

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. SURDIN

**Le champ électromagnétique fluctuant de l'univers
(Essai d'une électrodynamique stochastique)**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 15, n° 3 (1971), p. 203-241

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__15_3_203_0

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Le champ électromagnétique fluctuant de l'univers

(Essai d'une Électrodynamique stochastique).

par

M. SURDIN

Faculté des Sciences de Bordeaux, 33-Talence.

RÉSUMÉ. — Partant de la notion du champ électromagnétique fluctuant de l'Univers, on développe une Electro-dynamique Stochastique.

— Restant dans le cadre de la physique déterministe classique, on établit l'équation de Schrödinger. L'établissement de cette équation constitue la liaison de l'Électrodynamique Stochastique du Vide et la Mécanique Quantique.

— On esquisse un modèle électromagnétique de la gravitation et on établit un formalisme mathématique simple qui permet de traiter des problèmes aussi variés que l'étude du champ magnétique des corps tournants, le calcul de l'énergie rayonnée sous forme d'ondes de gravitation par un corps en mouvement et l'étude du bruit de fond cosmique.

ABSTRACT. — Based on the concept of the random electromagnetic field of the Universe a Stochastic Electro-dynamics is developed.

— Schrödinger's equation is obtained using strictly classical deterministic arguments. The derivation of Schrödinger's equations forms the link between Vacuum Stochastic Electro-dynamics and Quantum Mechanics.

— An electromagnetic model of gravitation is advanced and a simple mathematical formalism is derived. This formalism is used to solve various problems, such as: the magnetic field of rotating bodies, the emission of gravitational waves by a body in motion and the cosmic background noise.

INTRODUCTION

Développant l'idée de l'« absorbeur » due à Tétrode [1], Wheeler et Feynman [2] ont pu justifier les calculs de Dirac [3] relatifs au rayonnement d'une charge en mouvement.

Ils ont montré que la force de résistance de rayonnement est due à l'action de l'absorbeur sur la charge (électron) en mouvement. Cette action de l'absorbeur est équivalente à celle d'un champ électromagnétique fluctuant au zéro absolu.

La notion du champ E. M. fluctuant, appelé « champ de zéro », s'est révélée très fructueuse. Elle a permis à Wheeler et Feynman de résoudre, dans le cadre de l'Electrodynamique classique, les difficultés qui se présentent lorsqu'on calcule l'énergie d'une charge en interaction avec son champ propre.

Braffort et Tzara [4] ont étudié l'action du champ de zéro sur un oscillateur harmonique. Ils ont montré que l'énergie moyenne de l'oscillateur est égale au produit de sa fréquence propre par une constante universelle. Cette constante s'introduit dans l'expression du spectre énergétique du champ de zéro. Tout se passe comme si l'énergie rayonnée par l'oscillateur harmonique lui était restituée par le champ de zéro.

Ce travail de Braffort et Tzara est le premier d'une série, basée sur la notion du champ de zéro, qui constitue l'Electrodynamique Stochastique du Vide.

Dans le premier chapitre de la présente étude les principaux travaux actuellement connus de l'E. D. S. du Vide seront exposés.

Dans le deuxième chapitre nous étudierons les conséquences de la présence du champ de zéro dans l'Univers rempli de matière, que nous appellerons l'Electrodynamique Stochastique de la Matière, afin de la distinguer de la précédente; les développements de l'E. D. S. Matière sont moins bien connus que ceux de l'E. D. S. V.

Le troisième et dernier chapitre sera consacré aux conclusions et à des considérations générales sur la relation entre l'E. D. S., d'une part, la Mécanique Quantique et la Gravitation d'autre part.

L'ÉLECTRODYNAMIQUE STOCHASTIQUE DU VIDE

Dans ce chapitre seront étudiés :

- a. Le spectre énergétique du champ de zéro.
- b. L'action du champ de zéro sur un oscillateur harmonique.

- c. L'action du champ de zéro sur un électron libre en mouvement dans un champ magnétique uniforme.
- d. Le rayonnement du corps noir.
- e. Les lois de probabilité d'un oscillateur harmonique et d'un électron libre en mouvement dans un champ magnétique uniforme.
- f. L'établissement de l'équation de Schrödinger.
- g. Le passage de l'E. D. S. V. à l'E. D. S. M.

Plusieurs autres études, dues essentiellement à Boyer [5] concernant notamment, le troisième Principe de la Thermodynamique, le calcul des forces à grande distance de Van der Waals, etc., ne seront pas exposées ici. Le lecteur intéressé pourra consulter la bibliographie donnée ci-après.

a. Le spectre énergétique du champ de zéro.

Il est intéressant de noter que Planck [6], considérant une enceinte fermée contenant un rayonnement E. M., a montré que la densité spectrale de l'énergie $\varepsilon(\omega)$, du champ E. M. est proportionnelle à ω^3 , soit

$$\varepsilon(\omega) \propto \omega^3 \quad (1)$$

(voir 1. c, p. 80 et suivantes).

Cette relation, obtenue à partir de raisonnements purement classiques, conduit son auteur à la loi de Déplacement de Wien et la loi de Stefan-Boltzmann.

Plus loin dans son exposé (1. c, p. 158), introduisant l'hypothèse de quanta, Planck note que l'expression $\frac{c^3}{\omega^3} \varepsilon(\omega)$ a les dimensions d'une action et correspond à une constante universelle qu'il appelle h .

Marshall [7] et, plus clairement, Boyer [8] ont montré que si on applique au champ de zéro la transformation de Lorentz le spectre énergétique doit être le même pour tous les observateurs en mouvement relatif les uns par rapport aux autres. On obtient alors le spectre énergétique donné par (1). En particulier dans le cas unidimensionnel on a

$$\varepsilon(\omega) = \frac{K |\omega|^3}{3\pi c^3} \quad (2)$$

où ω parcourt l'intervalle $-\infty$ à $+\infty$ et où K est une constante universelle, ayant les dimensions d'une action.

b. L'action du champ de zéro sur un oscillateur harmonique.

Ici on suivra le développement de Braffort et coll. [9] plus complet que celui de Braffort et Tzara [4].

Considérons l'effet du champ de zéro sur un oscillateur harmonique dans le cas non relativiste. Dans ce cas la force $e\dot{x} \wedge \vec{B}(t)$ peut être négligée.

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$-\frac{2e^2}{3c^3} \cdot \ddot{x} + m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = e \cdot E(t) \quad (3)$$

où $E(t)$ et $B(t)$ sont les composantes électrique et magnétique du champ de zéro. En particulier, $E(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire de moyenne nulle et dont le spectre énergétique est donné par (2).

Posons

$$\tau = \frac{1}{\omega_s} = \frac{2e^2}{3mc^3}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

et

$$F(t) = \frac{e}{m} \cdot E(t),$$

l'équation (3) s'écrit

$$-\tau \cdot \ddot{x} + \ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = F(t) \quad (4)$$

Par analogie avec la mécanique rationnelle on définit un moment et une énergie électrocinétiques par :

$$\left. \begin{aligned} P_{ec} &= m \cdot \dot{x} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x} + e \int E(t) dt \\ E_{ec} &= P_{ec}^2 / 2m \\ E_{tot} &= E_{pot} + E_{ec} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Appliquons à l'équation (4) la méthode de Bernamont [10] : on considère l'équation (4) au temps t et au temps $t + \theta$, on effectue le produit des premiers membres et on l'égalé au produit des seconds membres. On intègre, ensuite, dans un intervalle infini du temps t et on obtient une équation entre les fonctions d'auto-corrélations de x et la fonction d'auto-corrélation de F ; soit

$$\tau^2 \chi^{(6)}(\theta) + \chi^{(4)}(\theta) - 2\omega_0^2 \chi^{(2)}(\theta) + \omega_0^4 \chi(\theta) = \langle F(t)F(t + \theta) \rangle \quad (6)$$

où on a posé

$$\langle x(t) \times (t + \theta) \rangle = \chi(\theta)$$

Si on prend la transformée de Fourier des deux membres de l'équation (6) on trouve

$$\xi(\omega) = \frac{\frac{e^2}{m^2} \cdot \varepsilon(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega^6} \quad (7)$$

avec :

$$\mathcal{F}[\langle E(t)E(t + \theta) \rangle] = \varepsilon(\omega)$$

et

$$\mathcal{F}[\chi(\theta)] = \xi(\omega)$$

On a

$$\left. \begin{aligned} \langle E_{\text{pot}} \rangle &= \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k \int_0^\infty \xi(\omega) d\omega \\ \langle E_{\text{ec}} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{P}_{\text{ec}}^2 \rangle}{2m} = \frac{k^2}{2m} \left[\int_0^t x dt \right]^2 = \frac{k^2}{2m} \int_0^\infty \frac{\xi(\omega) d\omega}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

L'équation donnant $\langle E_{\text{ec}} \rangle$ a été obtenue en utilisant l'équation du mouvement et l'équation (5).

Posons

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^2 = q, \quad \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 = u$$

les équations (2), (7) et (8) nous donnent

$$\left. \begin{aligned} \langle E_{\text{pot}} \rangle &= \frac{K}{4\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega_s} \int_0^\infty \frac{udu}{u^3 + (u - q)^2} \\ \langle E_{\text{ec}} \rangle &= \frac{K}{4\pi} \frac{\omega_0^4}{\omega_s^3} \int_0^\infty \frac{du}{u^3 + (u - q)^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Le cas non relativiste correspond à $\frac{\omega_0}{\omega_s} \ll 1$. On peut intégrer les équations (9) en s'arrêtant au premier terme du développement en ω_0/ω_s ; il vient :

$$\left. \begin{aligned} \langle E_{\text{pot}} \rangle &= \frac{K}{4} \omega_0 \left[1 - \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_s} \log \frac{\omega_0}{\omega_s} \right] \\ \langle E_{\text{ec}} \rangle &= \frac{K}{4} \omega_0 \left[1 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^3 \log \frac{\omega_0}{\omega_s} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

D'où

$$\langle E_{\text{tot}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle + \langle E_{\text{ec}} \rangle = \frac{K}{2} \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0}{\omega_s} \log \frac{\omega_0}{\omega_s} \right] \quad (11)$$

On voit que si on identifie K à \hbar on retrouve les résultats de l'électrodynamique quantique. Le premier terme correspond à l'énergie du niveau fondamental, le second terme à un déplacement du type « Lamb ».

c. Étude du mouvement d'un électron libre dans un champ magnétique uniforme \vec{H} .

Considérons le cas simple, comme le font Braffort et Taroni dans la première partie de leur note [11], où l'on néglige le champ magnétique fluctuant.

L'équation du mouvement s'écrit

$$-\tau \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} + \frac{e}{mc} \cdot \vec{r} \wedge \mathbf{H} = \vec{F}(t) \quad (12)$$

En choisissant \vec{H} parallèle à l'axe Oz , on peut se borner à l'étude du mouvement dans le plan xOy . Posons $v = x + iy$, on trouve en appliquant les méthodes utilisées plus haut :

$$\langle E_{\text{tot}} \rangle = \frac{e^2 H^2}{mc^2} \langle v \cdot v^* \rangle = \frac{K}{\pi} \cdot \omega_H^2 \tau \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{\omega^4 \cdot \tau^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (13)$$

avec

$$\omega_H = \frac{eH}{mc}$$

L'intégration de l'équation (13) donne

$$\langle E_{\text{tot}} \rangle = \frac{K}{2} \omega_H \left[1 - \frac{2\omega_H}{\pi\omega_s} \left(1 + \log \frac{\omega_H}{\omega_s} \right) \right] \quad (14)$$

On reconnaît dans ce développement un premier terme qui a la même forme qu'une énergie d'interaction d'un champ magnétique avec un électron de « spin 1/2 » ; le second terme correspond à une polarisation magnétique.

Braffort et Taroni ont montré [11] que si l'on considère l'action du champ magnétique fluctuant $\vec{B}(t)$, en plus de celle du champ uniforme \vec{H} , on peut, dans certaines conditions d'approximations, calculer un terme correspondant à une correction du moment magnétique. Ce terme est analogue à celui que l'Electrodynamique Quantique attribue à un moment magnétique anormal de l'électron.

d. Le rayonnement du corps noir.

Nous allons établir la formule donnant l'énergie totale moyenne $\langle E_{\text{tot}} \rangle$ d'un oscillateur harmonique appartenant à un ensemble d'oscillateurs harmoniques en équilibre thermique, à la température T , avec une enceinte (corps noir). La démonstration est celle donnée par Surdin et coll. [12], notons, cependant, que Marshall [13] et Boyer [8] ont présenté d'autres démonstrations.

En théorie classique, un oscillateur harmonique appartenant à un ensemble d'oscillateurs, considérés comme indépendants les uns des autres et en équilibre à la température T , possède une énergie cinétique

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle = \frac{kT}{2}$$

et une énergie potentielle

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{kT}{2}.$$

Dans le cas présent pour calculer l'énergie totale $\langle E_{\text{tot}} \rangle$ nous devons tenir compte de l'énergie $E_i(\omega, T)$ que les oscillateurs harmoniques possèdent du fait de leur interaction par l'intermédiaire du champ de zéro.

Soient $E_i(\omega)$ et $E_i(\omega, T)$ l'énergie d'interaction à $T = 0$ et à la température T . Pour une enceinte de grandes dimensions l'approximation dipolaire est justifiée (voir Landau et Lifchitz [14]), dans ce cas on a

$$\langle E_i(\omega, T) \rangle = \frac{C \int_0^\pi e^{\frac{E_i(\omega) \cos \theta}{kT}} E_i(\omega) \cos \theta \sin \theta d\theta}{C \int_0^\pi e^{\frac{E_i(\omega) \cos \theta}{kT}} \sin \theta d\theta} \quad (15)$$

où θ est l'angle de l'axe de l'oscillateur avec la direction du champ. L'intégration de l'équation (15) donne

$$\langle E_i(\omega, T) \rangle = E_i(\omega) L \left[\frac{E_i(\omega)}{kT} \right] \quad (16)$$

où

$$L(x) = \coth x - 1/x \quad (17)$$

est la fonction de Langevin.

L'analogie entre l'équation (16) et la théorie classique du paramagnétisme a déjà été notée par Benedicks [15].

L'énergie totale de l'oscillateur harmonique est alors

$$\begin{aligned} \langle E_{\text{tot}} \rangle &= \langle E_{\text{cin}} \rangle + \langle E_{\text{pot}} \rangle + \langle E_i \rangle = kT + E_i(\omega) \left[\coth \frac{E_i(\omega)}{kT} - \frac{kT}{E_i(\omega)} \right] \\ &= E_i(\omega) \coth \frac{E_i(\omega)}{kT} = E_i(\omega) \left[\frac{2}{e^{2E_i(\omega)/kT} - 1} + 1 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Suivant l'équation (11) l'oscillateur harmonique, en première approximation, possède une énergie

$$\langle E_{\text{tot}}(\omega, 0) \rangle = \frac{K\omega}{2}$$

l'équation (18) nous donne

$$\langle E_{\text{tot}}(\omega, 0) \rangle = E_i(\omega) \quad (19)$$

d'où $E_i(\omega) = \frac{K\omega}{2}$ et, finalement, l'équation (18) devient :

$$\langle E_{\text{tot}}(\omega, T) \rangle = \frac{K\omega}{2} \left[\frac{2}{e^{K\omega/kT} - 1} + 1 \right] \quad (20)$$

L'équation (20) conduit à la formule de Planck du rayonnement du corps noir.

e. Les lois de probabilité d'un oscillateur harmonique et d'un électron libre en mouvement dans un champ magnétique uniforme [16].

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'étudier les lois de probabilité d'un oscillateur harmonique et d'un électron libre en mouvement dans un champ magnétique uniforme et de montrer comment on peut retrouver les résultats obtenus plus haut en *b.* et *c.*

Considérons l'équation de l'oscillateur harmonique, l'équation (4) :

$$-\tau \ddot{x} + \ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad (21)$$

Pour un système obéissant à une équation de Langevin généralisée et dans le cas où le processus aléatoire est un processus de Markoff, Chandrasekhar [17] a développé une méthode qui permet d'obtenir l'équation de Fokker-Planck. Nous allons considérer une approximation de l'équation (21) à laquelle on peut appliquer la méthode de Chandrasekhar. Pour mettre en œuvre cette méthode on considère la solution de l'équation homogène sans second membre

$$-\tau \ddot{x} + \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Comme $\tau\omega_0 \ll 1$, on prend en première approximation la solution $\ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot \dot{x}$. L'équation du mouvement devient

$$\ddot{x} + \tau\omega_0^2\dot{x} + \omega_0^2x = F(t) \quad (22)$$

La méthode de Chandrasekhar s'applique au système régi par l'équation (22) et on peut écrire les différentes lois de probabilité relatives à ce système. Ici on s'intéresse à l'état stationnaire, pour lequel $\partial p/\partial t = 0$. Dans ce cas, la loi de probabilité $p(x, \dot{x})$ s'écrit

$$p(x, \dot{x}) = A \exp \left[- \frac{\tau\omega_0^2(\dot{x}^2 + \omega_0^2x^2)}{S} \right] \quad (23)$$

avec

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\langle \left\{ \int_t^{t+\Delta t} F(t) dt \right\}^2 \right\rangle \quad (24)$$

S est la densité spectrale moyenne de l'énergie cédée à l'oscillateur harmonique par le champ fluctuant. La densité spectrale de l'énergie du champ fluctuant est

$$\varepsilon(\omega) = \frac{K |\omega^3|}{3\pi c^3}$$

d'où

$$S = \frac{e^2 K}{m^2 3\pi c^3} \tau^2 \omega_0^6 \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\tau^2 \omega^6 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} / B \quad (25)$$

où

$$B = \frac{\tau^2 \omega_0^6}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\tau^2 \omega^6 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \cong \frac{\tau \omega_0^2}{4} \quad (26)$$

est la « bande passante efficace » de l'oscillateur harmonique. Pour évaluer l'intégrale (25) on pose

$$\left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 = u, \quad \left(\frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^2 = q$$

d'où

$$S = \frac{2e^2 K}{3\pi m^2 c^3} \frac{\omega_0^4}{\omega_s} \int_0^\infty \frac{u du}{u^3 + (u - q)^2} \quad (27)$$

L'intégrale de l'équation (27) est la même que celle de l'équation (9), d'où

$$S = \frac{2e^2 K}{3m^2 c^3} \omega_0^3 \left[1 - \frac{\omega_0}{\pi \omega_s} \log \frac{\omega_0}{\omega_s} \right] \quad (28)$$

La loi de probabilité (23) s'écrit alors

$$p(x, \dot{x}) = A \exp \left[- \frac{m(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)}{K\omega_0 \left(1 - \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_s} \log \frac{\omega_0}{\omega_s} \right)} \right] \quad (29)$$

L'énergie totale de l'oscillateur harmonique est

$$\langle E_{\text{tot}} \rangle = \frac{K\omega_0}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_s} \log \frac{\omega_0}{\omega_s} \right] \quad (30)$$

Afin d'obtenir une valeur finie pour S , l'équation (25) est déduite de l'équation du mouvement (21); si l'on utilisait l'équation approchée (22) S tendrait vers l'infini de façon logarithmique. Cette remarque explique pourquoi en E. D. S. V. on peut se dispenser de procédures de « soustraction » et de « cut-off », elle semble expliquer aussi les difficultés qu'éprouve Marshall [13] pour certains passages à la limite. Il a, d'ailleurs, obtenu une loi de probabilité du type (29), sans avoir, toutefois, le terme qui correspond à un déplacement du type « Lamb ».

Étudions maintenant, la loi de probabilité d'un électron libre en mouvement dans un champ magnétique uniforme \vec{H} . Considérons le cas, comme le font Braffort et Taroni [11], où l'on néglige le champ magnétique fluctuant.

L'équation du mouvement s'écrit :

$$- \tau \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} + \frac{e}{mc} \cdot \vec{r} \wedge \vec{H} = \vec{F}(r) \quad (31)$$

En choisissant \vec{H} parallèle à l'axe Oz , on peut se borner à l'étude de mouvement dans le plan xOy . Les équations du mouvement sur les axes Ox et Oy sont

$$\left. \begin{aligned} - \tau \ddot{x} + \dot{x} + \omega_H \dot{y} &= F_x(t) \\ - \tau \ddot{y} + \dot{y} - \omega_H \dot{x} &= F_y(t) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

avec

$$\omega_H = \frac{eH}{mc}$$

Suivant la méthode décrite plus haut on cherche les solutions approchées des équations homogènes sans second membre; les équations du mouvement deviennent

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \tau \omega_H^2 \dot{x} + \omega_H^2 x &= F_x(t) \\ \ddot{y} + \tau \omega_H^2 \dot{y} + \omega_H^2 y &= F_y(t) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Pour l'état stationnaire

$$\frac{\partial p(x)}{\partial t} = \frac{\partial p(y)}{\partial t} = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} p(x) &= A \exp\left(-\frac{2\tau\omega_H^4 x^2}{S}\right) \\ p(y) &= A_1 \exp\left(-\frac{2\tau\omega_H^4 y^2}{S}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

Comme x et y sont indépendants, ainsi que $F_x(t)$ et $F_y(t)$ on a

$$p(x, y) = A_2 \exp\left[-\frac{2\tau\omega_H^4}{S}(x^2 + y^2)\right] \quad (35)$$

Dans le cas présent, on a

$$S = \frac{4e^2}{m^2} \frac{K}{3\pi c^3} \tau\omega_H^4 \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{\tau^2\omega^4 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (36)$$

L'intégrale de l'équation (36) est la même que celle de l'équation (13) d'où

$$S = \frac{4e^2 K}{3m^2 c^3} \omega_H^3 \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{\omega_H}{\omega_s} \left(\log \frac{\omega_H}{\omega_s} + 1 \right) \right] \quad (37)$$

L'énergie totale moyenne de l'électron est

$$\langle E_{\text{tot}} \rangle = \frac{1}{2} m\omega_H^2 \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{K}{2} \omega_H \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{\omega_H}{\omega_s} \left(1 + \log \frac{\omega_H}{\omega_s} \right) \right] \quad (38)$$

Il nous a paru intéressant de déduire la « relation d'incertitude » de Heisenberg. Ici on considère le cas de l'électron libre dans un champ magnétique uniforme; la même méthode permet d'obtenir cette relation dans le cas de l'oscillateur harmonique.

Reprenons l'expression de $p(x)$, en ne conservant que le terme principal de l'exponentielle, soit

$$p(x) = A \exp\left(-\frac{m\omega_H}{K} x^2\right) \quad (39)$$

on aura de même

$$p(\hat{x}) = B \exp\left(-\frac{m\hat{x}^2}{K\omega_H}\right) \quad (40)$$

Si on considère, comme le fait Heisenberg [18], que l'incertitude sur la position δq est donnée par la valeur x_1 de x pour laquelle $p(x)$ a la valeur e^{-1}

de sa valeur maximale et, de même, que l'incertitude sur la quantité de mouvement δp est donnée par la valeur $m\dot{x}_1$ de $m\dot{x}$ pour laquelle $p(\dot{x})$ a la valeur e^{-1} de sa valeur maximale, on a

$$x_1^2 = \frac{K}{m\omega_H}; \quad m^2\dot{x}_1^2 = mK\omega_H$$

d'où

$$m\dot{x}_1 \cdot x_1 = K, \quad \text{ou encore} \quad \delta p \cdot \delta q = K \quad (41)$$

f. L'établissement de l'équation de Schrödinger [19].

Avant d'aborder la démonstration établissant l'équation de Schrödinger, donnons un bref aperçu des travaux antérieurs.

L'analogie formelle entre l'équation différentielle donnant la probabilité $\rho(x, t)$ relative à un système en mouvement Brownien basé sur un processus de Markoff et l'équation de Schrödinger a été constatée par Métadier [20], Fürth [21] et développée récemment par Comisar [22]. On ne peut pas faire l'analogie entre $\rho(x, t)$ et la fonction d'onde de Schrödinger Ψ essentiellement pour les raisons suivantes :

— la densité de probabilité relative à un mouvement Brownien est donnée par $\rho(x, t)$; suivant cette analogie elle doit être donnée en mécanique ondulatoire par Ψ , alors qu'en fait elle est $\Psi \cdot \Psi^*$;

— pour compléter l'analogie on doit considérer un coefficient de diffusion imaginaire.

Les travaux ultérieurs de Kershaw [23], de Nelson [24], de la Peña-Auerbach [25] et de Boyer [5] ont amélioré l'analogie en considérant que Ψ était l'analogie de $\sqrt{\rho(x, t)}$. Cette analogie requiert, en outre, que le coefficient de diffusion D soit réel et égal à $\hbar/2m$.

En d'autres termes, un système en mouvement Brownien est sujet à des fluctuations de position dont l'échelle est donnée par $\hbar/2m$. Mais écrire $D = \hbar/2m$ constitue un postulat qui a son équivalent en mécanique quantique (de la Peña-Auerbach, 1. c).

Une analyse critique des travaux ci-dessus a été faite par Gilson [26]. Sa conclusion principale est que les résultats de la théorie stochastique et l'équation de Schrödinger ne peuvent être équivalents, pour une fonction potentiel réelle, que si le coefficient de diffusion est identiquement nul.

L'établissement de l'équation de Schrödinger présentée ci-après est basé entièrement sur les considérations classiques et découle des résultats obtenus plus haut en E. D. S. De plus, il ne semble pas que les objections de Gilson s'appliquent ici.

L'approche mathématique suit celle suggérée par Olbert et donnée par Hayakawa [27].

Considérons l'équation généralisée de Langevin dans le cas unidimensionnel

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} - \frac{1}{m} F(x, t) = A(t) \tag{42}$$

où $F(x, t)$ est le champ de force extérieur et $A(t)$ est le champ fluctuant stationnaire dont l'action sur le système est un processus de Markoff.

Marshall [13] et Surdin [16] ont montré comment l'équation (42) s'obtient à partir de l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique quand $\omega_0/\omega_s \ll 1$.

L'équation de Fokker-Planck donnant la distribution de probabilité $f(x, p, t)$ avec $p = m\dot{x}$ est alors [17]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} + F(x, t) \frac{\partial f}{\partial p} = \beta \frac{\partial}{\partial p} (f \cdot p) + \frac{Sm^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \tag{43}$$

avec

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\langle \left\{ \int_t^{t+\Delta t} A(t) dt \right\}^2 \right\rangle \tag{44}$$

L'évaluation de S dans le cas de l'oscillateur harmonique et dans le cas de l'électron en mouvement dans un champ magnétique uniforme a été donnée plus haut (équations (28) et (37)).

Considérons la transformée de Fourier de la fonction de distribution $f(x, p, t)$, donnée par

$$\rho(x, \xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, p, t) e^{2i\xi p/K} dp \tag{45}$$

tenant compte de l'équation (41), c'est une opération licite. Les équations (43) et (45) donnent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{iK}{2m} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2 \partial x} - \frac{2i\xi}{K} F(x, t) \rho = -\beta \xi \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{2Sm^2}{K^2} \xi^2 \rho \tag{46}$$

Prenons un nouveau jeu de variables

$$r = x + \xi; \quad r' = x - \xi$$

l'équation (46) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{iK}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \right) \rho - \frac{i}{K} (r - r') F \cdot \rho \\ = -\beta \frac{(r - r')}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r'} \right) \rho - \frac{Sm^2}{2K^2} (r - r')^2 \rho \end{aligned} \tag{47}$$

Utilisant le théorème de la valeur moyenne, on a

$$(r - r')F\left(\frac{r + r'}{2}\right) = \int_{r'}^r F(u)du = - [V(r) - V(r')] \quad (48)$$

où V est la fonction potentiel du champ de force extérieur. On a de même

$$\rho(r) - \rho(r') - (r - r')\rho'(r) = \frac{r - r'}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r'} \right) \rho \quad (49)$$

Considérons une fonction $I(r)$ telle que $I''(r) = \rho(r)$. On a alors :

$$I(r) - I(r') - (r - r')I'(r) = \frac{1}{2}(r - r')^2 \rho \quad (50)$$

Combinant les équations (47), (48), (49) et (50) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{iK}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \right) \rho + \frac{i}{K} [V(r) - V(r')] \rho = -\beta[\rho(r) - \rho(r')] \\ + \beta \cdot (r - r') \cdot \rho'(r) - \frac{Sm^2}{K^2} [I(r) - I(r')] + \frac{Sm^2}{K^2} (r - r')I'(r) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Soit, maintenant, une fonction Ψ telle que

$$\rho(r, r', t) = \Psi(r, t) \cdot \Psi^*(r', t) \quad (52)$$

L'équation (51) se décompose en

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{iK}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{i}{K} V(r, t) \Psi = -\beta \Psi + \frac{\beta}{2} (r - r') \rho'(r, t) \\ - \frac{Sm^2}{K^2} I_{\Psi}(r, t) + \frac{Sm^2}{K^2} (r - r') I'_{\Psi}(r, t) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

où $I'_{\Psi}(r, t) = \Psi(r, t)$ et une équation similaire pour Ψ^* . Pour $r = r'$ on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{iK}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{i}{K} V(r, t) \Psi = -\beta \Psi - \frac{Sm^2}{K^2} I_{\Psi}(r, t) \quad (54)$$

et une équation équivalente pour Ψ^* .

Pour $\beta = 0$ et $S = 0$ la similitude de l'équation (54) et l'équation de Schrödinger est frappante. Si on désire une identification complète (pour $\beta = 0$, $S = 0$) on doit faire $K \equiv \hbar$.

On remarque, en outre, que l'équation (52) ne réalise pas une séparation complète des variables en r et r' , puisque l'équation (53) contient des termes en r' . En faisant $r = r'$, comme il se doit, ces termes disparaissent. Toutefois, comme le remarque Hayakawa (1. c), tous les autres termes sont maintenus.

Ceci constitue une indication que l'équation de Schrödinger serait une approximation d'une équation plus générale, telle que l'équation (54), par exemple. D'ailleurs, cette dernière est elle-même une approximation, puisque nous avons traité le cas où $\omega_0/\omega_s \ll 1$. Dans le cas le plus général il est possible que le processus ne soit plus celui de Markoff; si on surmontait les difficultés mathématiques on obtiendrait, peut-être, une équation plus générale que l'équation (54).

Une estimation de l'ordre de grandeur des termes du deuxième membre pour un oscillateur harmonique présente un intérêt.

Soit un oscillateur harmonique ayant un potentiel

$$V = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot x^2.$$

L'équation de Schrödinger est alors [28]

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{m\omega_0^2}{2} \cdot x^2 \right] \Psi = 0 \quad (55)$$

Les fonctions propres normalisées sont

$$\Psi_n = \left(\frac{m\omega_0}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (56)$$

où $\xi = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \cdot x$ et $H_n(\xi)$ est un polynôme d'Hermite.

L'énergie du niveau n est donnée par

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2) \quad (57)$$

Pour l'état fondamental on a

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega_0}{\hbar\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (58)$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (59)$$

Pour estimer l'ordre de grandeur du deuxième membre de l'équation (54)

on compare E_0 à $K\beta$ et à $\frac{Sm^2}{K} \cdot \frac{I_\Psi(x)}{\Psi}$.

Supposons $K = \hbar$ on a (équation (22))

$$\frac{\hbar\beta}{E_0} = \frac{2}{\hbar\omega_0} \cdot \frac{\hbar\omega_0^2}{\omega_s} = \frac{2\omega_0}{\omega_s} \ll 1. \quad (60)$$

Considérons maintenant l'expression

$$-\beta\hbar - \frac{Sm^2}{\hbar} \frac{I_\Psi(x)}{\Psi}$$

qui représente le deuxième membre de l'équation (54). $I_\Psi(x)$ n'est pas connu sous une forme finie ; mais puisque la perte de l'énergie de l'oscillateur, représentée par $-\beta\hbar$, a lieu surtout pour les faibles valeurs de x , où \dot{x} est maximum, on pourrait se contenter d'évaluer $I_\Psi(x)$ pour les faibles valeurs de x .

On a

$$I_\Psi(x) \cong -\Psi \cdot \hbar/m\omega_0$$

d'où

$$-\beta\hbar - \frac{Sm^2}{\hbar} \cdot \frac{I_\Psi(x)}{\Psi} = -\beta\hbar + \frac{Sm}{\omega_0} \quad (61)$$

Or on a (équation (28))

$$\frac{Sm}{\omega_0} = \frac{\hbar\omega_0^2}{\omega_s} \quad (62)$$

Les équations (61) et (62) donnent

$$-\frac{\omega_0^2\hbar}{\omega_s} + \frac{\omega_0^2\hbar}{\omega_s} = 0 \quad (63)$$

Autrement dit, pour un oscillateur harmonique dans l'état fondamental, l'énergie rayonnée par l'oscillateur est exactement compensée par l'énergie cédée à l'oscillateur par le champ de zéro. Dans ce cas l'équation de Schrödinger est une excellente approximation de l'équation (54).

Si on désire accomplir une identification complète de l'ensemble des résultats obtenus en E. D. S. à ceux de la Mécanique Quantique on peut :

- soit postuler $K \equiv \hbar$,
- soit évaluer K indépendamment de la Mécanique Quantique.

C'est cette seconde démarche, qui correspond à l'attitude délibérément classique adoptée ici, que nous allons étudier dans le paragraphe suivant.

g. L'électrodynamique stochastique du vide et l'électrodynamique stochastique de la matière.

Au paragraphe *a.* nous avons vu que la densité spectrale du champ de zéro était donnée par

$$\varepsilon(\omega) = \frac{K\omega^3}{3\pi c^3} \quad (64)$$

Il n'est pas concevable que $\varepsilon(\omega)$ tende vers l'infini comme ω^3 . Il doit exister un mécanisme qui empêche cette tendance vers l'infini de $\varepsilon(\omega)$ quand $\omega \rightarrow \infty$. Dans le cadre de la théorie de l'absorbeur, ce mécanisme serait la création d'une paire électron-positon qui se comporterait comme des oscillateurs harmoniques indépendants échangeant de l'énergie avec le champ de zéro.

On peut vérifier qu'il en est bien ainsi. La composante électrique $E(t)$ du champ de zéro au voisinage de l'oscillateur harmonique est

$$-\frac{2e\ddot{x}}{3c^3} = E(t) \quad (65)$$

La densité de l'énergie est donc, en tenant compte du champ magnétique,

$$W = \frac{1}{4\pi} \cdot E^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{4e^2}{9c^6} \ddot{x}^2 \quad (66)$$

La densité moyenne est

$$\langle W \rangle = \frac{e^2}{9\pi c^6} \langle \ddot{x}^2 \rangle = \frac{e^2 \omega^4}{9\pi c^6} \langle \dot{x}^2 \rangle \quad (67)$$

La densité spectrale est

$$\frac{d}{d\omega} \langle W \rangle = \frac{4e^2 \omega^3}{9\pi c^6} \langle \dot{x}^2 \rangle \quad (68)$$

Tenant compte de l'équation (65), on a

$$m \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{K\omega_0}{2}$$

d'où

$$\frac{4e^2 \omega^3}{9\pi c^6} \cdot \frac{K\omega_0}{2m} = \varepsilon(\omega) = \frac{K\omega^3}{3\pi c^3} \quad (69)$$

et

$$\frac{2e^2 \omega_0}{9\pi c^6 m} = \frac{1}{3\pi c^3},$$

on tire :

$$\omega_0 = \frac{3mc^3}{2e^2} = \omega_s \quad (70)$$

Autrement dit, l'échange d'énergie se fait à la limite du spectre entre les oscillateurs harmoniques et le champ de zéro à une fréquence maximale $\omega_0 = \omega_s$; du fait de la bande passante de l'oscillateur harmonique la densité spectrale du champ de zéro ne dépasse pas la fréquence ω_s .

On peut de même calculer l'énergie d'interaction du champ magnétique fluctuant avec un électron de « spin 1/2 » et on trouve que

$$\omega_H = \omega_s \quad (71)$$

Une paire d'oscillateurs harmoniques (électron-positon) oscillant à la fréquence limite ω_s constitue la matérialisation du rayonnement électromagnétique du champ de zéro.

Par degré de liberté un oscillateur possède une énergie moyenne de déplacement (mode électrique) de $\frac{K\omega_s}{2}$ et une énergie moyenne de « spin » (mode magnétique) $\frac{K\omega_s}{2}$, donc l'énergie totale d'un oscillateur harmonique est de $3K\omega_s$. Pour une paire (électron-positon) oscillant indépendamment on a $6K\omega_s$.

D'autre part, l'énergie moyenne de déplacement du centre de masse de la paire est de $3K\omega_s$, donc au total on aura une énergie de $9K\omega_s$.

C'est l'énergie de matérialisation du rayonnement que nous écrivons égale à celle d'un atome d'hydrogène, d'où

$$m_H c^2 = 9K\omega_s = \frac{27mc^3}{2e^2} K \quad (72)$$

soit

$$\frac{cK}{e^2} = \frac{2}{27} \cdot \frac{m_H}{m} \cong 136,08 \quad (73)$$

légèrement inférieur à la valeur admise, si on remplace K par \hbar .

L'ÉLECTRODYNAMIQUE STOCHASTIQUE DE LA MATIÈRE

Ainsi, la notion du champ de zéro et l'hypothèse, très vraisemblable, de la matérialisation nous conduisent à considérer l'E. D. S. en présence de la matière. Dans ce domaine la relation entre le champ de zéro et la gravitation revêt une importance particulière. Ce qui nous conduit à proposer un modèle électromagnétique de la gravitation.

Pour mettre à l'épreuve ce modèle, il nous a paru intéressant de l'appliquer à des phénomènes aussi différents que possible. C'est ainsi que nous étudierons successivement : le champ magnétique des corps tournants, l'énergie rayonnée sous forme d'ondes de gravitation par un corps en mouvement et le bruit de fond cosmique.

Les résultats de ces études nous permettent d'expliquer certaines « coïncidences numériques » signalées par Dirac [29] et dont la liste est donnée dans le livre de Bondi [30].

Ce chapitre comprend les paragraphes suivants :

- a. L'esquisse d'un modèle électromagnétique de la gravitation.
- b. Le champ magnétique des corps tournants.
- c. L'énergie rayonnée sous forme d'ondes de gravitation par des corps en mouvement.
- d. Un modèle du bruit de fond cosmique.
- e. Les coïncidences numériques.

a. Esquisse d'un modèle E. M. de la gravitation.

Le modèle proposé ci-après est fondé sur la notion de matérialisation du rayonnement du champ de zéro. Pour simplifier le développement ultérieur, on admet que les atomes d'hydrogène neutres créés sont distribués dans l'Univers d'une façon homogène et isotrope et que l'Univers obéit au Principe Cosmologique.

Pour nous permettre d'élaborer un formalisme on considère le mécanisme suivant : le champ de zéro, dont la valeur moyenne est nulle, se propage dans un Univers sphérique de rayon \mathcal{R} . Son action de matérialisation est équivalente à la création, à l'emplacement de chaque atome d'hydrogène, de deux charges de signes contraires se déplaçant dans deux directions opposées, constituant ainsi un dipôle induit fluctuant. Les dipôles induits créent, à leur tour, un champ E. M. fluctuant.

Les forces résultantes de ces champs, agissant entre atomes, sont des forces d'attraction. Des forces similaires sont connues sous le nom de forces de dispersion de London. Ici, toutefois, il ne s'agit pas de forces d'attraction entre deux atomes isolés, mais il faut tenir compte de la présence de tous les autres atomes d'hydrogène de l'Univers.

Le calcul de ces forces entre deux atomes d'hydrogène, en présence de tous les autres atomes de l'Univers est, du moins en principe, bien défini ; mais il implique des difficultés mathématiques considérables. La méthode adoptée ici nous permet de tourner ces difficultés.

On calcule l'énergie électrostatique propre de l'atome d'hydrogène due aux charges fluctuantes en présence de tous les autres atomes de l'Univers (on tient compte ainsi du Principe de Mach) et on identifie cette énergie à l'énergie gravitationnelle de l'atome. Ce modèle permet de calculer la valeur de la constante de gravitation G .

Du point de vue énergétique l'interaction de l'onde E. M. incidente avec les deux charges de signes contraires se déplaçant dans deux directions opposées est équivalente à l'interaction avec une seule charge de même amplitude mais d'une durée double.

Soit $e(t)$ la valeur instantanée de la charge, $e(t)$ est, pour simplifier les choses, une impulsion rectangulaire de durée θ et d'amplitude e , où e est la valeur de la charge élémentaire.

Pour calculer l'énergie électrostatique propre, due aux charges fluctuantes, de l'atome d'hydrogène en présence de tous les atomes de l'Univers, on considère la fonction d'autocorrélation

$$\gamma_\tau = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)e(t + \tau)dt \quad (1)$$

Par définition mathématique, l'intégrale (1) doit être prise avec la limite supérieure $T \rightarrow \infty$. Cette condition, toutefois, n'a pas de sens physique. Ici on désire tenir compte de tous les atomes de l'Univers, ce qui dans le modèle considéré, correspond à la propagation des ondes E. M. fluctuantes jusqu'aux limites de l'Univers et leur retour à l'atome considéré. T sera donc le temps de propagation pour aller aux limites de l'Univers et retour. On a

$$T = 2R/c \quad [31].$$

θ étant très court, γ_τ n'a de valeur notable que pour $\tau = 0$ de sorte que

$$\gamma_{\tau=0} = \frac{1}{T} \int_0^T e^2(t)dt = \frac{e^2\theta}{T} \quad (2)$$

Comme il a été dit plus haut, on identifie l'énergie électrostatique propre, obtenue en utilisant l'équation (2), à l'énergie gravitationnelle propre de l'atome de l'hydrogène déduite de la théorie de Newton. D'où

$$\epsilon_0 \frac{e^2\theta}{T} = Gm_H^2 \quad (3)$$

m_H est la masse de l'hydrogène, ϵ_0 la constante diélectrique du vide et G la constante de gravitation. A partir de (3) on obtient pour G

$$G = \frac{2\epsilon_0 e^2 a_0}{Rm_H^2} \quad (4)$$

où θ est le temps que met l'onde E. M. à parcourir deux fois le diamètre de l'atome de l'hydrogène.

Prenons les valeurs numériques suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= 1,3 \cdot 10^{10} \text{ a. l.} \cong 1,3 \cdot 10^{28} \text{ cm}, & a_0 &= 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}, & \varepsilon_0 &= 1 \\ e &= 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ u. e. s.}, & m_{\text{H}} &= 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g} \end{aligned}$$

on obtient

$$G = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ dynes.cm}^2 \cdot \text{g}^{-2}$$

en bon accord avec la valeur généralement admise.

b. Le champ magnétique des corps tournants.

Les considérations précédentes nous permettent de calculer l'énergie magnétique des corps tournants. On envisage les configurations représentatives suivantes :

— Cas d'un disque circulaire de rayon R et d'épaisseur h , tournant à une vitesse angulaire ω autour de son axe de symétrie. Pour simplifier les calculs on considère le cas où $h/R \ll 1$, ce qui est, approximativement, le cas de notre galaxie.

La valeur instantanée du champ magnétique créé au centre du disque par un élément de courant di de section $h dr$, situé à une distance r de l'axe est

$$dH(t) = \frac{2\pi di}{cr} = \frac{2\pi n\omega h e(t) dr}{c} \quad (5)$$

où n est le nombre d'atomes d'hydrogène par unité de volume

$$n = M/\pi R^2 h m_{\text{H}}$$

M étant la masse totale du disque.

Considérons maintenant l'expression suivante

$$dH(t) \cdot dH(t + \tau) = \frac{1}{c^2} 2\pi n\omega h dr \cdot 2\pi n\omega h dr' e(t)e'(t + \tau)$$

d'où on tire la fonction d'autocorrélation

$$\langle H(t)H(t + \tau) \rangle_{\tau} = \frac{4\pi^2 n^2 \omega^2 h^2}{c^2} \int_0^{r'} dr \int_0^R dr' \frac{1}{T} \int_0^T e(t)e'(t + \tau) dt \quad (6)$$

Cette fonction d'autocorrélation comprend deux termes distincts :

- le terme relatif au même atome : $r = r'$, $e(t + \tau) = e'(t + \tau)$;
- le terme relatif aux atomes différents $r \neq r'$.

Du fait que les fluctuations sont aléatoires le deuxième terme est nul.

Tenant compte des considérations du paragraphe précédent l'équation (6) n'a de valeur notable que pour $\tau = 0$, et que

$$e(t + \tau) = e'(t + \tau),$$

d'où

$$\langle H^2 \rangle = \frac{2\pi^2 n^2 \omega^2 h^2}{c^2} \cdot R^2 \cdot \frac{e^2 \theta}{T} \quad (7)$$

Les équations (3) et (7) nous donnent pour $\langle H^2 \rangle$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{2G}{c^2} \cdot \frac{M^2 \omega^2}{R^2} [32] \quad (8)$$

— Cas d'une sphère de masse M , rayon R , tournant à une vitesse angulaire ω autour d'un axe passant par son centre.

Le champ magnétique instantané créé au centre de la sphère par un courant circulaire di situé à une distance r de l'axe et à une hauteur z au-dessus de l'équateur est

$$dH(t) = \frac{2\pi r^2 di}{c(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi n \omega r^3 e(t)}{c(r^2 + z^2)^{3/2}} dr dz \quad (9)$$

Utilisant l'expression suivante

$$dH(t)dH(t + \tau) = \frac{4\pi^2 n^2 \omega^2 e(t)e'(t + \tau)}{c^2} \cdot \frac{r^3 dr dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{r'^3 dr' dz'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

et procédant de la même manière que plus haut, on obtient

$$\langle H^2 \rangle = \frac{1}{8} \cdot \frac{G}{c^2} \cdot \frac{M^2 \omega^2}{R^2} \quad (10)$$

— Cas d'un corps massif en mouvement linéaire uniforme. Ici la fonction d'autocorrélation

$$\langle H(t)H(t + \tau) \rangle_\tau = \left\langle H(t)H\left(t + \frac{x}{v}\right) \right\rangle_{x/v}$$

relative à un point fixe sur l'axe des x , où v est la vitesse de translation le long de cet axe, doit être nulle pour toutes les valeurs de $v \neq \infty$. On en déduit que l'énergie magnétique et, partant, le champ magnétique, créés par un corps massif en mouvement linéaire uniforme sont nuls.

De ce qui précède on voit que le mécanisme élémentaire responsable du champ magnétique est un processus aléatoire ayant un temps de corré-

lation très court θ . Toutefois le corps tournant possède une constante de temps électromagnétique d'un ordre de grandeur très différent de θ . Par exemple pour une sphère de rayon R , de conductibilité électrique σ et de perméabilité μ , la constante de temps calculée par Lamb [33] est $T_L = \frac{4\sigma\mu R^2}{\pi}$. Pour la terre $T_L \cong 10^5$ années.

On est confronté ici avec un cas similaire à un galvanomètre soumis à des fluctuations électriques de très courte durée mais qui fluctue comme un ensemble avec sa propre constante de temps.

Les fluctuations du champ magnétique d'un corps tournant diffèrent, cependant, de celles de la déviation d'un galvanomètre du fait que le champ magnétique est dû à un « phénomène coopératif », de sorte que des retournements du champ magnétique peuvent intervenir dans un temps plus court que la constante de temps de Lamb T_L .

L'amplitude du champ magnétique le long de l'axe de rotation du corps est la résultante d'une intégration pendant un temps T_L , d'un grand nombre d'événements. Ces événements sont aléatoires dans le temps et en signe (parallèles ou antiparallèles à l'axe de rotation), la valeur moyenne du champ résultant, prise pendant un temps grand comparé à T_L , doit être nulle.

On peut alors résumer comme suit les résultats du modèle.

— Le champ magnétique d'un corps tournant est dû à un processus aléatoire dont le résultat est un champ dipolaire. Le dipôle coïncide avec l'axe de rotation (direction inversée) ou il est dans la direction opposée (direction normale).

— Les valeurs absolues des amplitudes moyennes du champ dans la direction normale et la direction inversée sont égales.

— La valeur moyenne du champ, intégrée sur un temps long comparé à la constante de temps de Lamb T_L , est nulle.

— Les passages par zéro du champ magnétique ont lieu à des instants distribués au hasard.

Il paraît intéressant de comparer les conséquences de la théorie précédente à celles que l'on peut tirer des théories actuelles du champ magnétique ainsi qu'aux résultats expérimentaux. La comparaison avec les résultats expérimentaux revêt une grande importance si on tient compte des difficultés que l'on éprouve à concevoir et à réaliser des expériences liées à la gravitation.

La théorie actuelle, la mieux connue, du champ magnétique, la « théorie de la dynamo » a été proposée par Bullard [34] et Elsasser [35]. Fondée

sur des considérations magnétohydrodynamiques cette théorie rencontre de grandes difficultés mathématiques [36].

Une autre approche dont la comparaison avec notre modèle paraît intéressante est celle due à Blackett [37]. Il a proposé une formule empirique liant le moment magnétique d'un corps tournant à son moment angulaire. Cette formule est

$$H = \beta \cdot \frac{G^{1/2}}{c} \cdot \frac{M\omega}{R} \quad (11)$$

où β est un coefficient numérique de l'ordre de un.

Les objections à la formule de Blackett sont essentiellement les suivantes [38]:

1° Les mesures du gradient du champ géomagnétique effectuées dans des puits de mine profonds, ont montré que le champ augmenterait avec la profondeur. Ceci est en contradiction avec les prévisions de Blackett.

2° Blackett a exposé [39] les résultats d'une « expérience négative » au cours de laquelle un magnétomètre astatique très sensible n'a pu détecter le champ magnétique supposé exister près d'un cylindre en or massif tournant avec la terre.

3° Les renversements du sens du champ magnétique terrestre, mis en évidence par des mesures paléomagnétiques [40] sont une objection majeure à la formule de Blackett.

Les objections ci-dessus à la formule empirique de Blackett ne s'appliquent pas au modèle décrit ici. En effet

1° L'équation (10) donne la valeur du dipôle magnétique au centre de la sphère en rotation. La valeur du champ décroît quand on s'éloigne du centre; ceci est en accord avec les indications expérimentales.

2° Analysons l'« expérience négative » de Blackett.

Un cylindre en or massif de $R = 5$ cm, $h = 10$ cm et $M = 15\,000$ g au repos dans le laboratoire mais tournant avec la terre autour de l'axe de rotation de la terre, c'est-à-dire avec $\omega \cong 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ crée un champ magnétique en son centre de l'ordre de (équation (10)).

$$\sqrt{\langle H^2 \rangle} \cong \frac{1}{3} \cdot \frac{G^{1/2}}{c} \cdot \frac{M\omega}{R} = 0,7 \cdot 10^{-15} \text{ gauss}$$

La sensibilité du magnétomètre utilisé était de quelque 10^{-10} gauss. Les résultats expérimentaux devaient *naturellement* être négatifs, d'autant plus que le temps de réponse du magnétomètre était de 30 secondes, trop long comparé à la constante de temps de Lamb du cylindre.

3° Les renversements du sens du champ magnétique terrestre constituent une objection majeure à la formule de Blackett, laquelle implique que la direction du champ est liée à celle de la rotation de la terre d'une façon univoque. Les renversements du sens du champ magnétique font partie intégrante du modèle étudié ici.

Swann et Longacre [41] ont fait tourner une sphère en cuivre de 20 cm de diamètre à 200 tours par seconde, sans détecter un champ magnétique. Toutefois, la sensibilité de leur détecteur, de l'ordre de 10^{-4} gauss, était trop faible pour détecter le champ prévu par l'équation (10).

On peut montrer qu'il est possible de concevoir une expérience de laboratoire qui permettrait la vérification de la théorie exposée plus haut. Toutefois, avant d'effectuer une telle expérience, il nous a paru nécessaire de comparer les prévisions de la théorie avec les résultats de mesures faites sur le champ magnétique terrestre [42].

Un grand nombre de mesures, utilisant les méthodes paléomagnétiques, ont été effectuées au cours des deux dernières décennies. Ces mesures ont été récemment corroborées par des mesures faites sur des carottes prélevées sur les fonds sédimentaires des océans [40].

La figure 1 donne la variation du champ magnétique terrestre pour les $4,5 \cdot 10^6$ dernières années. On distingue quatre « époques ».

— Les deux époques normales, nommées d'après Brunhes et Gauss, où le champ magnétique a la même direction que celle qu'il a actuellement.

— Les deux époques inversées, nommées d'après Matuyama et Gilbert, où le champ magnétique a une direction opposée.

On distingue, en outre, de nombreux « événements » :

— Les événements normaux : Jaramillo, Gilsa et Olduvai se produisant pendant l'époque de Matuyama ; Cochiti et Nunivak se produisant pendant l'époque de Gilbert. Un troisième événement de cette époque n'a pas été nommé.

— Les événements inversés : Laschamp qui s'était produit pendant l'époque normale de Brunhes ; Kaena et Mammoth se produisant pendant l'époque de Gauss.

Les événements sont nommés d'après les localités où ils ont été observés pour la première fois. Le classement en « époques » et « événements » est un fait historique (les époques ont été découvertes avant les événements) et n'indique pas qu'il y ait une différence de nature entre les deux classes.

Les instants de passage (déterminés, en particulier, par la méthode de potassium/argon) d'une époque à une autre, et les instants du milieu des « événements » sont bien déterminés.

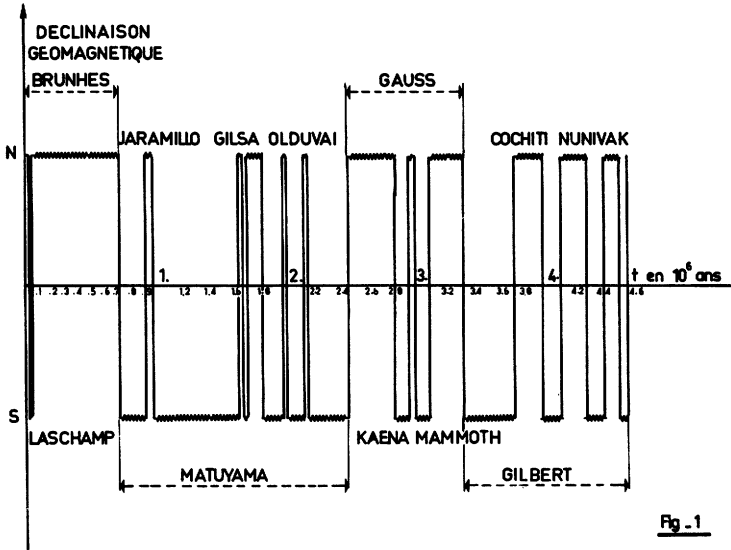


FIG. 1.

Comparons maintenant les prévisions de la théorie avec les mesures :

— Les expériences de Harrison et Somayajulu [43] ont montré que si la valeur instantanée de l'angle de déclinaison du champ magnétique par rapport à l'axe de rotation de la Terre, n'est pas nulle ; sa valeur moyenne prise dans les plans méridiens est nulle. La non-coïncidence du dipôle magnétique avec l'axe de rotation apparait comme une perturbation ayant une valeur moyenne nulle.

— Les composantes axiales du champ magnétique dans le sens normal et inversé ne sont pas constantes. Les mesures ont montré que les fluctuations sont faibles et que les amplitudes moyennes sont les mêmes dans les deux sens.

— On voit sur la figure 1 que la valeur moyenne du champ magnétique (considéré comme positif dans le sens normal et négatif dans le sens inversé) est nulle à 5 % près. Le calcul a été fait pour les $4,5 \cdot 10^6$ dernières années (la constante de temps de la Terre, selon Lamb, est de 10^5 ans). La durée moyenne entre deux passages par zéro est de $0,18 \cdot 10^6$ ans. Le renversement de la direction du champ se fait en moins de 5 000 ans [43].

— Pour vérifier la prévision concernant les passages par zéro du champ magnétique on considère les deux tests suivants :

a) On trace la courbe donnant le nombre total des passages par zéro pendant un intervalle de temps fixe $\Delta t = t_1 - t$, en fonction de t . On trouve

une courbe qu'on peut représenter par une droite à partir de laquelle on déduit le temps moyen entre deux passages successifs par zéro : $0,18 \cdot 10^6$ ans. Ce premier test montre qu'il n'y a pas de condensation de points de passages par zéro et que ces passages ne se font pas périodiquement.

b) On considère les intervalles de temps t entre deux passages par zéro et on les classe par ordre de grandeur. Traçons la courbe donnant $\log_e N$ en fonction de t , où N est le nombre d'intervalles supérieurs à une valeur donnée de t . Si la loi de distribution des instants de passage par zéro est un processus de Poisson stationnaire, on doit trouver [44]

$$\log_e N = \log_e K - \frac{t}{t_0} \tag{12}$$

où t_0 est la valeur moyenne de t .

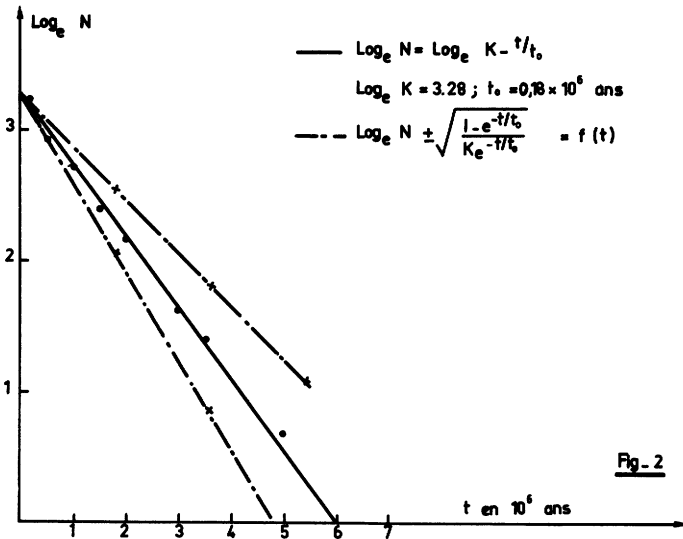


FIG. 2.

Sur la figure 2 on a tracé la courbe $\log_e N = f(t)$. On trouve que la droite $K = 26.7$, $t_0 = 0,18 \cdot 10^6$ ans est bien compatible avec les points expérimentaux. Sur la même figure on a tracé les courbes

$$\log_e N \pm \sqrt{\frac{1 - e^{-t/t_0}}{K e^{-t/t_0}}} = f(t) \tag{13}$$

représentant les écarts type de la distribution de Poisson. On constate que les points expérimentaux sont bien situés entre les deux courbes.

Il en résulte que les instants de passage par zéro du champ magnétique satisfont à la condition nécessaire d'une distribution obéissant à un processus de Poisson stationnaire.

Cette comparaison entre les résultats des mesures paléomagnétiques et la théorie nous montre qu'un accord substantiel existe entre les deux ; notons, en plus, que la valeur du champ dipolaire terrestre si on admet que la terre tourne comme un solide à la vitesse angulaire ω , est donnée par

$$\sqrt{\langle H^2 \rangle} \cong \frac{1}{3} \cdot \frac{G^{1/2}}{c} \cdot \frac{M\omega}{R} = 1,8 \text{ gauss.}$$

Considérons, maintenant, le cas où le champ magnétique a un tout autre ordre de grandeur que celui de la terre. Prenons une étoile à neutrons $R = 10 \text{ km} = 10^6 \text{ cm}$. $M = M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$ et calculons la valeur de $\sqrt{\langle H^2 \rangle}$ pour $\omega_1 = \pi \cdot s^{-1}$. On a

$$\sqrt{\langle H^2 \rangle} \cong \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 57 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot \pi}{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^6} = 1,8 \cdot 10^{13} \text{ gauss}$$

Pour une étoile à neutrons tournant 10 fois plus vite autour de son axe de rotation, $\sqrt{\langle H^2 \rangle}$ est de $1,8 \cdot 10^{14}$ gauss.

Il est généralement admis qu'une étoile à neutrons possède un champ magnétique de cet ordre. On obtient un tel champ en admettant, sans d'ailleurs justifier l'hypothèse, que pendant la contraction d'une étoile du type solaire à une étoile à neutrons le flux du champ magnétique de l'étoile d'origine se conserve ; de sorte que l'on ait $R^2 H = \text{cte}$.

Il paraît douteux qu'on puisse invoquer un seul et même mécanisme du type « théorie de la dynamo » et pour l'étoile d'origine et pour l'étoile à neutrons.

La conservation du flux du champ magnétique découle de l'équation (10) si on admet que l'énergie cinétique de l'étoile reste constante [45]. Bien entendu le mécanisme invoqué ici est le même pour tout corps tournant.

La constante de temps de Lamb $T_L = \frac{4}{\pi} \sigma \mu R^2$. On a $\sigma = \frac{mc}{e^2}$ et on admet que $\mu = 1$, d'où

$$T_L = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{mc}{e^2} \right) R^2 = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ sec} \cong 5,5 \cdot 10^6 \text{ ans}$$

un temps relativement long.

c. L'énergie rayonnée sous forme d'ondes de gravitation par des corps en mouvement.

Les solutions de ce type de problème ne peuvent être trouvées que dans le cadre de la Relativité Générale. Nous allons montrer que la notion du champ de zéro et le formalisme simple établi dans le paragraphe précédent nous permettent de résoudre un exemple d'un tel problème.

Considérons un cylindre plat de masse M , de rayon r_0 et de hauteur l , tournant autour de son axe de symétrie à une vitesse angulaire ω et, soit P un point dans le plan de l'équateur situé à une distance $OP = R_0$ du centre du cylindre. R_0 est très grand comparé à toutes les autres longueurs considérées.

Soit \vec{n} le vecteur unitaire le long de la droite OP et ωt l'angle de rotation compté à partir de cette droite.

D'après le modèle de gravitation, esquissé plus haut, le rayonnement par ondes de gravitation s'effectue en fait par ondes électromagnétiques en interaction avec « l'absorbeur ».

Suivant Wheeler et Feynman (1.c) le potentiel vecteur créé au point P par une charge ayant une vitesse \vec{v} , se trouvant à une distance r de l'axe du cylindre, est donné par la demi-différence entre le potentiel retardé et le potentiel avancé. On a [14]

$$\delta\vec{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\vec{v}}{cR_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}} - \frac{1}{1 + \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}} \right] \quad (14)$$

Limitons-nous au cas considéré en Relativité Générale, où $v/c \ll 1$. On a

$$\delta\vec{A} = \frac{e\vec{v} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{v})}{c^2 R_0} = \frac{e\vec{v}r\omega \sin \omega t}{c^2 R_0} \quad (15)$$

Pour une valeur donnée de r , \vec{v} est constante, d'où

$$\delta\vec{\dot{A}} = \frac{e\vec{v}r\omega^2 \cos \omega t}{c^2 R_0} \quad (16)$$

Le champ magnétique δh créé en P est

$$\delta h = \frac{1}{c} \delta\vec{\dot{A}} \wedge \vec{n} = \frac{er^2\omega^3}{c^3 R_0} \cos^2 \omega t \quad (17)$$

Soit n le nombre d'atomes d'hydrogène par unité de volume,

$$n = M/\pi r_0^2 l m_H,$$

M étant la masse totale du cylindre.

Pour une couronne de hauteur l à r de l'axe et d'épaisseur dr on a

$$dH = \frac{ner^2l\omega^3 \cdot 2\pi r dr}{c^3 R_0} \cos^2 \omega t$$

Considérons l'expression

$$dH(t)dH(t + \tau) = \frac{4\pi^2 n^2 l^2 \omega^6}{c^6 R_0^2} \cos^2 \omega t \cdot \cos^2 \omega(t + \tau) r^3 dr r'^3 dr' e(t)e'(t + \tau)$$

D'où on tire

$$\begin{aligned} \langle H(t)H(t + \tau) \rangle &= \frac{4\pi^2 n^2 l^2 \omega^6}{c^6 R_0^2} \langle \cos^2 \omega t \cdot \cos^2 \omega(t + \tau) \rangle \\ &\quad \cdot \int_0^{r'} r^3 dr \int_0^{r_0} r'^3 dr' \frac{1}{T} \int_0^T e(t)e'(t + \tau) dt \quad (18) \end{aligned}$$

La dernière intégrale n'a de valeur notable que pour $\tau = 0$, dans ce cas $\cos \omega t$ diffère peu de $\cos \omega(t + \tau)$; on obtient en utilisant le procédé décrit plus haut

$$\langle H(t)H(t + \tau) \rangle_{\tau=0} = \frac{4\pi^2 n^2 \omega^6 l^2}{c^6 R_0^2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{r_0^8}{32 T} e^2 \theta \quad (19)$$

Or, comme $\frac{e^2 \theta}{T} = Gm_H^2$ et $n = M/\pi r_0^2 l m_H$ l'équation (19) devient

$$\langle H^2 \rangle = \frac{3}{64} G \frac{r_0^4 \omega^6 M^2}{c^6 R_0^2} \quad (20)$$

La puissance reçue dans un angle solide de 4π à la distance R_0 est

$$P = \frac{c}{4\pi} \langle H^2 \rangle \cdot 4\pi R_0^2 = \frac{3}{64} \frac{G r_0^4 M^2 \omega^6}{c^5} \quad (21)$$

Soit I le moment d'inertie du corps. $I = \frac{1}{2} r_0^2 \cdot M$ d'où

$$P = \frac{3}{16} G \frac{I^2 \omega^6}{c^5} \quad (22)$$

L'équation (22) a la même forme que celle obtenue en Relativité Générale pour un barreau tournant [46].

L'énergie cinétique de rotation du corps est

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} r_0^2 M \omega^2,$$

la constante de temps de déperdition de l'énergie de rotation du corps par ondes de gravitation est

$$\Theta = \frac{\frac{1}{4} r_0^2 M \omega^2}{\frac{3}{64} \frac{G r_0^4 M^2 \omega^6}{c^5}} = \frac{16}{3} \frac{c^5}{G r_0^2 M \omega^4} \quad (23)$$

Considérons le cas d'une étoile à neutrons

$$M = M_{\odot} = 2.10^{33} \text{ g} \quad r_0 = 10^6 \text{ cm} \quad \omega = \pi \cdot \text{s}^{-1}$$

on a

$$\Theta = \frac{16}{3} \cdot \frac{3^5 \cdot 10^{50}}{6,6 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{22} (\pi)^4} \cong 10^{13} \text{ s, soit } 3 \cdot 10^5 \text{ ans}$$

Pour une étoile tournant 10 fois plus vite Θ serait de 30 ans [47].

d. Le bruit de fond cosmique.

En 1965, Penzias et Wilson ont publié les résultats de leurs mesures du bruit de fond cosmique à 4 080 MHz [48]. Depuis, plusieurs expérimentateurs ont étendu la gamme des fréquences étudiées. Actuellement des résultats de mesures sur une gamme de fréquences de l'ordre de 1 000/1 ont été obtenues [49].

Dicke et ses collaborateurs [50], fondant leurs considérations sur des raisonnements cosmologiques, ont prévu, même avant que Penzias et Wilson aient effectué leurs mesures, l'existence d'un rayonnement cosmique dans la bande de fréquences micro-ondes. Ils ont construit des équipements destinés à des mesures à ces fréquences et leurs résultats ont été présentés dans plusieurs publications [49].

L'interprétation proposée par Dicke et ses collaborateurs de ce bruit de fond cosmique est basée sur la cosmologie dite la « boule de feu » (Primeval Fire Ball). Le bruit de fond micro-onde est ce qui reste des rayons gamma de grande énergie créés dans l'Univers quand il était condensé dans un volume très faible. Après quelques 10^{10} ans d'expansion l'énergie des rayons gamma s'est dégradée pour devenir celle des micro-ondes. Le bruit de fond cosmique correspondrait au rayonnement d'un corps noir à la température de 2,7° K, déduite des mesures expérimentales dans la bande des ondes centimétriques.

La théorie de Dicke est séduisante par sa simplicité. Cependant elle ne rend pas compte des observations faites dans l'infra-rouge.

Wolfe et Burbidge [51] développant une idée due à Sciamia [52] ont

attribué le bruit de fond cosmique à des rayonnements émis par une population de galaxies ayant une distribution spectrale et une luminosité répondant à des critères bien définis.

Cette théorie a été combattue par Penzias et coll. [53] au vu des expériences effectuées sur les fluctuations du nombre des galaxies observé dans le faisceau de leur récepteur. Les fluctuations sont si faibles que l'on doit admettre que la densité des galaxies spéciales requises par Wolfe et Burbidge est égale ou supérieure à la densité de toutes les galaxies.

D'autres interprétations ont été avancées de ce phénomène. On trouvera une liste de références dans l'article de Wolfe et Burbidge [51].

Dans le cadre de cet exposé nous attribuons le bruit de fond à l'action du champ de zéro de l'Univers.

Soit E et H les champs électrique et magnétique fluctuants. Suivant les notions introduites au paragraphe *a*, l'énergie du champ de zéro est l'énergie propre de l'Univers et on a :

$$\frac{\mathcal{V}}{8\pi} (\varepsilon \langle E^2 \rangle + \mu \langle H^2 \rangle) = \mathcal{M} \cdot c^2$$

où \mathcal{V} est le volume et \mathcal{M} la masse de l'Univers. La densité de l'énergie est

$$\frac{1}{8\pi} (\varepsilon \langle E^2 \rangle + \mu \langle H^2 \rangle) = \rho \cdot c^2 \quad (25)$$

où $\rho = \mathcal{M}/\mathcal{V}$ est la densité matière de l'Univers.

Du fait de l'équipartition entre l'énergie électrique et magnétique, on a

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \rho \cdot c^2 \quad (26)$$

Le flux moyen du champ E. M. fluctuant est

$$\Phi = \frac{\varepsilon c}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \rho \cdot c^3 \quad (27)$$

Dans l'analyse spectrale du flux Φ on doit tenir compte des deux aspects suivants :

1° Le champ E. M. fluctue avec un temps de corrélation donné par

$$\tau = \frac{d}{c} = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{m_H}{\rho} \right)^{1/3} \quad (28)$$

où d est la distance entre deux atomes d'hydrogène voisins.

Prenons pour la densité $\rho = 10^{-31} \text{ g.cm}^{-3}$ [54], on a $d = 250 \text{ cm}$ et $\tau = 8.3 \cdot 10^{-E} \text{ s}$.

On sait [10] que des fluctuations avec un temps de corrélation τ intro-

duisent dans l'expression de la densité spectrale, Φ_ν , un terme de la forme $\frac{Cte}{4\pi^2\tau^2\nu^2 + 1}$. Pour toutes les fréquences qui nous intéressent on a

$$4\pi^2\tau^2\nu^2 \ll 1$$

de sorte que ce terme devient Cte/ν^2 .

2° Le champ E. M. fluctuant induit dans l'atome d'hydrogène un dipôle fluctuant. La section efficace de diffusion σ dépend de la fréquence. On a

$$\sigma \propto \nu^4/\alpha^2 \tag{29}$$

A basses fréquences α est indépendant de la fréquence, c'est la diffusion Rayleigh. A fréquences plus élevées, au-delà de la raie de 21,1 cm, α varie comme $1/\nu^2$, la section efficace de diffusion est indépendante de la fréquence, c'est la diffusion Thomson.

Tenant compte de ces aspects, le spectre de fréquence du flux Φ_ν se compose de deux branches

— La « branche Rayleigh »

$$\Phi_{\nu R} = B\nu^2 \tag{30}$$

— La « branche Thomson »

$$\Phi_{\nu T} = C/\nu^2 \tag{31}$$

B et C sont indépendants de ν .

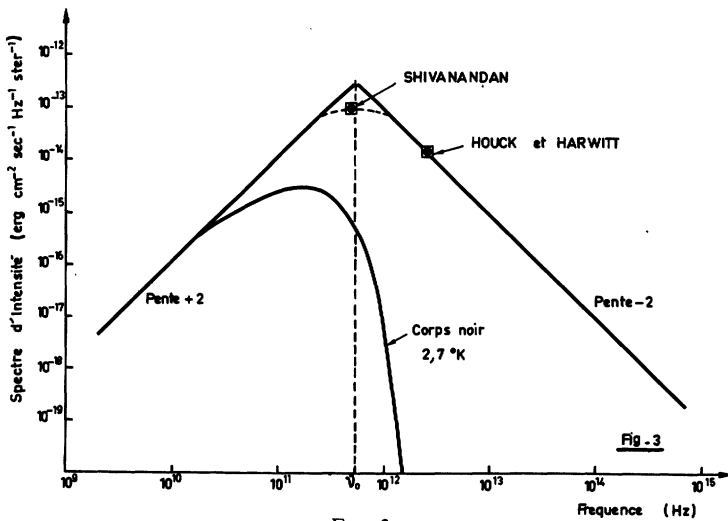


FIG. 3.

Sur la figure 3 on a porté le spectre du bruit de fond cosmique relatif au corps noir à 2,7° K et le spectre déduit du modèle présenté ici.

On définit une fréquence ν_0 , comme la fréquence d'intersection des deux branches de Φ_ν décrites plus haut. On a

$$\Phi_{\nu_{0R}} = \Phi_{\nu_{0T}} = B\nu_0^2 = C/\nu_0^2$$

d'où

$$C = B\nu_0^4.$$

Pour déterminer B et ν_0 on procède comme suit :

On ajuste $\Phi_{\nu_{0R}}$ à la courbe expérimentale [55]. On trouve alors $B = 1,4 \cdot 10^{-35}$. Pour déterminer ν_0 on écrit l'équation du flux total :

$$\rho c^3 = \int_0^{\nu_0} B\nu^2 d\nu + \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{B\nu_0^4}{\nu^2} d\nu = \frac{4}{3} B \cdot \nu_0^3 \quad (32)$$

d'où

$$\nu_0^3 = \frac{3}{4} \rho c^3 / B; \quad \nu_0 = 5,26 \cdot 10^{11} \text{ Hz, ou } \lambda_0 = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

On constate que la courbe relative au modèle tient compte raisonnablement bien des mesures faites dans l'infra-rouge.

La densité de l'énergie est de $56 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3}$, elle est de deux ordres de grandeurs supérieure à celle déduite de la courbe du corps noir à $2,7^\circ \text{ K}$, mais elle est de même ordre de grandeur que celle trouvée par Wolfe et Burbidge.

On peut évaluer la contribution de ce modèle à la lumière diffuse dans le spectre visible de 0,4 à 0,8 microns. On trouve

$$\Phi_{\text{vis}} = 0,14 \cdot 10^{-2} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

et une densité d'énergie de $4,7 \cdot 10^{-14} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$, de l'ordre de 5 % de la densité de l'énergie de la lumière du ciel nocturne.

On peut, de même, calculer la densité du rayonnement diffus des rayons X. Dans la bande comprise entre 1 et 13 keV on trouve des résultats comparables à ceux trouvés expérimentalement par Gorenstein et coll. [56].

e. Les coïncidences numériques.

Dirac [29] a noté certaines coïncidences numériques que l'on obtient en faisant le rapport entre des grandeurs cosmologiques et atomiques.

Bondi [30] a donné une liste de quatre « coïncidences numériques » qui sont les suivantes :

$$\frac{e^2}{Gm_{\text{H}}m} = 0,23 \cdot 10^{40} \quad (33)$$

$$\frac{cT}{\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)} \cong 4 \cdot 10^{40} \quad (34)$$

$$\frac{\rho c^3 T^3}{m_H} \cong 10^{80} \quad (35)$$

$$G \cdot \rho \cdot T^2 \cong 1 \quad (36)$$

ρ est la densité moyenne de la matière dans l'Univers, T est la réciproque de la constante de Hubble et $cT = \mathcal{R}$ est le « rayon » de l'Univers.

Ces relations ne sont pas indépendantes, en effet la quatrième s'obtient en divisant la troisième par le produit des deux premières. La troisième donne le rapport de la masse totale de l'Univers à la masse de l'atome de l'hydrogène, ou le nombre d'atomes d'hydrogène de l'Univers. En dehors de ces remarques les coïncidences numériques restent inexplicées.

Nous basant sur ce qui précède, nous allons établir les deux premières relations.

Considérons la diffusion Thomson du paragraphe précédent. Le flux diffusé est $\rho c^3 f(\nu)$, où $f(\nu)$ est une fonction de la fréquence telle que l'on ait

$$\int_{\nu_0}^{\infty} f(\nu) d\nu = 3/4 \quad (\text{voir équation (32)})$$

La section efficace de diffusion Thomson est

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2$$

et l'énergie rayonnée par unité de temps par un atome d'hydrogène est

$$\rho c^3 \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 f(\nu).$$

Pendant le temps T l'énergie rayonnée est

$$\rho \cdot c^3 \cdot \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot T \cdot f(\nu).$$

Soit N le nombre d'atomes d'hydrogène dans l'Univers et soit $\mathcal{R} = cT$ le rayon de l'Univers, la densité de l'énergie est alors

$$\frac{N \rho c^3 \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 T \int_0^{\infty} f(\nu) d\nu}{\frac{4\pi}{3} \mathcal{R}^3} = \frac{3}{4} \rho c^2 \quad (37)$$

d'où

$$\frac{\mathcal{R}}{\left(\frac{e}{mc^2}\right)} = 1,4 \cdot N^{1/2} \quad (38)$$

l'équation (38) correspond à l'équation (34) mais ici $N = \frac{4}{3} \pi \mathcal{R}^3 / m_H$ légèrement différent de la valeur donnée par l'équation (35).

Reprenons l'équation (4), on a

$$G\mathcal{R}m_H^2 = 2e^2 \cdot a_0 \quad (39)$$

où a_0 est le « rayon » de l'atome de l'hydrogène.

Utilisant l'équation de Schrödinger du chapitre précédent on trouve l'expression bien connue de a_0

$$a_0 = \frac{K^2}{me^2}$$

d'où

$$G\mathcal{R}m_H^2 = \frac{2K^2}{m} \quad (40)$$

Au chapitre précédent on a trouvé que $m_H = \frac{27}{2} m \frac{cK}{e^2}$; l'équation (40) devient

$$\frac{27}{2} G\mathcal{R}m_H m \frac{cK}{e^2} = \frac{2K^2}{m}$$

d'où

$$\frac{e^2}{Gm_H m} = \frac{\mathcal{R}}{\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)} \cdot \frac{27}{4} \left(\frac{e^2}{Kc}\right) \quad (41)$$

Si on prend pour $\mathcal{R} = 1.3 \cdot 10^{18}$ cm, $\frac{e^2}{Kc} = \frac{1}{136}$ on trouve $\frac{e^2}{Gm_H m} = 0,23 \cdot 10^{40}$ la même valeur que celle donnée par (33).

CONCLUSIONS

Dans ce qui précède nous avons essayé de développer une Electrodynamique Stochastique basée sur la notion du champ de zéro. Au cours de ce développement nous nous sommes astreints à rester dans le cadre de la physique déterministe classique.

Cette étude nous a permis d'établir, d'une part, l'équation de Schrödinger comme l'aboutissement de l'E. D. S. du Vide. D'autre part, après avoir esquissé un modèle E. M. de la gravitation, nous avons établi un formalisme mathématique simple. Ce formalisme nous a permis de traiter trois problèmes de nature très différente : le champ magnétique des corps tournants, l'énergie rayonnée sous forme d'ondes de gravitation par un corps en mouvement, ainsi que le bruit de fond cosmique, enfin nous avons donné une explication raisonnable des coïncidences numériques. Notons que le formalisme établi est en accord avec le Principe de Mach et le Principe d'Équivalence.

A la lumière de cette étude, des expériences nouvelles paraissent réalisables, quoique à la limite des techniques actuelles.

L'Electrodynamique Stochastique résout un nombre de problèmes mais paraît soulever des questions nouvelles. Parmi celles qui nous ont paru intéressantes citons les suivantes :

— L'équation de Schrödinger a été obtenue en partant des considérations classiques de la physique du continu. A partir de l'équation de Schrödinger, utilisant le formalisme de la mécanique quantique, on aboutit à la notion des quanta. Quel serait le sens profond des quanta dans le cadre de l'E. D. S. ?

— La constante K apparaît ici être d'origine classique. Le calcul de K , faisant intervenir des considérations cosmologiques, donne une valeur légèrement différente de celle que l'on obtient pour \hbar à partir des mesures de nature atomique. Cette constante est-elle vraiment différente pour des phénomènes cosmiques et des phénomènes observés en laboratoire ? Il serait intéressant d'envisager des expériences du type cosmologique où K ou \hbar interviennent.

— Quelle est la relation entre la théorie de la gravitation de la Relativité Générale et le modèle E. M. de la gravitation, qui permet d'étudier le rayonnement d'un corps par ondes de gravitation et donne une explication simple des coïncidences numériques ?

Terminons en disant que, sans être affirmatifs, il est possible que nous ayons résolu ici quelques aspects du programme que s'était fixé Einstein, à savoir

— La recherche d'un formalisme « classique » qui permettrait de retrouver les résultats de la mécanique quantique.

— Unifier l'électromagnétisme et la gravitation.

« Notes ajoutées aux épreuves :

— Louis de Broglie (*Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. IX, n° 2, 1968, p. 89) partant de la Mécanique Ondulatoire conclut à l'existence d'un « thermostat caché ». Si on identifie le thermostat caché au champ de zéro, la démarche suivie dans le présent travail est l'inverse de celle de Louis de Broglie. A partir de la notion du champ de zéro on développe, dans le cadre de la physique classique, une Électrodynamique Stochastique qui aboutit à l'équation de Schrödinger.

— Une expérience de laboratoire qui consiste à faire tourner un corps et à mesurer le champ magnétique créé (voir p. 227) a été effectuée. Les résultats expérimentaux confirment les considérations théoriques. »

RÉFÉRENCES

- [1] H. TETRODE, *Z. Physik*, t. **10**, 1922, p. 317.
- [2] J. A. WHEELER et R. P. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys.*, t. **17**, 1945, p. 157.
- [3] P. A. M. DIRAC, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **167**, 1938, p. 148.
- [4] P. BRAFFORT et C. TZARA, *C. R. A. S.*, t. **239**, 1954, p. 1779.
- [5] T. H. BOYER, *Phys. Rev.*, t. **174**, 1968, p. 1631 et 1764; *Phys. Rev.*, t. **180**, 1969, p. 19; *Phys. Rev.*, t. D **1**, 1970, p. 1526.
- [6] M. PLANCK, *The Theory of Heat Radiation* (1912). Dover Publications, 1959.
- [7] T. W. MARSHALL, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **61**, 1965, p. 537.
- [8] T. H. BOYER, *Phys. Rev.*, t. **182**, 1969, p. 1374.
- [9] P. BRAFFORT, M. SURDIN et A. TARONI, *C. R. A. S.*, t. **261**, 1965, p. 4339.
- [10] J. BERNAMONT, *Ann. de Phys.*, t. **7**, 1937, p. 71.
- [11] P. BRAFFORT et A. TARONI, *C. R. A. S.*, t. **264**, série B, 1967, p. 1437.
- [12] M. SURDIN, P. BRAFFORT et A. TARONI, *Nature*, t. **210**, 1966, p. 405.
- [13] T. W. MARSHALL, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **276**, 1963, p. 475.
- [14] L. D. LANDAU et E. M. LIFCHITZ, *Théorie du Champ*, Moscou.
- [15] C. BENEDICKS, *Ann. de Phys.*, t. **40**, 1913, p. 551.
- [16] M. SURDIN, *C. R. A. S.*, t. **270**, série B, 1970, p. 193.
- [17] S. CHANDRASEKHAR, *Rev. Mod. Phys.*, t. **15**, 1943, p. 1.
- [18] W. HEISENBERG, *Z. Physik*, t. **43**, 1927, p. 172.
M. JAMMER, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1966.
- [19] M. SURDIN, *International J. of Theor. Phys.* t. **4**, n° 2, 1971, p. 117.
- [20] J. METADIER, *C. R. A. S.*, t. **193**, 1931, p. 1173.
- [21] R. FÜRTH, *Z. Physik*, t. **81**, 1933, p. 143.
- [22] G. G. COMISAR, *Phys. Rev.*, t. **138 B**, 1965, p. 1332.
- [23] D. KERSHAW. — *Phys. Rev.*, t. **136 B**, 1964, p. 1850.
- [24] E. NELSON, *Phys. Rev.*, t. **150**, 1966, p. 1079.
- [25] DE LA PEÑA-AUERBACH, *Phys. Lett.*, t. **24 A**, 1967, p. 603.
- [26] J. G. GILSON, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **64**, 1968, p. 1061.
- [27] S. HAYAKAWA. — *Prog. Theor. Phys.* (Japon), n° supp., 1965, p. 532.
- [28] E. FERMI, *Notes on Quantum Mechanics*. The University of Chicago Press, 1961.
- [29] P. A. M. DIRAC, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **165**, 1938, p. 199.
- [30] H. BONDI, *Cosmology*. Cambridge University Press, 1961.
- [31] La densité de matière de l'Univers est faible de sorte que la vitesse des ondes E. M. diffère très peu de c .
- [32] On remarque que le Principe d'Équivalence est satisfait, puisque $\langle H^2 \rangle$ est fonction de la masse et non de la composition chimique du corps tournant. A ce sujet voir :
The theoretical Significance of Experimental Relativity.
R. H. DICKE, *Gordon and Breach*, 1964.
- [33] H. LAMB, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, t. **174**, 1883, p. 519.

- [34] E. C. BULLARD, *Proc. Roy. Soc.*, t. A 197, 1949, p. 433.
E. C. BULLARD et H. GILLMAN, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, t. A 247, 1954, p. 213.
- [35] W. M. ELSASSER, *Phys. Rev.*, t. 55, 1939, p. 489.
W. M. ELSASSER, *Rev. Mod. Phys.*, t. 22, 1950, p. 1.
- [36] E. N. PARKER, *Ap. J.*, t. 160, 1970, p. 383.
- [37] P. M. S. BLACKETT, *Nature*, t. 169, 1947, p. 658 ; *Phil. Mag.* xl., 1949, p. 125.
- [38] J. A. JACOBS, *The Earth's Core and Geomagnetism*. Pergamon Press, 1963.
- [39] P. M. S. BLACKETT, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, t. A 245, 1952, p. 309.
- [40] A. COX et coll., *Science*, 26 juin 1964, p. 1537.
G. B. DALRYMPLE et coll., *Earth and Planetary Sci. Lett.*, t. 3, 1967, p. 173.
N. D. OPDYKE et J. H. FOSTER, *Science*, septembre 1967, p. 56.
I. MCDUGAL et F. H. CHAMALAUN, *Nature*, t. 212, 1966, p. 1415.
J. D. SMITH et J. H. FOSTER, *Science*, t. 163, 1969, p. 565.
A. COX, *Science*, t. 163, 1969, p. 237.
- [41] W. F. G. SWANN et A. LONGACRE, *J. Franklin Inst.*, t. 206, 1928, p. 421.
- [42] M. SURDIN, *C. R. A. S.*, t. 267, série B, 1968, p. 1181.
- [43] C. G. A. HARRISON et B. L. K. SOMAYAJULU, *Nature*, t. 212, 1966, p. 1193.
- [44] A. BLANC-LAPIERRE et coll., *Modèles Statistiques pour l'étude de phénomènes de fluctuations*. Masson et Cie, Paris, 1963.
- [45] Les données expérimentales connues indiquent que ni l'énergie cinétique, ni le moment angulaire ne sont conservés pendant la contraction. Cependant, la conservation de l'énergie cinétique se justifie mieux que celle du moment angulaire.
- [46] J. WEBER, *General Relativity and Gravitational Waves*. Interscience Publications.
- [47] L'approximation qui consiste à assimiler l'étoile à neutrons à un cylindre plat n'est pas réaliste. La forme de l'étoile est probablement un ellipsoïde très allongé tournant autour d'un de ses petits axes de symétrie. S'il en est ainsi, la grande courbure de ses extrémités doit empêcher, du fait du déplacement gravitationnel vers le rouge, l'émission des ondes E. M. par les extrémités. Les ondes seraient émises par les faces relativement peu courbées dans un faisceau étroit. Ces remarques peuvent constituer l'amorce d'une théorie de l'émission des ondes E. M. par un pulsar.
- [48] A. A. PENZIAS et R. W. WILSON, *Ap. J.*, t. 142, 1965, p. 419.
- [49] P. G. ROLL et D. T. WILKINSON, *Phys. Rev. Lett.*, t. 16, 1966, p. 405.
T. F. HOWELL et J. R. SHAKESHAFT, *Nature*, t. 210, 1966, p. 1316.
W. J. WELCH et coll., *Phys. Rev. Lett.*, t. 18, 1967, p. 1068.
D. T. WILKINSON, *Phys. Rev. Lett.*, t. 19, 1967, p. 1195.
T. F. HOWELL et J. R. SHAKESHAFT, *Nature*, t. 216, 1967, p. 753.
P. E. BOYNTON et coll., *Phys. Rev. Lett.*, t. 21, 1968, p. 462.
K. SHIVANANDAN et coll., *Phys. Rev. Lett.*, t. 21, 1968, p. 1460.
- [49] J. R. HOUCK et M. HARWITT, *Ap. J.*, t. 157, 1969, p. L 45.
D. MUELNER et R. WEISS, *Phys. Rev. Lett.*, t. 24, 1970, p. 742.
- [50] R. H. DICKE et coll., *Ap. J.*, t. 142, 1965, p. 414.
- [51] A. M. WOLFE et G. R. BURBIDGE, *Ap. J.*, t. 156, 1969, p. 345.
- [52] D. W. SCIAMA, *Nature*, t. 211, 1966, p. 277.
- [53] A. A. PENZIAS et coll., *Ap. J.*, t. 157, 1969, p. L 49.
- [54] A. SANDAGE, *Ap. J.*, t. 133, 1961, p. 355.
G. GAMOW, *Phys. Rev. Lett.*, t. 20, 1968, p. 1310.
Une densité $\rho = 10^{-30} \text{ g/cm}^{-3}$ ne changerait pas l'allure du phénomène mais v_0 sera multipliée par $(10)^{1/3}$.
- [55] Toutes les théories procèdent de la même manière en ajustant les courbes théorique et expérimentale.
- [56] P. GORENSTEIN et coll., *Ap. J.*, t. 156, 1969, p. 315.

Manuscrit reçu le 25 janvier 1971.