

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-GUY DUBOIS

JEAN-PAUL DUFOUR

La théorie des catastrophes. I. La machine à catastrophes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, n° 2 (1974), p. 113-134

[<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_2_113_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_2_113_0)

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La théorie des catastrophes.

I. La machine à catastrophes (*)

par

Jean-Guy DUBOIS et Jean-Paul DUFOUR ()**Département des Sciences Pures,
Université du Québec, Rimouski, P. Qué., Canada

RÉSUMÉ. — Nous présentons un modèle physique tiré de la mécanique de l'élasticité, la machine à catastrophes de E. C. Zeeman, qui illustre bien la théorie des catastrophes de R. Thom. Ce système est décrit par une dynamique de type gradient contrôlée localement par $\mathbb{R}^2$. Le contour apparent, dans l'espace de contrôle, des discontinuités d'état de ce système décrit localement une morphologie cuspidée, l'une des morphologies archétypes données par la classification de Thom des ensembles catastrophes. Nous montrons explicitement, pour ce cas particulier, qu'il existe un difféomorphisme qui échange topologico-différentiellement la morphologie cuspidée locale de l'ensemble catastrophe de la machine avec celle du système canonique équivalent. Nous nous attardons finalement à quelques énoncés fondamentaux de la théorie des catastrophes.

SUMMARY. — We present a physical model based on mechanics of elasticity, the E. C. Zeeman's catastrophe machine, which is a good illustration of R. Thom's catastrophe theory. This system is described by a gradient dynamic locally controlled by $\mathbb{R}^2$. The appearing contour, in the control space, of the system's state discontinuities describes locally a cuspidal morphology, one of the archetypal morphologies given by Thom's catastrophe sets classification. We explicitly demonstrate, in this particular case, that there exists a diffeomorphism which topologico-

(*) Travail partiellement subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada.

(**) Présente adresse : Institut de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

differentially exchanges the local cuspidal morphology of this machine's catastrophe set with that of the equivalent canonical system. Finally, we consider some fundamental propositions of catastrophe theory.

1. INTRODUCTION

Pour les phénomènes naturels qui s'expliquent dans un contexte différentiel, les singularités que présentent les applications différentiables devraient se retrouver dans les modèles correspondants comme des archétypes soutenant les composantes significatives de ceux-ci. Dans la terminologie de René Thom [1], lorsque plusieurs actants agissent sur le même substrat, ils peuvent entrer en conflit, d'où la création de catastrophes (ou discontinuités d'état). Pour une dynamique de type gradient, un ensemble catastrophe correspond au contour apparent des singularités d'un champ de potentiels qui se déploie sur l'espace substrat. La théorie des catastrophes de René Thom [2], [3], qui provient de la théorie des singularités des applications différentiables [4], classe de façon exhaustive pour $\mathbb{R}^4$ les sept catastrophes élémentaires non topologico-différentiellement équivalentes qui se présentent pour les dynamiques localement engendrée par un gradient de potentiel. Cette théorie débouche ainsi sur l'étude mathématique des morphologies qui se manifestent dans l'espace-temps.

Une façon de nous familiariser avec cette théorie est de présenter un modèle physique qui l'illustre bien. De l'étude de la dynamique de la machine à catastrophes de E. C. Zeeman, nous induirons les données de base de celle-ci. Cet exemple est particulièrement bien choisi puisque le contour apparent, dans l'espace de contrôle de cette machine, de ses discontinuités d'état présente localement des morphologies cuspidées et que ce type simple de morphologie est justement fourni par la théorie des catastrophes.

2. DESCRIPTION ET FONCTIONNEMENT DE LA MACHINE

Pour illustrer ses conférences sur la théorie des catastrophes, le Professeur E. C. Zeeman [5] inventa un système physique qui tient de la mécanique de l'élasticité, système qu'il appela « machine à catastrophes ». Voici le mode d'emploi pour la construction et le fonctionnement de cette machine. A une tige mobile autour d'un point fixe A, sont attachés en B deux élastiques, de longueurs respectives α et β , dont l'extrémité de l'un est fixée en C, et de l'autre, mobile dans le plan. L'état du système,

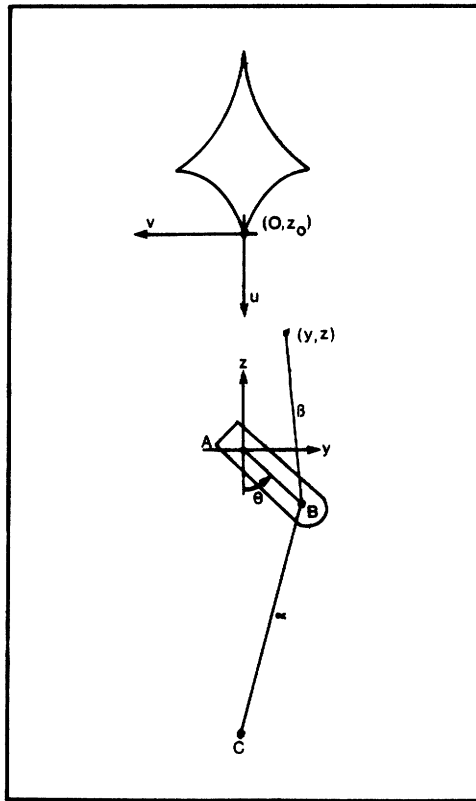


FIG. 1. — La machine à catastrophes.

l'angle θ de rotation de la tige, est contrôlé par le bout mobile de l'élastique β , dans ce sens qu'un contrôle (y, z) donné dans le plan implique un état θ du système.

Dans une région du plan, un contrôle fixé n'implique qu'un état d'équilibre stable possible du système ; tandis que dans une autre, il en détermine deux. Les frontières de ces domaines sont délimitées par l'astéroïde de la figure 1 : un état d'équilibre stable possible à l'extérieur de l'astéroïde et deux à l'intérieur. Lorsque les points de contrôle suivent un chemin transverse à l'axe- z , à la sortie de l'astéroïde, plus précisément à la branche opposée de la branche d'entrée, le système change brusquement d'état. C'est le contour apparent, dans le plan de contrôle, correspondant à ces discontinuités d'état ou catastrophes qui nous fournit les morphologies cuspidées locales de l'astéroïde. Il s'agit-là d'une morphologie archétype de la nature que nous retrouvons, entre autres, dans les ondes de choc de la dynamique des fluides et dans les caustiques de l'optique.

3. LE MODÈLE PHYSICO-MATHÉMATIQUE

L'étude de la dynamique de la machine à catastrophes nous introduira au cœur de la théorie des catastrophes. Cette dynamique est décrite à l'aide d'un espace de contrôle C , paramétré localement par $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, et d'un espace d'état, le cercle S^1 paramétré localement par $\theta \in \mathbb{R}$. Pour un contrôle fixé, le système adopte l'état d'équilibre qui minimise l'énergie potentielle V des élastiques tendus. Ce système est suffisamment dissipatif pour être décrit par une dynamique gradiente.

Considérons le cas particulier où $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = 3$ et où la longueur des élastiques relâchés est 1. Par la loi de Hooke,

$$V = \frac{k}{2}[(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2], \quad (1)$$

où α et β sont les longueurs des élastiques tendus et k le module d'élasticité. Les longueurs α et β dépendent des paramètres y, z et θ . Ainsi V est une fonction du produit de l'espace de contrôle C par l'espace d'état X dans $\mathbb{R}$, $V : C \times X \rightarrow \mathbb{R}$. En fait, nous n'avons pas une fonction potentielle, mais un champ de fonctions potentielles : à chaque couple de contrôle $(y, z) = c \in C$, correspond une fonction potentielle $V_c : X \rightarrow \mathbb{R}$. Pour un contrôle c fixé, les états d'équilibre stables possibles du système sont les $\theta \in X$ qui correspondent aux minima de V_c .

Il reste à lever une indétermination : quel est le minimum de V_c qu'adopte le système dans le cas où il s'en présente deux ? Nous en convenons par une convention dite « du retard parfait » : l'état d'équilibre stable du système correspond au minimum local de V_c jusqu'à destruction complète de celui-ci. Il y a donc conflit en c_0 lorsque le minimum correspondant à l'état d'équilibre est détruit par collision avec un maximum, c'est-à-dire si V_{c_0} présente une inflexion critique (horizontale) qui annihile le minimum de l'état. Le régime régnant en un point c dépend donc de l'histoire de ce point. Par exemple, si on parcourt une parallèle à l'axe- y dans le sens des y croissants, le régime local associé aux y en-deça de la branche de gauche de la cuspide subsistera, après qu'on aura pénétré à l'intérieur de celle-ci, jusqu'à la branche de droite qui est l'endroit où il se produira une discontinuité d'état. Tandis qu'il ne se produira aucun saut d'état si on traverse l'astéroïde selon une parallèle à l'axe- z .

Que la convention du retard parfait s'applique à la dynamique de la machine à catastrophes repose évidemment sur une notion de stabilité. En fait, sur une notion de stabilité due à Ljapunov : un système est asymptotiquement stable si, après une perturbation suffisamment petite, il tend à revenir à son état d'équilibre. Ainsi, pour un contrôle fixé à l'intérieur de l'astéroïde, une perturbation de l'état d'équilibre (en appliquant, par

exemple, une force instantanée au point B de la tige AB) qui n'est pas assez grande pour vaincre la barrière de potentiel qui sépare le minimum de l'état d'équilibre actuel du minimum de l'état d'équilibre possible ne produira pas de catastrophes d'état.

4. LE MODÈLE CANONIQUE ÉQUIVALENT

Nous nous restreindrons à une étude locale du champ de potentiels, c'est-à-dire à un domaine de contrôle au voisinage du point cuspidé (point de rebroussement de première espèce) $(0, z_0)$ tel que l'état θ soit suffisamment petit pour développer en série la fonction potentielle correspondante autour de $\theta = 0$. Remarquons que la composante $y = 0$ de ce point cuspidé nous est donnée par la symétrie du système. Une étude semblable pourrait être menée au voisinage du point cuspidé symétriquement opposé.

Exprimons d'abord α et β en fonction de y , z et θ : comme

$$B = (\overline{AB} \sin \theta, -\overline{AB} \cos \theta) \quad \text{et} \quad C = (0, -\overline{AC}),$$

$$\alpha = [\overline{AB}^2 \sin^2 \theta + (\overline{AB} \cos \theta - \overline{AC})^2]^{1/2} \quad (2a)$$

$$= (10 - 6 \cos \theta)^{1/2}, \quad (2b)$$

$$\beta = [(y - \overline{AB} \sin \theta)^2 + (z + \overline{AB} \cos \theta)^2]^{1/2} \quad (3a)$$

$$= (1 + y^2 + z^2 - 2y \sin \theta + 2z \cos \theta)^{1/2} \quad (3b)$$

dans le cas particulier où $\overline{AB} = 1$ et $\overline{AC} = 3$. En substituant dans (1), nous obtenons une expression pour $V_{(y,z)}(\theta)$. Par un développement en série de Taylor de $V_{(y,z)}(\theta)$ autour de $\theta = 0$, nous avons

$$V_{(y,z)}(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + \dots + a_i\theta^i + \dots, \quad (4a)$$

où

$$a_0 = \frac{k}{2}(a - 2a^{1/2} + 2), \quad (4b)$$

$$a_1 = k(a^{-1/2} - 1)y, \quad (4c)$$

$$a_2 = \frac{k}{2} \left[\frac{3}{2} + a^{3/2}y^2 + (a^{-1/2} - 1)z \right], \quad (4d)$$

$$a_3 = \frac{k}{2} \left[\frac{(1 - a^{-1/2})}{3} y + a^{-5/2}y^3 + a^{-3/2}yz \right], \quad (4e)$$

$$a_4 = \frac{k}{2} \left[\frac{5}{32} - \frac{a^{-3/2}}{3} y^2 + \frac{5}{4} a^{-7/2} y^4 + \frac{3}{2} a^{-5/2} y^2 z \right. \\ \left. + \frac{(1 - a^{-1/2})}{12} z + \frac{a^{-3/2}}{4} z^2 \right], \quad (4f)$$

$$a_i = a_i(y, z), \quad (4g)$$

avec $a = y^2 + (1 + z)^2$. Notons que $a \neq 0$ pour $(y, z) \neq (0, -1)$. Par conséquent, le point $(0, -1)$ ne doit pas être compris dans le domaine de contrôle considéré. De toute façon, ce point n'est pas physiquement un point de contrôle, comme tous les points du disque de rayon unité centré en $(0, -\overline{AB})$.

Déterminons la valeur des coefficients a_i au point cuspidé $(0, z_0)$. Indiquons d'abord la condition qui détermine la composante z_0 de ce point. Sous les hypothèses énoncées plus haut, c'est-à-dire qu'un point de contrôle est un point catastrophe possible si V_{c_0} présente un point critique dégénéré, et par le fait qu'au point cuspidé choisi $\theta = 0$, cette condition est comprise dans la relation

$$\frac{\partial^2 V_{(0, z_0)}}{\partial \theta^2}(0) = 0. \quad (5a)$$

Ceci implique que

$$2z_0^2 - 3z_0 - 3 = 0. \quad (5b)$$

La composante z_0 du point cuspidé correspond à la racine positive

$$z_0 = (3 + \sqrt{33})/4$$

de (5b). Ainsi, au point cuspidé, $a = (1 + z_0)^2$ et

$$a_0 = \frac{k}{2}(1 + z_0^2) \neq 0, \quad (6a)$$

$$a_1 = 0, \quad (6b)$$

$$a_2 = \frac{k}{4} \left(\frac{3 + 3z_0 - 2z_0^2}{1 + z_0} \right) = 0, \quad (6c)$$

$$a_3 = 0, \quad (6d)$$

$$a_4 = \frac{k}{2} \left[\frac{5}{32} + \frac{z_0^2(4 + 2z_0 + z_0^2)}{12(1 + z_0)^3} \right] \neq 0, \quad (6e)$$

$$a_i = a_i(0, z_0). \quad (6f)$$

Le but que nous poursuivons est de réduire, sans changer qualitativement la dynamique de notre système, l'expression de $V_{(y,z)}(\theta)$ à une forme canonique simple. Les transformations et l'approximation utilisées seront justifiées par après. Par une transformation linéaire sur θ , il est possible d'éliminer le terme du troisième ordre et de réduire le coefficient du terme du quatrième ordre à une constante dans (4a). Soit

$$\theta = \left(\frac{1}{4a_4} \right)^{1/4} x - \frac{a_3}{4a_4}; \quad (7)$$

alors

$$\begin{aligned} V_{(y,z)}^1(x) &= V_{(y,z)}(\theta) \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx + V_{(y,z)}\left(-\frac{a_3}{4a_4}\right) + w_1x^5 + \dots + w_{n-4}x^n + \dots, \end{aligned} \quad (8a)$$

où

$$u = \left(\frac{1}{a_4}\right)^{1/2} \left(a_2 - \frac{3a_3^2}{8a_4}\right), \quad (8b)$$

$$v = \left(\frac{1}{4a_4}\right)^{1/4} \left(a_1 - \frac{a_2a_3}{2a_4} + \frac{a_3^3}{8a_4^2}\right), \quad (8c)$$

$$w_{n-4} = w_{n-4}(y, z), \quad n \geq 5. \quad (8d)$$

Nous éliminons les termes indépendants de x par une translation sur les valeurs de la fonction potentielle :

$$V_{(y,z)}^2(x) = V_{(y,z)}^1(x) - V_{(y,z)}\left(-\frac{a_3}{4a_4}\right) \quad (9a)$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx + w_1x^5 + \dots + w_{n-4}x^n + \dots, \quad (9b)$$

où $u = u(y, z)$, $v = v(y, z)$, $w_{n-4} = w_{n-4}(y, z)$. La transformation

$$h : (y, z) \mapsto (h_1(y, z), h_2(y, z)) = (u, v)$$

déterminée par (8b, c) est localement un difféomorphisme puisqu'elle est localement de classe C^∞ et que son jacobien $J(h)$ en $(0, z_0)$ est non-nul (théorème de la fonction inverse (A) (*)) :

$$J(h)(0, z_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y}(0, z_0) & \frac{\partial h_1}{\partial z}(0, z_0) \\ \frac{\partial h_2}{\partial y}(0, z_0) & \frac{\partial h_2}{\partial z}(0, z_0) \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$= -\frac{k^2 z_0^2 (2 + z_0)}{(1 + z_0)^3 [4a_4(0, z_0)]^{3/4}} \neq 0. \quad (10b)$$

Ainsi il existe un ouvert autour de $(0, z_0)$ où y et z peuvent s'exprimer comme fonction (de classe C^∞) de u et v . Sur cet ouvert, $V_{(y,z)}^2(x) = V_{(u,v)}^3(x)$, où

$$V_{(u,v)}^3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx + \tilde{w}_1x^5 + \dots + \tilde{w}_{n-4}x^n + \dots, \quad (11)$$

avec $\tilde{w}_{n-4} = \tilde{w}_{n-4}(u, v)$. Au lieu de parcourir localement dans l'espace de contrôle l'indice c du champ des fonctions potentielles à l'aide des variables y et z , nous le ferons par les variables u et v . Nous obtenons finalement une forme canonique pour le champ des fonctions potentielles en tronquant la série (11) au quatrième ordre en x :

$$V_{(u,v)}^4(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx. \quad (12)$$

(*) (A) réfère à l'appendice.

Les états d'équilibre stables possibles du système canonique sont donnés par les $x \in \mathbb{R}$ qui rendent $V_{(u,v)}^4$ minimum. Nous les retrouvons donc dans l'ensemble des points critiques de $V_{(u,v)}^4$, c'est-à-dire dans

$$\{ x \in \mathbb{R} ; \partial V_{(u,v)}^4(x)/\partial x = 0 \}.$$

Lorsque nous parcourons l'espace de contrôle, la famille de ces points forme une surface $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ paramétrise localement $C \times X$) donnée par

$$M = \{ (u, v, x) \in \mathbb{R}^3 ; x^3 + ux + v = 0 \}. \quad (13)$$

Le graphe de cette surface est tracé à la figure 2.

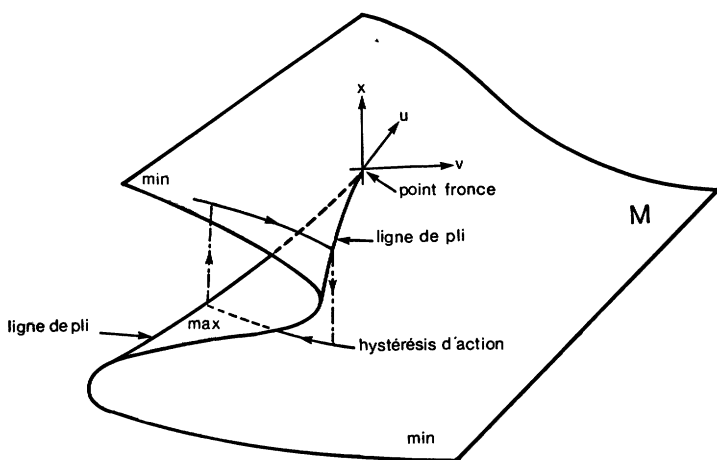


FIG. 2. — La surface des points critiques.

Explorons le champ des fonctions potentielles $V_{(u,v)}^4$. Le discriminant de la cubique (13) est donné par

$$\frac{\partial V_{(u,v)}^4}{\partial x}(x) = \frac{\partial^2 V_{(u,v)}^4}{\partial x^2}(x) = 0, \quad (14a)$$

c'est-à-dire par

$$x^3 + ux + v = 0, \quad (14b)$$

$$3x^2 + u = 0. \quad (14c)$$

En éliminant x de (14b) et de (14c), on obtient la parabole semi-cubique

$$4u^3 + 27v^2 = 0. \quad (15)$$

Elle n'est autre que la projection dans le plan de contrôle de l'ensemble des points critiques dégénérés des fonctions $V_{(u,v)}^4$, c'est-à-dire des lignes de pli et du point fronce de la surface M auxquels correspondent respec-

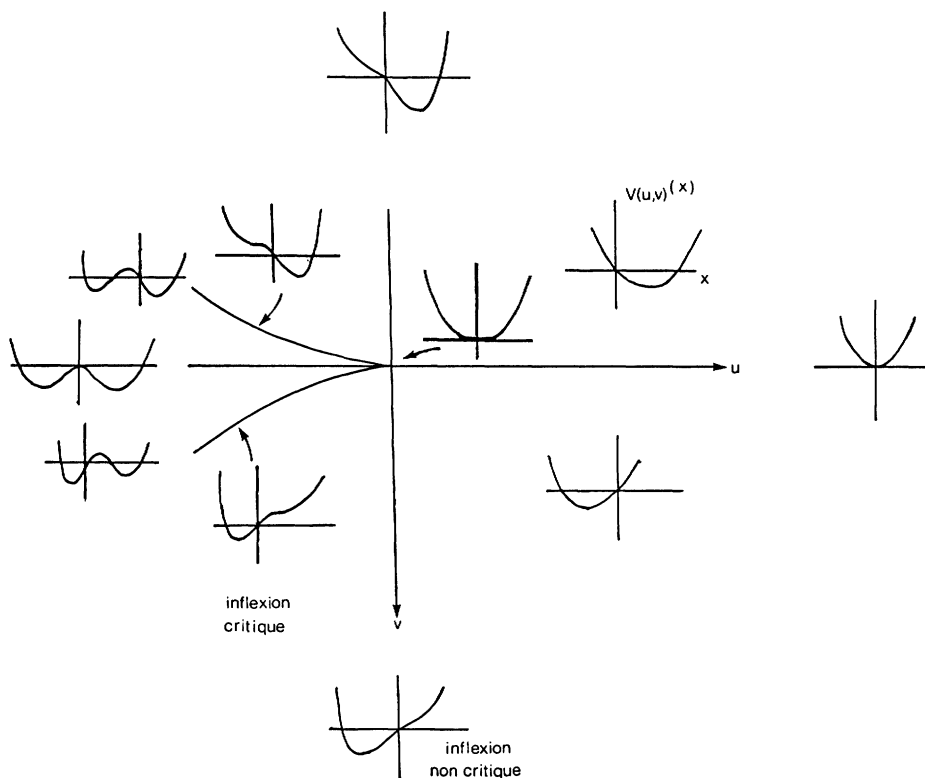


FIG. 3. — Ensemble catastrophe et champ des fonctions potentielles.

tivement les branches de la parabole semi-cubique et son point cuspidé. Insistons sur les faits qu'à l'intérieur de celle-ci, c'est-à-dire pour

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 < 0\},$$

$V_{(u,v)}^4$ présente deux minima et un maximum; qu'à l'extérieur, c'est-à-dire pour $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 > 0\}$, $V_{(u,v)}^4$ ne présente qu'un minimum; et pour $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0, u < 0\}$, $V_{(u,v)}^4$ possède un minimum et une inflexion critique. Les résultats de notre exploration sont illustrés par la figure 3.

Si on parcourt une parallèle à l'axe- v , $u = -u_0^2$, dans le sens des v croissants, le régime local associé aux v en-deça de la branche d'entrée de la parabole semi-cubique subsistera jusqu'à la branche de sortie de celle-ci. Dans l'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, nous parcourons alors la branche supérieure de l'hystérésis d'action de la figure 2. Sous la convention du retard parfait, rendu à la ligne de pli, l'état chute à la feuille inférieure de M : c'est ici que se situe la catastrophe ou discontinuité d'état. L'hystérésis d'action

est complétée par le parcours inverse. Le contour apparent (l'ensemble catastrophe) dans C de ces discontinuités d'état est ainsi localement donné par la parabole semi-cubique (15).

Une question fondamentale du point de vue de la théorie des catastrophes se pose ici. D'où vient que les transformations de $V_{(y,z)}(\theta)$ et l'approximation subséquente du quatrième ordre nous fournissent toujours une morphologie cuspidée ? Cette invariance topologico-différentielle de l'ensemble catastrophe provient d'une équivalence « entre les fonctions potentielles considérées ».

5. DÉMONSTRATION DE L'ÉQUIVALENCE

Soient f et g deux applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

DÉFINITION 1. — Les applications f et g sont équivalentes, $f \sim g$, s'il existe deux difféomorphismes h et k de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ respectivement tels que $k \circ f = g \circ h$. Ce qui revient à dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m. \end{array}$$

DÉFINITION 2. — Les applications f et g sont localement équivalentes au voisinage de $x \in \mathbb{R}^n$ et $x' \in \mathbb{R}^n$, $f, x \sim g, x'$, s'il existe des voisinages ouverts U de x et U' de x' tels que les restrictions de f à U et de g à U' soient équivalentes, c'est-à-dire tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ U' & \xrightarrow{g} & g(U'), \end{array}$$

où h est un difféomorphisme qui envoie x sur x' et k est la restriction à $f(U)$ d'un difféomorphisme local.

Illustrons cette définition de l'équivalence locale entre deux fonctions en l'appliquant aux cas de

$$\tilde{V} : U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : (y, z, \theta) \mapsto (y, z, V_{(y,z)}(\theta))$$

et

$$\tilde{V}^3 : V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : (u, v, x) \mapsto (u, v, V_{(u,v)}^3(x)).$$

On vérifie d'abord que $\tilde{V}$ est localement équivalente à

$$\tilde{V}^2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : (y, z, x) \mapsto (y, z, V_{(y,z)}^2(x)),$$

c'est-à-dire que $\tilde{V}, (0, z_0, 0) \sim \tilde{V}^2, (0, z_0, 0)$:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\tilde{V}} & \tilde{V}(U_1) \\ \downarrow H_1 & & \downarrow K_1 \\ U_2 & \xrightarrow{\tilde{V}_2} & \tilde{V}^2(U_2), \end{array} \quad (16)$$

où $H_1(y, z, \theta) = (y, z, x)$, avec x donné par l'éq. (7), et où $K_1(y, z, t) = (y, z, t')$ avec $t' = t - V_{(y,z)} \left(-\frac{a_3}{4a_4} \right)$. Il existe un ouvert $U_1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, contenant le point $(0, z_0, 0)$, sur lequel H_1 est un difféomorphisme puisque son jacobien $J(H_1)$ en ce point est non-nul :

$$J(H_1)(0, z_0, 0) = 4[a_4(0, z_0)]^{1/4} \neq 0. \quad (17)$$

Il en est ainsi de K_1 sur $\tilde{V}(U_1) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ puisque

$$J(K_1) = 1 \quad (18)$$

pour tout $(y, z, t) \in \mathbb{R}^3$. Il reste à vérifier que $\tilde{V}^2$ est localement équivalente à $\tilde{V}^3$, c'est-à-dire que $\tilde{V}^2, (0, z_0, 0) \sim \tilde{V}^3, (0, 0, 0)$:

$$\begin{array}{ccc} U_3 & \xrightarrow{\tilde{V}^2} & \tilde{V}^2(U_3) \\ \downarrow H_2 & & \downarrow K_2 \\ U_4 & \xrightarrow{\tilde{V}^3} & \tilde{V}^3(U_4), \end{array} \quad (19)$$

où $H_2(y, z, x) = (u, v, x)$, $K_2(y, z, t') = (u, v, t')$, avec u et v donnés par les éq. (8b) et (8c). Les applications H_2 et K_2 sont respectivement des difféomorphismes sur $U_3 \subset U_2$ et un voisinage de $\tilde{V}^2(U_3)$:

$$J(H_2)(0, z_0, x) = J(K_2)(0, z_0, t') = J(h)(0, z_0) \neq 0 \quad (20)$$

pour tout x et t' , où $J(h)(0, z_0)$ est donné par (10a, b). Puisque

$$\tilde{V}, (0, z_0, 0) \sim \tilde{V}^2, (0, z_0, 0) \quad \text{et} \quad \tilde{V}^2, (0, z_0, 0) \sim \tilde{V}^3, (0, 0, 0),$$

il existe un ouvert $U \subset U_1$ tel que $\tilde{V}, (0, z_0, 0) \sim \tilde{V}^3, (0, 0, 0)$:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{V}} & \tilde{V}(U) \\ \downarrow H = H_2 \circ H_1 & & \downarrow K = K_2 \circ K_1 \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{V}^3} & \tilde{V}^3(\tilde{V}), \end{array} \quad (21)$$

où

$$H(y, z, \theta) = (h_1(y, z, \theta), h_2(y, z, \theta), h_3(y, z, \theta)) = (u, v, x)$$

et

$$K(y, z, t) = (k_1(y, z, t), k_2(y, z, t), k_3(y, z, t)) = (u, v, t').$$

Montrons que $h : (y, z) \mapsto (u, v)$ donné par les éq. (8b, c) est le difféo-

morphisme local de $\mathbb{R}^2, (0, z_0)$ dans $\mathbb{R}^2, (0, 0)$ qui échange les ensembles catastrophes de V et V^3 . L'ensemble catastrophe de V est défini par l'ensemble des (y, z) qui satisfont à

$$\frac{\partial V_{(y,z)}}{\partial \theta}(\theta) = \frac{\partial^2 V_{(y,z)}}{\partial \theta^2}(\theta) = 0. \quad (22)$$

Il s'agit d'abord de dériver une première fois

$$V_{(u,v)}^3(x) = k_3(y, z, V_{(y,z)}(\theta)) \quad (23)$$

par rapport à θ :

$$\frac{\partial V_{(u,v)}^3}{\partial x}(x) \frac{\partial h_3}{\partial \theta}(y, z, \theta) = \frac{\partial k_3}{\partial t}(y, z, t) \frac{\partial V_{(y,z)}}{\partial \theta}(\theta) = 0 \quad (24)$$

par (22). Puisque H est un difféomorphisme,

$$J(H)(y, z, \theta) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y}(y, z, \theta) & \frac{\partial h_1}{\partial z}(y, z, \theta) & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial y}(y, z, \theta) & \frac{\partial h_2}{\partial z}(y, z, \theta) & 0 \\ \frac{\partial h_3}{\partial y}(y, z, \theta) & \frac{\partial h_3}{\partial z}(y, z, \theta) & \frac{\partial h_3}{\partial \theta}(y, z, \theta) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (25)$$

et par conséquent

$$\frac{\partial h_3}{\partial \theta}(y, z, \theta) \neq 0; \quad (26)$$

d'où

$$\frac{\partial V_{(u,v)}^3}{\partial x}(x) = 0. \quad (27)$$

Dérivons maintenant une autre fois (23) par rapport à θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_{(u,v)}^3}{\partial x^2}(x) \left[\frac{\partial h_3}{\partial \theta}(y, z, \theta) \right]^2 + \frac{\partial V_{(u,v)}^3}{\partial x}(x) \frac{\partial^2 h_3}{\partial \theta^2}(y, z, \theta) \\ = \frac{\partial^2 k_3}{\partial t^2}(y, z, t) \left[\frac{\partial V_{(y,z)}}{\partial \theta}(\theta) \right]^2 + \frac{\partial k_3}{\partial t}(y, z, t) \frac{\partial^2 V_{(y,z)}}{\partial \theta^2}(\theta). \end{aligned} \quad (28)$$

De (22), (26) et (27), on obtient que

$$\frac{\partial^2 V_{(u,v)}^3}{\partial x^2}(x) = 0. \quad (29)$$

Donc si (22) détermine les conditions pour que (y, z) appartienne à l'ensemble catastrophe de V , alors (27) et (29) déterminent celles pour que

$$h(y, z) = (u, v)$$

appartienne à celui de V^3 . Puisque H est un difféomorphisme, la réciproque se démontre de façon analogue.

Afin de montrer que l'approximation (12) du quatrième ordre en x de $V_{(u,v)}^3(x)$ ne change pas qualitativement la dynamique de notre système, dans le sens qu'elle est suffisante pour nous fournir topologico-différentiellement les mêmes morphologies locales, démontrons qu'il existe un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$, 0 dans $\mathbb{R}^2$, 0 qui échange les ensembles catastrophes de V^3 et V^4 .

Puisque

$$\frac{\partial^2 V^3}{\partial v \partial x}(0) = 1, \quad (30)$$

par le théorème de la fonction implicite (A), l'équation (27) est équivalente sur un voisinage ouvert de $(u, v, x) = 0$ à

$$v = -p(u, x), \quad (31)$$

où p est une application de classe C^∞ avec $p(0) = 0$ (le signe $-$ est introduit par convenance). Comme de plus

$$\frac{\partial p}{\partial x}(u, x) = \frac{\partial^2 V^3}{\partial x^2}(u, v, x) / \frac{\partial^2 V^3}{\partial v \partial x}(u, v, x), \quad (32)$$

on vérifie que

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(0) = 0 \neq \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}(0) \quad (33a)$$

et

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial x}(0) \neq 0. \quad (33b)$$

Les relations (33a, b) permettent de montrer que les applications :

$$\tilde{p} : (u, x) \mapsto (u, p(u, x)) \quad \text{et} \quad \tilde{P} : (u, x) \mapsto (u, P(u, x)),$$

où $P(u, x) = x^3 + ux$, d'ouverts U et U' de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont localement équivalentes en 0 . Pour cela posons

$$f(x, u, y) = p(u, x) - y, \quad y \in \mathbb{R}; \quad (34)$$

ainsi

$$f(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = 0 \neq \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0). \quad (35)$$

Par le théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange (A),

$$p(u, x) - y = g(x, u, y)[x^3 + g_1(u, y)x^2 + g_2(u, y)x + g_3(u, y)], \quad (36)$$

où g et les g_i , $i = 1, 2, 3$, sont des applications de classe C^∞ respectivement d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, avec $g(0) \neq 0$. On vérifie que les conditions (35) impliquent que

$$g_i(0) = 0, \quad (37)$$

$i = 1, 2, 3$. Prenant $y = p(u, x)$, on peut écrire sur un voisinage ouvert de $(u, x) = 0$ (puisque g est continue) que

$$x^3 + g_1(u, p(u, x))x^2 + g_2(u, p(u, x))x + g_3(u, p(u, x)) = 0. \quad (38)$$

Soient

$$h'(u, x) = x + \frac{1}{3}g_1(u, p(u, x)), \quad (39a)$$

$$h''(u, x) = g_2(u, p(u, x)) - [g_1(u, p(u, x))]^2, \quad (39b)$$

$$k'(u, y) = \frac{1}{3}g_1(u, y)g_2(u, y) - \frac{2}{27}[g_1(u, y)]^3 - g_3(u, y), \quad (39c)$$

$$k''(u, y) = g_2(u, y) - [g_1(u, y)]^2. \quad (39d)$$

Alors l'éq. (38) s'écrit

$$k'(u, p(u, x)) = [h'(u, x)]^3 + h''(u, x)h'(u, x). \quad (40)$$

De plus, on a ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U, 0 & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{p}(U), 0 \\ \downarrow \mathcal{H} & & \downarrow \mathcal{K} \\ U', 0 & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{p}(U'), 0. \end{array} \quad (41)$$

où $\mathcal{H}(u, x) = (h''(u, x), h'(u, x))$ et $\mathcal{K}(u, y) = (k''(u, y), k'(u, y))$ sont des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^2, 0$ dans $\mathbb{R}^2, 0$. Pour vérifier que $\mathcal{H}$ est un difféomorphisme, il suffit de montrer que son jacobien en $(u, x) = 0$ est non-nul, donc que

$$J(\mathcal{H})(0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h''}{\partial u}(0) & \frac{\partial h''}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial h'}{\partial u}(0) & \frac{\partial h'}{\partial x}(0) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (42a)$$

C'est le cas, puisque l'on vérifie directement que

$$\frac{\partial h'}{\partial x}(0) = 1, \quad (42b)$$

$$\frac{\partial h''}{\partial x}(0) = 0 \quad (42c)$$

et que l'on peut montrer, de la façon qui suit, que

$$\frac{\partial h''}{\partial u}(0) \neq 0. \quad (42d)$$

Pour cela, on explicite (42d) :

$$\frac{\partial h''}{\partial u}(0) = \frac{\partial g_2}{\partial u}(0) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(0) \frac{\partial p}{\partial p}(0). \quad (43)$$

On peut d'abord supposer que

$$\frac{\partial p}{\partial u}(0) = 0, \quad (44)$$

car si cela n'était pas on aurait $\tilde{p}, 0 \sim \tilde{p}', 0$, où

$$p'(u, x) = p(u, x) - u \frac{\partial p}{\partial u}(0); \quad (45)$$

l'équivalence est donnée par $\mathcal{H}'$, qui est l'identité, et par

$$\mathcal{H}''(u, y) = \left(u, y - u \frac{\partial p}{\partial u}(0) \right). \quad (46)$$

Pour p' on a la condition voulue $\frac{\partial p'}{\partial u}(0) = 0$, et p vérifie (33a, b) si et seulement si p' le fait. Montrons maintenant que

$$\frac{\partial g_2}{\partial u}(0) \neq 0. \quad (47)$$

Prenant la dérivée par rapport à u au point $(x, u, y) = 0$ des deux membres de (36), on a

$$\frac{\partial p}{\partial u}(0) = g(0) \frac{\partial g_3}{\partial u}(0) = 0 \quad (48a)$$

par (44). D'où, puisque $g(0) \neq 0$,

$$\frac{\partial g_3}{\partial u}(0) = 0. \quad (48b)$$

Ainsi si l'on prend maintenant les dérivées successives par rapport à x et u au point $(x, u, y) = 0$, on obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial x}(0) = g(0) \frac{\partial g^2}{\partial u}(0) \neq 0 \quad (49)$$

par (33b); d'où le résultat (47). Par conséquent, la relation (42d) est vérifiée. On montre de façon analogue que $\mathcal{H}$ est un difféomorphisme : puisque

$$\frac{\partial k'}{\partial u}(0) = - \frac{\partial g_3}{\partial u}(0) = 0 \quad (50)$$

par (39c) et (48b), que

$$\frac{\partial k''}{\partial u}(0) = \frac{\partial h''}{\partial u}(0) \neq 0 \quad (51)$$

par (39b, d) et (42d), que

$$\frac{\partial k'}{\partial y}(0) = - \frac{\partial g_3}{\partial y}(0) = \frac{1}{g(0)} \neq 0 \quad (52)$$

par (39c) et en dérivant par rapport à y au point $(x, u, y) = 0$ les deux membres de (36), le jacobien $J(\mathcal{K})(0)$ de $\mathcal{K}$ au point $(u, y) = 0$ est non-nul.

Le difféomorphisme local $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^2, 0$ dans $\mathbb{R}^2, 0$ échange les valeurs critiques de $\tilde{p}$ et $\tilde{P}$ puisque, par la commutativité du diagramme (41), $(u, y) = \tilde{p}(u, x)$ est une valeur critique de $\tilde{p}$ si et seulement si $\mathcal{K}(u, y)$ est une valeur critique de $\tilde{P}$. Puisque

$$J(\tilde{P})(u, x) = 3x^2 + u, \quad (53)$$

les valeurs critiques de $\tilde{P}$ sont déterminées par les équations

$$3x^2 + u = 0, \quad (54a)$$

$$x^3 + ux + v = 0 \quad (54b)$$

qui nous fournissent justement l'ensemble catastrophe de V^4 .

Pour atteindre le but proposé, il reste à montrer que les valeurs critiques de $\tilde{p}$ correspondent à l'ensemble catastrophe de V^3 . Cherchons donc les valeurs critiques de $\tilde{p}$. Puisque

$$J(\tilde{p})(u, x) = \frac{\partial p}{\partial x}(u, x) \quad (55)$$

est donné par (32), alors (u, x) est un point critique de $\tilde{p}$ si et seulement si

$$\frac{\partial^2 V^3}{\partial x^2}(u, -p(u, x), x) = 0. \quad (56)$$

La valeur critique $(u, -v)$ correspondante est telle que

$$\frac{\partial V^3}{\partial x}(u, v, x) = \frac{\partial^2 V^3}{\partial x^2}(u, v, x) = 0. \quad (57)$$

C'est dire que $(u, -v)$ est une valeur critique de $\tilde{p}$ si et seulement si (u, v) est un point catastrophe de V^3 .

Nous avons donc montré que $I \circ \mathcal{K} \circ h$, où $I : (u, v) \mapsto (u, -v)$, est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2, (0, z_0)$ dans $\mathbb{R}^2, (0, 0)$ qui échange les ensembles catastrophes de V et V^4 . Or c'est justement une propriété des difféomorphismes de conserver topologico-différentiellement une forme, en ce sens qu'un difféomorphisme n'éliminera pas les singularités d'une morphologie et n'en introduira pas de nouvelles. On peut facilement le vérifier sur la morphologie cuspidée (15). Cette courbe peut se paramétrer de la façon suivante :

$$v(t) = (u(t), v(t)) = (-3t^2, 2t^3). \quad (58)$$

Elle possède comme singularité un point de rebroussement de première espèce en $(0, 0)$ qui est caractérisé par les dérivées jusqu'au troisième ordre de v à $t = 0$: $v^{(1)}(0) = 0$, $v^{(2)}(0) \neq 0$ et $v^{(3)}(0)$ non colinéaire à $v^{(2)}(0)$. On montre directement que si δ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$, la courbe

$$v_\delta(t) = \delta(v(t)) = (\delta_1(u, v), \delta_2(u, v)) \quad (59)$$

est caractérisée de la même façon :

$$v_{\delta}^{(1)}(0) = 0, \quad (60a)$$

$$v_{\delta}^{(2)}(0) = \left(-6 \frac{\partial \delta_1}{\partial u}(0), -6 \frac{\partial \delta_2}{\partial u}(0) \right) \neq 0 \quad (60b)$$

et

$$v_{\delta}^{(3)}(0) = \left(12 \frac{\partial \delta_1}{\partial v}(0), 12 \frac{\partial \delta_2}{\partial v}(0) \right) \quad (60c)$$

non colinéaire à $v_{\delta}^{(2)}(0)$, puisque $J(\delta)(0) \neq 0$. Nous avons finalement justifié nos hypothèses de départ : que la loi de Hooke, sous la convention du retard parfait, nous fournit pour la machine à catastrophes un ensemble catastrophe qui est localement cuspidé.

6. CLASSIFICATION DES SYSTÈMES GRADIENTS

Proposons le modèle suivant pour un système qui se conforme à une dynamique gradient. Un tel système peut se décrire à l'aide d'une variété de contrôle C (espace des variables externes) de dimension 4 et d'une variété d'état X (espace des variables internes) de dimension n : un contrôle fixé $c \in C$ impliquant au moins un état d'équilibre $x \in X$. Localement, la dynamique du système est décrite à l'aide d'une famille de champs de vecteurs $(X_c)_{c \in \mathbb{R}^4}$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ qui dérivent de potentiels V_c par l'intermédiaire d'un gradient. Autrement dit,

$$X_c(x) = -\text{grad}_x V_c(x), \quad (61)$$

$x \in U \subset \mathbb{R}^n$, pour un c fixé dans un ouvert de $\mathbb{R}^4$. Nous réduisons l'étude du champ $x \mapsto X_c(x)$ à l'étude de la fonction potentielle $V_c : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$. La correspondance $c \mapsto V_c$ qui définit un champ de fonctions potentielles est supposée continue : si c' est proche de c , $V_{c'}$ sera proche de V_c en un sens qu'il reste à préciser [6].

Pour un contrôle fixé c , les états d'équilibre stables possibles du système sont les $x \in \mathbb{R}^n$ qui rendent V_c minimum ; ils sont donc compris dans l'ensemble des points critiques de V_c , c'est-à-dire dans

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \text{grad}_x V_c(x) = 0\}. \quad (62)$$

Les minima de V_c correspondent aux attracteurs du champ de vecteurs associé. Dans l'exemple du système canonique de la machine à catastrophes, pour $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 < 0\}$, il existe deux attracteurs dans $\mathbb{R}$ dont les bassins d'attraction (délimités par un point) sont deux demi-droites. Nous en donnons une illustration par la figure 4, dans le cas où $v < 0$. Pour $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0, u < 0\}$, le champ de vecteurs change de nature topologique, il y a bifurcation : passage d'un attracteur à

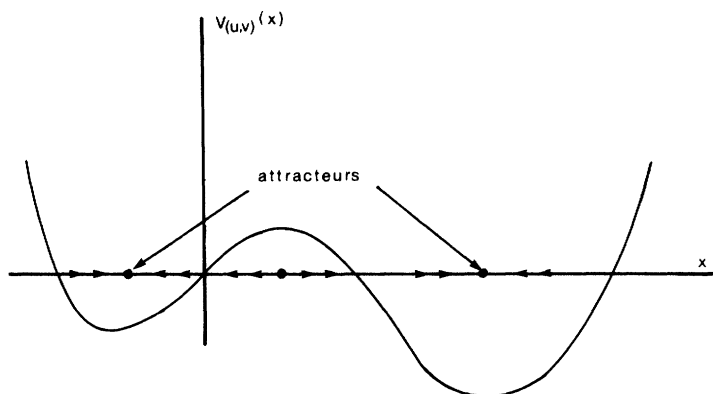


FIG. 4. — Interprétation en termes de champ de vecteurs.

deux attracteurs ou réciproquement, selon que l'on entre ou sort respectivement de la figure cuspidée.

Suivant le système étudié, une règle permet de préciser lequel des minima de V_c détermine effectivement l'état du système. L'une de ces règles peut être celle adoptée lors de l'étude de la dynamique de la machine à catastrophes, la convention du retard parfait. Sous cette convention, l'ensemble catastrophe, dont les points sont dits des points catastrophes de bifurcation, est compris dans les points de contrôle $c \in \mathbb{R}^4$ pour lesquels V_c présente un point critique dégénéré, c'est-à-dire dans

$$\{ c \in \mathbb{R}^4 ; \text{grad}_x V_c(x) = H(V_c)(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \}, \quad (63a)$$

où $H(V_c)(x)$ est le hessien de V_c en x ,

$$H(V_c)(x) = \det \left(\frac{\partial^2 V_c}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,2,\dots,n}. \quad (63b)$$

Une autre règle peut être la convention de Maxwell : l'état du système est celui qui correspond au minimum le plus bas. Cette convention s'applique, par exemple, aux transitions de phase du premier ordre en thermodynamique. Sous la convention de Maxwell, deux types de catastrophes peuvent se produire : ou bien, lorsque c varie, le minimum le plus bas de V_c est détruit en c_0 , ou bien les deux minima les plus bas ont des valeurs identiques en c_0 . Dans les deux cas, le système peut changer brusquement d'état quand le contrôle varie au voisinage de c_0 . Pour le premier, on dit que c_0 est un point catastrophe de bifurcation ; pour le deuxième, que c_0 est un point catastrophe de conflit.

Nous nous attarderons pour terminer à la classification des champs de potentiels canoniques régissant les dynamiques gradients contrôlées

localement par $\mathbb{R}^4$. Nous nous limiterons à quelques énoncés fondamentaux, renvoyant le lecteur à notre article [6] pour une étude détaillée.

Soit $V : (c, x) \mapsto V_c(x)$ une application de classe C^∞ d'un ouvert de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Par la suite, la lettre V , avec ou sans indices, désignera une telle fonction. A V on associe l'application $\tilde{V} : (c, x) \mapsto (c, V_c(x))$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$. Soient les formes quadratiques

$$q_i^s = x_2^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, 6,$$

avec $s = 1, 2, \dots, n$,

et

$$q_i^s = x_3^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2 \quad \text{pour } i = 7, 8, 9,$$

avec $s = 2, 3, \dots, n$.

Le symbole q_i désignera l'un quelconque des q_i^s . Nous définissons les champs de potentiels canoniques par les fonctions

$$V_1(c, x) = V_1(c_1, c_2, c_3, c_4, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1, \quad (64a)$$

$$V_2(c, x) = x_1^2, \quad (64b)$$

$$V_3(c, x) = \frac{x_1^3}{3} + c_1 x_1, \quad (64c)$$

$$V_4(c, x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{c_2}{2} x_1^2 + c_1 x_1, \quad (64d)$$

$$V_5(c, x) = \frac{x_1^5}{5} + \frac{c_3}{3} x_1^3 + \frac{c_2}{2} x_1^2 + c_1 x_1, \quad (64e)$$

$$V_6(c, x) = \frac{x_1^6}{6} + \frac{c_4}{4} x_1^4 + \frac{c_3}{3} x_1^3 + \frac{c_2}{2} x_1^2 + c_1 x_1, \quad (64f)$$

$$V_7(c, x) = x_1^3 + x_2^3 + c_3 x_1 x_2 - c_2 x_2 - c_1 x_1, \quad (64g)$$

$$V_8(c, x) = x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + c_3(x_1^2 + x_2^2) - c_2 x_2 + c_1 x_1, \quad (64h)$$

$$V_9(c, x) = x_1^2 x_2 + x_2^4 + c_4 x_1^2 + c_3 x_2^2 - c_2 x_2 - c_1 x_1. \quad (64i)$$

Nous dirons que V est du type V_i au point (c, x) si l'on a $\tilde{V}, (c, x) \sim \widetilde{V_i + q_i}, 0$.

PROPOSITION 1. — Il existe un ensemble de fonctions, dites les « bonnes fonctions », qui sont du type de l'un des V_i , $i = 1, 2, \dots, 9$, en chaque point (c, x) telles que

(i) toute fonction V peut être approchée d'aussi près que l'on veut par une bonne fonction ;

(ii) sous une perturbation assez petite, toute bonne fonction reste une bonne fonction.

PROPOSITION 2. — Si V est une bonne fonction du type V_i en (c, x) , alors

il existe un difféomorphisme local δ de $\mathbb{R}^4$, c dans $\mathbb{R}^4$, 0, avec $\delta(c) = 0$, qui échange les ensembles catastrophes de V et V_i .

La proposition 2 permet une classification locale des ensembles catastrophes pour les bonnes fonctions, tandis que la proposition 1 affirme que nous classifions ainsi les ensembles catastrophes pour presque toutes les fonctions V . Remarquons que les ensembles catastrophes correspondant à V_1 et V_2 sont vides. Les autres V_i , $i = 3, 4, \dots, 9$, donnent respectivement les ensembles catastrophes de bifurcation de la classification de Thom, c'est-à-dire le pli, la fronce ou la catastrophe de Riemann-Hugoniot (la cuspide), la queue d'aronde, le papillon, l'ombilic hyperbolique (la vague), l'ombilic elleptique (le cheveu) et l'ombilic parabolique (le champignon). On remarque aussi qu'au plus deux variables d'état interviennent de façon significative dans les expressions des « potentiels canoniques ». Ainsi pour une dynamique de type gradient contrôlée localement par $\mathbb{R}^4$, seulement deux variables d'état déterminent explicitement la morphologie de la dynamique.

Les bonnes fonctions V qui sont du type V_4 en (c, x) , par exemple, sont caractérisées [6] par

$$\frac{\partial V}{\partial x}(c, x) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(c, x) = \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(c, x) = 0 \neq \frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(c, x) \quad (65a)$$

et

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_i}(c, x) & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_j}(c, x) \\ \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_i}(c, x) & \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial c_j}(c, x) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (65b)$$

pour un couple (i, j) . On vérifie bien qu'au point $(0, z_0, 0)$, où z_0 est donné par (5b), la fonction $V(y, z, \theta)$, dont l'expression est donnée par (4a), utilisée lors de l'étude de la dynamique de la machine à catastrophes est une bonne fonction du type V_4 . La méthode heuristique qui fut employée pour déterminer la position du point cuspide se trouve ici pleinement justifiée.

Des arguments de stabilité (au sens de la stabilité de structure) nous permettent de penser qu'ainsi nous classifions les ensembles catastrophes pour tous les systèmes physiques qui se conforment à une dynamique gradient contrôlée localement par $\mathbb{R}^4$ et qui donnent lieu à des phénomènes « assez stables » pour être reproductibles. Le choix de $\mathbb{R}^4$ pour paramétrer localement la variété de contrôle, tout en correspondant à l'espace-temps, est justement fait pour des raisons de densité des applications structurellement stables [7].

Il paraît possible ici de construire une théorie des catastrophes pour d'autres types de systèmes dynamiques. Un modèle général de la théorie des catastrophes pourrait être le suivant. On se donne un espace Γ de

champs de vecteurs sur une variété d'état, une fonction continue X d'une variété de contrôle C dans Γ et on munit Γ d'une relation d'équivalence $\sim$. A chaque contrôle c dans C , la fonction X associe l'élément X_c dans Γ . Sur Γ nous avons une notion de stabilité : nous disons que $\gamma_1 \in \Gamma$ est stable si tout point γ_2 de Γ assez voisin de γ_1 est équivalent à γ_1 par la relation $\sim$. Ainsi un point de contrôle c est dit point catastrophe si et seulement si X_c est instable. Un tel modèle est intéressant pour le physicien si, pour des types particuliers de dynamiques, on peut classer les morphologies que présentent localement les ensembles catastrophes correspondants pour presque toutes les fonctions X (les bonnes fonctions). Cette classification serait un guide incomparable pour le physicien qui aurait à construire le modèle dynamique d'un système particulier, d'autant plus si ces morphologies se manifestent sur l'espace substrat associé.

REMERCIEMENTS

L'un des auteurs (J.-G. D.) remercie les Professeurs R. Thom et E. C. Zeeman pour certaines discussions et correspondances utiles, ainsi que pour leur hospitalité à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette et au Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry.

APPENDICE

DÉFINITION. — Une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est de classe C^∞ si ses dérivées partielles de tout ordre en tout point de U existent et sont continues.

DÉFINITION. — Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est un difféomorphisme (C^∞ -difféomorphisme) si c'est une bijection et si elle est de classe C^∞ ainsi que son inverse.

DÉFINITION. — Nous disons que f est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$, x dans $\mathbb{R}^n$, y si c'est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de $x \in \mathbb{R}^n$ sur un voisinage de $f(x) = y$.

THÉORÈME DE LA FONCTION INVERSE. — Soit f une application de classe C^∞ de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que $f(x_0) = y_0$. Si son jacobien $J(f)(x_0)$ en x_0 est non-nul, f est localement un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, x_0 dans $\mathbb{R}^m$, y_0 .

THÉORÈME DE LA FONCTION IMPLICITE. — Soit f une application de classe C^∞ de $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que $f(x, y) = 0$ et $\det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y) \right]_{i,j=1,2,\dots,m} \neq 0$, alors il existe un voisinage ouvert V de x dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert W de y dans $\mathbb{R}^m$ tels que, si $w \in W$, il existe un point unique $v \in V$ pour lequel $f(v, w) = 0$ et l'application $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n : w \mapsto v$ est de classe C^∞ .

THÉORÈME DE PRÉPARATION DE WEIERSTRASS-MALGRANGE [8]. — Si

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x)$$

est une application d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$f(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) = \dots = \frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_1^{r-1}}(0) = 0 \neq \frac{\partial^r f}{\partial x_1^r}(0),$$

alors il existe des applications g et g_i , $i = 1, 2, \dots, r$, de classe C^∞ définies sur des voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n-1}$ et à valeurs réelles telles que

$$f(x) = g(x)[x_1^r + g_1(x_2, x_3, \dots, x_n)x_1^{r-1} + \dots + g_{r-1}(x_2, x_3, \dots, x_n)x_1 + g_r(x_2, x_3, \dots, x_n)],$$

avec $g(0) \neq 0$.

REFERENCES

- [1] R. THOM, Topologie et signification, *Age de la Science*, n° 4, 1968, p. 219.
- [2] R. THOM, Topological Models in Biology, *Topology*, vol. 8, 1969, p. 313.
- [3] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse* (Benjamin, Reading, Mass., 1972).
- [4] V. I. ARNOLD, Singularities of Smooth Mappings, *Russian Math. Surveys*, 1969, p. 1.
- [5] E. C. ZEEMAN, A Catastrophe Machine, dans *Towards a Theoretical Biology*. IV. Essays, ed. C. H. Waddington (Edinburgh University Press, 1972), p. 276.
- [6] J.-G. DUBOIS et J.-P. DUFOUR, La théorie des catastrophes. II. Dynamiques gradientes à une variable d'état, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. XX, n° 2, 1974, p. 135.
- [7] J. N. MATHER, Stability of C^∞ Mappings. VI. The Nice Dimensions, dans *Proceedings of Liverpool Singularities. Symposium I, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 192 (Springer-Verlag, Berlin, 1971), p. 207.
- [8] C. T. C. WALL, Introduction to the Preparation Theorem, dans *Proceedings of Liverpool Singularities. Symposium I, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 192 (Springer-Verlag, Berlin, 1971), p. 90.

(Manuscrit reçu le 20 novembre 1972)