//} c_n$$

où l'on a posé

$$(7-10) \quad b_n = (1 - \hat{h}_n^2)(1 + 2\eta_\perp) + (1 - \lambda)\hat{h}_n^2 + 3\eta_{//}\bar{e}\hat{h}_n^2$$

$$(7-11) \quad c_n = (1 - \hat{h}_n^2)(1 + 2\eta_\perp)(1 - \alpha) + (1 - \lambda)\hat{h}_n^2$$

où

$$(7-12) \quad \bar{e} = \frac{W}{c^2 r \varphi} = 1 + \frac{\mu |h|^2}{c^2 r \varphi} (1 - \lambda)$$

Le trinôme $\Pi(y)$ aura deux racines réelles comprises entre 0 et 1 si

$$(7-13) \quad B > 0, \quad \Pi(0) = C > 0, \quad \Pi(1) = A - B + C > 0$$

Sous l'hypothèse (H_1) et en vertu du lemme 2, l'inégalité $B > 0$ est satis-

faite. Sous la même hypothèse et en vertu du même lemme, l'inégalité $\Pi(0) > 0$ est satisfaite pourvu que

$$(H_2) \quad (1 - \alpha) \geq 0$$

$\Pi(1)$ peut s'écrire d'après les expressions (7-7) de A, B, C :

$$\Pi(1) = \Lambda_1 + (\Lambda_3 + \Lambda_5 \hat{h}_n^2) \hat{h}_n^2$$

Ce qui donne d'après (6-17)

$$(7-14) \quad \Pi(1) = 3\mu h_n^2 P_{//} [(1 - \hat{h}_n^2)(1 + 2\eta_{\perp})(1 - \alpha) + \hat{h}_n^2(1 - \lambda)] + (c^2 r \varphi)(c^2 r F)(1 - \mathcal{H})$$

où l'on a posé

$$(7-15) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{c^2 r F} [P_{//}(3\bar{e} - 1)\hat{h}_n^2 + (2 - \hat{h}_n^2)P_{\perp}]$$

Ainsi, sous les hypothèses (H_1) et (H_2) , l'inégalité $\Pi(1) > 0$ est satisfaite si

$$(H_3) \quad (1 - \mathcal{H}) > 0$$

Les hypothèses (H_i) ($i = 1, 2, 3$) assurent que les inégalités (7-13) sont satisfaites.

Les hypothèses (H_1) et (H_2) conduisent à :

$$(\bar{H}) \quad \frac{\eta_{\perp}^2}{(3(1 + 2\eta_{\perp}))} \leq \eta_{//} \leq 1 + \eta_{\perp}$$

Il en résulte que les quantités $\eta_{//}$ et $\eta_{\perp}$ ne peuvent prendre des valeurs arbitraires. Leurs variations sont astreintes à vérifier les conditions $(\bar{H})$.

Du point de vue physique, les hypothèses (H_1) et (H_2) , ou, ce qui revient au même les conditions $(\bar{H})$, impliquent l'absence d'instabilités dans le fluide considéré [6] [12] [13] [14]. Quand à l'hypothèse (H_3) , elle implique, en l'absence d'instabilités, que les vitesses magnétosoniques sont inférieures à celle de la lumière.

Ainsi, sous les hypothèses (H_i) , le trinôme $\Pi(y)$ a deux zéros entre 0 et 1 que nous notons y^{M-} , y^{M+} et que nous appelons comme en magnétohydrodynamique isotrope respectivement vitesse magnétosonique lente et vitesse magnétosonique rapide.

d) Étudions la position de la vitesse de propagation V^A des ondes d'Alfvén par rapport aux vitesses de propagation V^{M-} et V^{M+} des ondes magnétosoniques. Le trinôme

$$\Pi(y^A) = A(y^A)^2 - B y^A + C$$

s'écrit après quelques transformations

$$(7-16) \quad \Pi(y^A) = \frac{1}{\bar{e}} (\mu |h|^2) (\mu h_n^2) a_n$$

où

$$(7-17) \quad a_n = (1 - \hat{h}_n^2)(1 + 2\eta_{\perp})[3\eta_{//}\bar{e}(1 - \alpha) - (1 - \lambda)]$$

On en déduit, compte tenu de $(\bar{H})$

$$(7-18) \quad \Pi(y^A) \leq 0 \quad \text{si} \quad \frac{\eta_{\perp}^2}{3(1 + 2\eta_{\perp})} \leq \eta_{\parallel} < \frac{1}{1 + 3\bar{e}} \left[1 + \eta_{\perp} + \frac{\bar{e}\eta_{\perp}^2}{1 + 2\eta_{\perp}} \right]$$

$$(7-19) \quad \Pi(y^A) \geq 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{1 + 3\bar{e}} \left[1 + \eta_{\perp} + \frac{\bar{e}\eta_{\perp}^2}{1 + 2\eta_{\perp}} \right] < \eta_{\parallel} \leq 1 + \eta_{\perp}$$

A l'approximation classique ($\bar{e} = 1$) ces résultats coïncident avec ceux obtenus dans [12] par une autre méthode.

Nous énonçons :

THÉORÈME. — Sous les hypothèses (H_i) ($i = 1, 2, 3$), il existe par rapport au fluide anisotrope considéré une vitesse de propagation V^A pour les ondes d'Alfvén et deux vitesses de propagation V^{M-} et V^{M+} pour les ondes magnéto-soniques, vérifiant

$$0 \leq V^{M-} \leq V^A \leq V^{M+} < c \quad \text{et} \quad 0 \leq V^A \leq V^{M-} \leq V^{M+} < c$$

7-2. CAS PARTICULIERS

Nous examinons les résultats du paragraphe précédent dans quelques cas particuliers.

1) *Champ magnétique*, $\eta_{\parallel} \ll 1$, $\eta_{\perp} \ll 1$.

Dans ce cas on déduit des équations $D(y) = \Pi(y) = 0$

$$(7-20) \quad y^A = \frac{\mu |h|^2}{W} \hat{h}_n^2; \quad y^{(1)} = \frac{3P_{\parallel}}{c^2 r \varphi} \hat{h}_n^2; \quad y^{(2)} = \frac{\mu |h|^2}{W}$$

Ce qui donne à l'approximation classique

$$(7-21) \quad (V^A)^2 = \frac{\mu |h|^2}{r} \hat{h}_n^2; \quad (V^{(1)})^2 = \frac{3P_{\parallel}}{r} \hat{h}_n^2; \quad (V^{(2)})^2 = \frac{\mu |h|^2}{r}$$

2) *Propagation longitudinale* $\hat{h}_n^2 = 1$.

Dans ce cas l'équation $D(y) = 0$ donne

$$(7-22) \quad y^A = \frac{\mu |h|^2}{W} (1 - \lambda)$$

(7-8) et (7-9) deviennent

$$b_n = 1 - \lambda + 3\eta_{\parallel}\bar{e}; \quad c_n = 1 - \lambda$$

L'équation $\Pi(y) = 0$ s'écrit

$$(7-23) \quad c^2 r \varphi y_{\parallel}^2 - c^2 r \varphi \mu |h|^2 (1 - \lambda + 3\eta_{\parallel}\bar{e}) y_{\parallel} + 3P_{\parallel} \mu |h|^2 (1 - \lambda) = 0$$

dont le discriminant est

$$(c^2 r \varphi)^2 (\mu |h|^2)^2 [1 - \lambda - 3\eta_{\parallel}\bar{e}]^2$$

Les racines de (7-23) sont alors

$$(7-24) \quad y_{\parallel}^{(1)} = \frac{3P_{\parallel}}{c^2 r \varphi}; \quad y_{\parallel}^{(2)} = \frac{\mu |h|^2}{W} (1 - \lambda) = y^A$$

A l'approximation classique, il vient :

$$(7-25) \quad (V_{//}^{(1)})^2 = \frac{3P_{//}}{r}; \quad (V_{//}^{(2)})^2 = (V^A)^2 = \frac{\mu |h|^2}{r} (1 - \lambda)$$

3) *Propagation transversale* $\hat{h}_n^2 = 0$.

Dans ce cas on obtient $C = 0$ et $b_n = 1 + 2\eta_{\perp}$.
Les équations $D(y) = 0$ et $\Pi(y) = 0$ donnent alors

$$(7-26) \quad y^A = y_{\perp}^{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad y_{\perp}^{(2)} = \frac{\mu |h|^2}{W} (1 + 2\eta_{\perp})$$

$y_{\perp}^{(2)}$ donne à l'approximation classique

$$(7-27) \quad (V_{\perp}^{(2)})^2 = \frac{\mu |h|^2}{r} (1 + 2\eta_{\perp})$$

Soulignons la simplicité de la théorie relativiste vis-à-vis de la théorie classique. Il semble plus commode de substituer à la théorie classique l'approche classique de la théorie relativiste.

8. Étude des cônes d'ondes

8-1. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS HYPERBOLIQUES STRICTS [15] [4]

Soit V_n une variété différentiable de classe c^k où k est suffisamment grand, $a(x, \partial)$ un opérateur différentiel où $x \in V_n$ et où ∂ désigne l'opérateur de dérivation ordinaire $\partial = (\partial I)$ ($I = 1, 2, \dots, n$). a est d'ordre m , $a(x, \xi)$ étant un polynôme réel en ξ de degré m . Soit $h(x, \xi)$ la partie principale de $a(x, \xi)$ constituée par les termes homogènes de degré m et soit $V_x(h)$ le cône défini dans l'espace vectoriel T_x^* des vecteurs covariants en x par l'équation

$$h(x, \xi) = 0$$

L'opérateur a est dit hyperbolique strict en x si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

Il existe dans T_x^* des éléments ξ tels que toute droite issue de ξ ne passant pas par le sommet coupe le cône $V_x(h)$ en m points réels distincts. L'ensemble de ces points ξ forme l'intérieur de deux demi-cônes convexes fermés opposés $\Gamma_x^+(a)$ et $\Gamma_x^-(a)$ dont les bords appartiennent à $V_x(h)$; le cône $V_x(h)$ n'a pas de génératrices singulières.

8-2. REPRÉSENTATION DES CÔNES D'ONDES DANS R^3

a) En chaque point x de la variété espace-temps (V_4, g) les cônes caractéristiques correspondant aux diverses variétés caractéristiques sont des cônes d'aux des cônes d'équations (6-25) et (6-27). Sous les hypothèses (H_i) ($i = 1, 2, 3$) les vitesses de propagation des ondes magnéto-soniques et des ondes d'Alfvén sont réelles et inférieures à la vitesse de la

lumière dans le vide. Les cônes définis par (6-25) et (6-27) contiennent donc dans leur intérieur le cône fondamental de la métrique, d'équation

$$(8-1) \quad G(l) = g^{\lambda\rho} l_\lambda l_\rho = 0$$

Nous allons étudier les différents cônes. Pour cela nous rapportons l'espace-temps (V_4, g) en un point x d'un domaine Ω occupé par le fluide au repère propre $V^{(\lambda')}$ qui est tel que $V_\alpha^{(3')} = \hat{h}_\alpha$. Posons $l_\alpha = (l_0 = t, l_1 = x, l_2 = y, l_3 = z)$. Avec ces notations on a

$$l_\alpha U^\alpha = t; \quad l_\alpha \hat{h}_\alpha = z; \quad l_\alpha h^\alpha = |h|z$$

et les équations (8-1), (6-25) et (6-27) s'écrivent

$$(\Gamma_G) \quad t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$(\Gamma_M) \quad \Lambda_1 t^4 + \Lambda_2 t^2 (t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + \Lambda_3 t^2 z^2 + \Lambda_4 z^2 (t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + \Lambda_5 z^4 = 0$$

$$(\Gamma_A) \quad W t^2 - \mu |h|^2 (1 - \lambda) z^2 = 0$$

Les équations précédentes définissent trois cônes dont les sommets coïncident avec l'origine du repère.

Nous appelons « indicatrices dans R^3 » les sections de ces cônes par l'hyperplan $t - 1 = 0$. Nous obtenons ainsi les trois indicatrices suivantes

$$(S_G) \quad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$(S_M) \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 (1 - x^2 - y^2 - z^2) + \Lambda_2 z^2 + \Lambda_4 z^2 (1 - x^2 - y^2 - z^2) + \Lambda_5 z^4 = 0$$

$$(S_A) \quad W - \mu |h|^2 (1 - \lambda) z^2 = 0$$

b) Nous allons discuter la forme de ces indicatrices. Ce sont trois surfaces de révolution au tour de oz ; en les coupant par le plan $x = 0$, on obtient les courbes suivantes :

$$(C_G) \quad y^2 + z^2 = 1$$

$$(C_M) \quad (\Lambda_5 - \Lambda_4) z^4 + (\Lambda_4 + \Lambda_3 - \Lambda_2) z^2 - (\Lambda_2 + \Lambda_4 z^2) y^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2 = 0$$

$$(C_A) \quad z^2 = (1 - \lambda)^{-1} (1 + \beta) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{c^2 r F}{\mu |h|^2}$$

C_G est un cercle de rayon égal à 1, C_A se compose de deux droites et C_M est une courbe du quatrième degré ayant oy et oz comme axes de symétrie. L'équation de C_M peut s'écrire :

$$(8-2) \quad y^2 = \frac{(\Lambda_5 - \Lambda_4) z^4 + (\Lambda_4 + \Lambda_3 - \Lambda_2) z^2 + \Lambda_1 + \Lambda_2}{\Lambda_4 (z^2 + \Lambda_2 / \Lambda_4)}$$

Soit, compte tenu de (6-17)

$$(8-3) \quad y^2 = \frac{(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)}{\Lambda_4 (z^2 - z_a^2)}$$

où l'on a posé

$$(8-4) \quad z_1^2 = \frac{c^2 r \varphi}{3P_{//}}; \quad z_2^2 = (1 - \lambda)^{-1} (1 + \beta); \quad z_a^2 = (1 - \alpha)^{-1} \frac{c^2 r \varphi}{3P_{//}}$$

Ainsi, pour $z^2 = 0$, on a

$$(8-5) \quad y^2 = (1 + 2\eta_{\perp})^{-1}(1 + \beta)$$

et pour $y^2 = 0$,

$$z^2 = (3P_{//})^{-1}c^2r\varphi \quad \text{et} \quad z^2 = (1 - \lambda)^{-1}(1 + \beta)$$

De la comparaison de (7-24) et (8-4) d'une part, de (7-26) et (8-5) d'autre part, il résulte

$$y_{//}^{(1)} = z_1^{-2}; \quad y_{//}^{(2)} = z_2^{-2}; \quad y_{\perp} = y^{-1}$$

c) Étudions la position des différentes racines les unes par rapport aux autres. On déduit de (8-4) et (8-5)

$$(8-6) \quad \begin{cases} z_1^2 - z_2^2 = [3P_{//}(1 - \lambda)]^{-1}c^2r\varphi[1 - \lambda - 3\eta_{//}e] \\ z_a^2 - z_1^2 = \alpha[3P_{//}(1 - \alpha)]^{-1}c^2r\varphi \\ z_a^2 - z_2^2 = (3P_{//})^{-1}c^2r\varphi(1 - \alpha)^{-1}(1 - \lambda)^{-2}[1 - \lambda - 3\eta_{//}\bar{e}(1 - \alpha)] \\ z_2^2 - y^2 = (1 + 2\eta_{\perp})^{-1}(1 - \lambda)^{-1}(\eta_{//} + \eta_{\perp})(1 + \beta) \\ z_1^2 - y^2 = c^2r\varphi[3P_{//}(1 + 2\eta_{\perp})]^{-1}(1 + 2\eta_{\perp} - 3\eta_{//}\bar{e}) \end{cases}$$

Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) on a $z_a - z_1 > 0$ et $z_2 - y > 0$. Nous sommes conduits, d'après (8-6) à considérer quatre cas :

Premier cas $z_1 - z_2 > 0$.

On en déduit d'après $(\bar{H})$

$$(I_1) \quad [3(1 + 2\eta_{\perp})]^{-1}\eta_{\perp}^2 \leq \eta_{//} < (1 + 3\bar{e})^{-1}(1 + \eta_{\perp})$$

Dans ce cas on obtient la figure suivante pour la courbe C_M

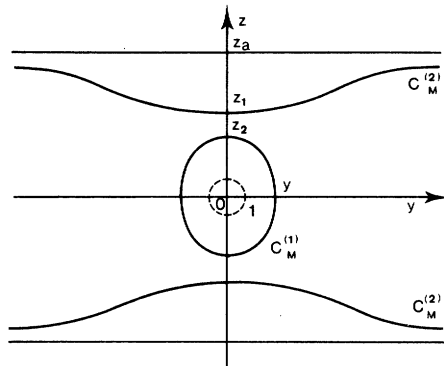


FIG. 1.

Deuxième cas $z_1 - z_2 < 0$, $z_a - z_2 > 0$.

Ce qui entraîne

$$(I_2) \quad (1 + 3\bar{e})^{-1}(1 + \eta_{\perp}) \leq \eta_{//} \leq (1 + 3\bar{e})^{-1}[1 + \eta_{\perp} + \bar{e}(1 + 2\eta_{\perp})^{-1}\eta_{\perp}^2]$$

La figure obtenue est identique à la figure 1, les racines z_1 et z_2 étant seulement échangées.

On déduit de l'étude de ces deux cas que le cône Γ_M se compose de deux nappes, une nappe intérieure $\Gamma_M^{(1)}$ convexe et une nappe extérieure $\Gamma_M^{(2)}$. La partie extérieure de $\Gamma_M^{(2)}$ correspond aux ondes magnétosoniques lentes et la partie intérieure de $\Gamma_M^{(2)}$, aux ondes magnétosoniques rapides. Les vitesses de propagation V^A , V^{M-} et V^{M+} vérifient les inégalités suivantes

$$(8-7) \quad \begin{aligned} 0 \leq V^{M-} \leq V^A \leq V^{M+} < c & \quad \text{sous } (I_1) \\ 0 \leq V^{M-} \leq V^A < V^{M+} < c & \quad \text{sous } (I_2) \end{aligned}$$

Sous les inégalités (I_1) et (I_2) , les ondes possèdent des propriétés similaires à celles obtenues en magnéto-hydrodynamique isotrope.

Troisième cas $z_a - z_2 < 0$.

Il en résulte d'après $z_a - z_1 > 0$ que $z_1 - z_2 < 0$. On en déduit d'après $(\bar{H})$

$$(I_3) \quad (1 + 3\bar{e})^{-1} [1 + 2\eta_{\perp} - \bar{e}(1 + 2\eta_{\perp})^{-1}\eta_{\perp}^2] < \eta_{\parallel} \leq 1 + \eta_{\perp}$$

On obtient la figure suivante pour la courbe C_M

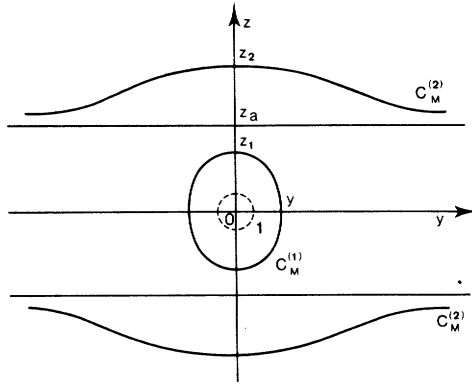


FIG. 2.

Le cône Γ_M se compose d'une nappe intérieure $\Gamma_M^{(1)}$ convexe et d'une nappe extérieure $\Gamma_M^{(2)}$. Les parties extérieures de $\Gamma_M^{(2)}$ et $\Gamma_M^{(1)}$ correspondent respectivement aux ondes magnétosoniques lentes et aux ondes magnétosoniques rapides. Les vitesses de propagation V^A , V^{M-} et V^{M+} vérifient les inégalités :

$$(8-8) \quad 0 \leq V^A \leq V^{M-} < V^{M+} < c$$

Sous les inégalités (I_3) de nouvelles propriétés des ondes particulières à la magnéto-hydrodynamique anisotrope apparaissent.

Il résulte de l'étude précédente que sous les inégalités (I_i) ($i = 1, 2, 3$),

l'opérateur différentiel $P^{\lambda\rho\mu\nu}\partial_{\lambda\rho\mu\nu}$ associé aux ondes magnétosoniques est hyperbolique strict.

Quatrième cas $z_1 = z_2 < z_a$.

Ce qui donne

$$(8-9) \quad 1 + \eta_{\perp} = (1 + 3\bar{e})\eta_{//}$$

On obtient la figure suivante :

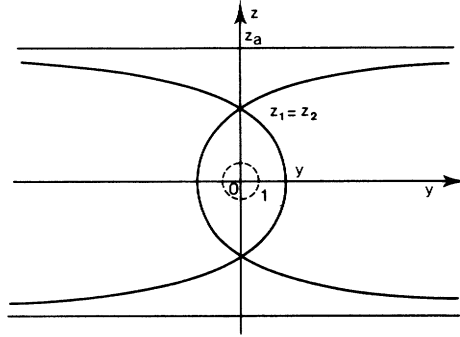


FIG. 3.

Il en résulte que le cône Γ_M a deux génératrices contenues dans le 2-plan Π^* défini par (U, h) :

l'opérateur différentiel $P^{\lambda\rho\mu\nu}\partial_{\lambda\rho\mu\nu}$ n'est pas hyperbolique strict.

Le cône Γ_A se compose de deux hyperplans $z = \pm \sqrt{(1 + \beta)(1 - \lambda)^{-1}}t$ tangents à Γ_M le long des génératrices du 2-plan Π^* . L'intersection de ces hyperplans est le plan Π_0 défini par $3 = t = 0$. On en déduit que l'opérateur différentiel $Q^{\lambda\rho}\partial_{\lambda\rho}$ associé aux ondes d'Alfvén est hyperbolique non strict, il est le produit de deux opérateurs hyperboliques stricts correspondant aux deux hyperplans Γ_A .

Dans le repère propre considéré (6-23) est l'hyperplan $t = 0$ dont l'intersection avec Γ_M ou chacun des hyperplans Γ_A est le 2-plan Π_a . L'opérateur différentiel $U^\rho\partial_\rho$ associé aux ondes d'entropie est hyperbolique strict.

Nous énonçons

PROPOSITION. — L'opérateur différentiel $P^{\lambda\rho\mu\nu}\partial_{\lambda\rho\mu\nu}$ associé aux ondes magnétosoniques est hyperbolique strict sous les inégalités (I_i) et hyperbolique non strict sous l'égalité (8-9). Les opérateurs différentiels $U^\rho\partial_\rho$ et $Q^{\lambda\rho}\partial_{\lambda\rho}$ associés aux ondes d'entropie et aux ondes d'Alfvén sont respectivement hyperbolique strict et hyperbolique non strict.

Soulignons que si on violait les inégalités (H) , par conséquent les inégalités (I_i) , certaines vitesses de propagation seraient réelles, d'autres imaginaires. Les opérateurs différentiels $P^{\lambda\rho\mu\nu}\partial_{\lambda\rho\mu\nu}$ et $Q^{\lambda\rho}\partial_{\lambda\rho}$ ne seraient ni totalement hyperboliques ni elliptiques.

d) Étudions l'intersection $\Gamma_A \cap \Gamma_M$. Si nous portons $(1 + \beta)(1 - \lambda)^{-1}t^2 = z^2$ dans l'équation de Γ_M nous obtenons :

$$(8-9) \quad t^2(x^2 + y^2)[1 - \lambda - 3\eta_{//}\bar{\epsilon}(1 - \alpha)] = 0$$

Il en résulte que si $1 - \lambda - 3\eta_{//}\bar{\epsilon}(1 - \alpha) \neq 0$, c'est-à-dire $\Pi(y^A) \neq 0$ l'intersection $\Gamma_A \cap \Gamma_M$ est le plan Π_0 et les génératrices de Γ_M contenues dans le 2-plan Π^* .

CONCLUSION

Le présent travail a été consacré, en magnéto-hydrodynamique anisotrope relativiste, à l'étude des ondes et des discontinuités.

Dans la première section de ce travail, nous avons fait, en nous plaçant à un point de vue macroscopique, une étude hydro-thermodynamique du schéma fluide envisagé. Nous avons déduit dans cette section le système fondamental de la magnéto-hydrodynamique anisotrope relativiste. Une étude mathématique de ce système a été faite dans le cas d'un modèle de fluide anisotrope polytropique. Le système fondamental d'évolution d'un tel fluide est susceptible de décrire un plasma anisotrope polytropique à collisions rares plongé dans un champ magnétique fort.

Dans la deuxième section, nous avons étudié, pour le modèle de fluide anisotrope polytropique envisagé, les variétés caractéristiques et la propagation des ondes. Trois types de variétés caractéristiques (ou ondes) ont été mis en évidence : les ondes d'entropie, les ondes magnéto-soniques et les ondes d'Alfvén. Les conditions que doivent satisfaire les quantités non dimensionnelles $\eta_{\perp}$ et $\eta_{//}$ pour que les vitesses de propagation des différentes ondes soient réelles ont été mises en lumière. Ces conditions impliquent l'absence d'instabilités dans le fluide. L'étude des cônes d'ondes a permis de mettre en lumière d'une part, certaines particularités de la propagation des ondes en magnéto-hydrodynamique anisotrope, d'autre part, le caractère d'hyperbolicité des opérateurs différentiels associés aux différentes ondes.

Les résultats obtenus montrent la cohérence interne de l'étude faite et surtout sa simplicité vis-à-vis de la théorie classique.

Un prochain article sera consacré à l'étude relativiste d'un fluide anisotrope arbitraire.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction de M. A. Lichnerowicz. Je tiens à lui expliquer toute ma profonde gratitude pour ses conseils et critiques qui m'ont guidé tout le long de ces recherches.

RÉFÉRENCES

- [1] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Paris, Masson, 1955.
- [2] J.-L. SYNGE, *Relativity: the special theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965.
- [3] PHAM MAU QUAN, *Thèse*, Paris, 1954 (Bologna Tipografica Azzoguidi, 1955).
- [4] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic hydrodynamics and magneto-hydrodynamics*, New York, Benjamin, 1967.
- [5] A. H. TAUB, *Phys. Rev.*, t. **74**, 1948, p. 328-334.
- [6] B. ABRAHAM SHRAUNER, *J. plasma phys.*, t. **1**, 1967, p. 361-381.
- [7] M. D. KARTALEV, *Soviet Physics Doklady*, vol. **17**, 1973, p. 744-746.
- [8] G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER and F. E. LOW, *Proc. Roy. Soc., A* **236**, 1956, p. 112-118.
- [9] A. LICHNEROWICZ, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **7**, 1967, p. 271-302.
- [10] A. LICHNEROWICZ, *Comm. Math. Phys.*, t. **12**, 1969, p. 145-174.
- [11] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Astron. Acta*, t. **6**, 1960, p. 354-365.
- [12] Y. KATO, M. TAJIRI and T. TANIUTI, *J. Phys. Soc. Japan*, t. **21**, 1967, p. 765-777.
- [13] R. LÜST, *Inst. Summer Course in Plasma Physics*, p. 201, 1960, Ed. by C. F. Wandel Danish A. E. C.
- [14] V. BORANOV et M. D. KARTALEV, *Ivestiya Akademii Nauk SSSR, mekhanika Zhidkosti i gaza*, t. **6**, 1970, p. 3.
- [15] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, Institute advanced Study Princeton, 1953, notes miméographiées.

(Manuscrit reçu le 17 juin 1974).