

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

B. LINET

Sur l'étude du tenseur de Weyl dans un espace-temps contenant un fluide parfait

Annales de l'I. H. P., section A, tome 15, n° 2 (1971), p. 141-151

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__15_2_141_0

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur l'étude du tenseur de Weyl dans un espace-temps contenant un fluide parfait

par

B. LINET

Laboratoire de Physique Théorique Associé au C. N. R. S.
Institut Henri Poincaré
(34 ter, rue de la Tour d'Auvergne, Paris 9°)

SOMMAIRE. — Relation entre le tenseur impulsion-énergie du fluide parfait et le tenseur de Weyl. Cas où la divergence du tenseur de Weyl est nulle. Cas où le tenseur de Weyl est de type de Petrov N et où le fluide parfait est *a)* sans rotation, *b)* avec équation d'état.

ABSTRACT. — Relation between the energy-momentum tensor and the Weyl tensor. 1) When the Weyl tensor is divergence free. 2) When the Weyl tensor is of the Petrov Type N and the perfect fluid is *a)* without rotation, *b)* or obeys an equation of state.

1. INTRODUCTION

On sait que le tenseur de Weyl représente le champ gravitationnel libre et on associe souvent la partie radiative du champ de gravitation aux types II, III et N de Petrov du tenseur de Weyl.

De toute façon, même si l'on n'adopte pas ce point de vue, le tenseur de Weyl est un élément géométrique important qu'il est intéressant d'étudier.

Une question intéressante est de savoir quels sont les types de Petrov compatibles avec les différents types algébriques [5*] du tenseur impulsion-énergie, ou bien quel est le comportement du tenseur de Weyl dans un espace-temps contenant un schéma matériel donné.

D'un point de vue local dans un schéma fluide parfait ou électromagnétique, MM. Kichenassamy [3], Kundt et Trümper [4], Shepley et Taub [6], Szekeres [7*] ont apporté certaines réponses. Nous adopterons ce point de vue dans notre travail. D'autre part dans le cas d'un espace-temps compact, M. Avez a montré [1] que le tenseur de Weyl ne peut être de type N et III de Petrov dans un schéma fluide parfait plus champ électromagnétique.

2. ÉTUDE DU TENSEUR DE WEYL

Le tenseur de Weyl est défini par la décomposition en parties irréductibles du tenseur de Riemann.

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = C_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} - \frac{1}{2}(\delta_{\gamma}^{\alpha}R_{\beta\delta} - \delta_{\gamma}^{\alpha}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\gamma}^{\alpha} - g_{\beta\gamma}R_{\gamma}^{\alpha}) - \frac{R}{6}(g_{\beta\gamma}\delta_{\delta}^{\alpha} - g_{\beta\delta}\delta_{\gamma}^{\alpha}) \quad (2-1)$$

où $g_{\alpha\beta}$ est la métrique de signature: $(-, -, -, +)$,

$R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci: $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{\mu}{}_{\mu}$,

R est la courbure riemannienne scalaire,

et $C_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ est le tenseur de Weyl.

Pour étudier le tenseur de Weyl un repère commode est le repère isotrope complexe (ou repère quasi-orthonormé): $(k^{\alpha}, m^{\alpha}, \bar{m}^{\alpha}, l^{\alpha})$ défini par les relations:

$$\begin{aligned} k^{\sigma}k_{\sigma} &= 0 & l^{\sigma}k_{\sigma} &= -m^{\sigma}\bar{m}_{\sigma} = 1 \\ l_{\sigma}k^{\sigma} &= m_{\sigma}m^{\sigma} = k_{\sigma}m^{\sigma} = l_{\sigma}m^{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

Définissons les 2-formes suivantes:

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta} &= l_{\alpha}m_{\beta} - l_{\beta}m_{\alpha} \\ V_{\alpha\beta} &= k_{\alpha}\bar{m}_{\beta} - k_{\beta}\bar{m}_{\alpha} \\ M_{\alpha\beta} &= k_{\alpha}l_{\beta} - k_{\beta}l_{\alpha} + m_{\alpha}\bar{m}_{\beta} - m_{\beta}\bar{m}_{\alpha} \end{aligned} \quad (2-3)$$

En chaque point, celles-ci forment avec leur complexe conjugué une base de l'espace des 2-formes complexes.

Associons à la double 2-forme $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ la double 2-forme adjointe $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$ (on a: $C_{\alpha\beta\mu}^{\mu} = 0$). Alors la double 2-forme complexe $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + i\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$ peut se développer sur cette base; compte tenu des propriétés du tenseur de Weyl on obtient:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= C^5 U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta} + C^4 (U_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} + M_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}) \\ &+ C^3 (M_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} - U_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} - V_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}) + C^2 (V_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} + M_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta}) + C^1 V_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Dans ce formalisme la classification de Petrov et de Bel [2] [3] du tenseur de Weyl est alors bien mis en évidence. Si k^α est le vecteur propre isotrope du tenseur de Weyl, on a :

(i) le tenseur de Weyl est de type N (ou III b) si

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\beta = 0 \quad \text{soit} \quad C^5 = C^4 = C^3 = C^2 = 0$$

(ii) le tenseur de Weyl est de type III (ou IIIa) si

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\beta k^\delta = 0 \quad \text{soit} \quad C^5 = C^4 = C^3 = 0$$

(iii) le tenseur de Weyl est de type II (ou IIb) si

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\beta k^\delta = \frac{1}{2}(C^3 + \bar{C}^3)k_\alpha k_\gamma \quad \text{soit} \quad C^5 = C^4 = 0$$

il est de type D (ou IIa) s'il existe un autre vecteur propre isotrope double.

Rappelons dans le repère isotrope complexe $(k^\alpha, m^\alpha, \bar{m}^\alpha, l^\alpha)$ quelques définitions liées à la trajectoire d'un vecteur isotrope.

$\gamma = \bar{m}^\alpha k^\beta \nabla_\beta k_\alpha$ mesure la déviation par rapport à la trajectoire géodésique et s'annule si et seulement si k^α est de trajectoire géodésique.

$\sigma(k^\alpha) = \bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta \nabla_\alpha k_\beta$ s'appelle la distorsion.

Définissons un repère orthonormé associé au repère isotrope complexe par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} u^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(k^\alpha + l^\alpha) & w^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(m^\alpha + \bar{m}^\alpha) \\ v^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(k^\alpha - l^\alpha) & t^\alpha &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(m^\alpha - \bar{m}^\alpha) \end{aligned} \quad (2-5)$$

On peut alors développer le tenseur de Weyl $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ sur la base de l'espace des bi-vecteurs constituée à l'aide du repère orthonormé [5].

3. ÉQUATION DU CHAMP DE GRAVITATION ET IDENTITÉ DE BIANCHI

Les équations d'Einstein du champ de gravitation s'écrivent :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \chi T_{\alpha\beta} \quad (3-1)$$

où $T_{\alpha\beta}$ est le tenseur impulsion-énergie de la matière.

Pour étudier les solutions des équations d'Einstein correspondant aux divers types de Petrov, il est indispensable de faire intervenir explicitement le tenseur de Weyl. En un point de l'espace, le tenseur de Weyl et le tenseur de Ricci sont algébriquement indépendants. Mais les identités de Bianchi fournissent une relation différentielle les reliant.

Les identités de Bianchi s'écrivent :

$$\int_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha R_{\beta\gamma\mu\nu} = 0 \quad (3-2)$$

On peut montrer que celles-ci sont équivalentes à la relation suivante :

$$\nabla_\alpha C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = P_{\gamma\delta}^{\beta} \quad (3-3)$$

avec
$$P_{\gamma\delta}^{\beta} = -\chi \left\{ \nabla_{[\gamma} \left(T_{\delta]}^{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\delta]}^{\beta} T \right) \right\}$$

où T est la trace de $T_{\alpha\beta}$.

Dans notre étude, la formule (3-3) est fondamentale. On peut également démontrer la formule suivante :

$$\nabla_\beta P_{\gamma\delta}^{\beta} = 0 \quad (3-4)$$

Ces relations nous permettent de préciser l'éventuelle signification physique du tenseur de Weyl comme représentant la partie libre du champ de gravitation. L'analogie avec l'électromagnétisme nous suggère que $P_{\gamma\delta}^{\beta}$ doit être regardé comme un courant de matière qui satisfait l'équation de conservation (3-4). La formule (3-3) représente alors l'interaction entre la partie libre du champ de gravitation et la matière qui est la source du champ gravitationnel.

De plus le tenseur impulsion-énergie satisfait à la loi de conservation :

$$\nabla_\alpha T_{\beta}^{\alpha} = 0 \quad (3-5)$$

4. CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU FLUIDE PARFAIT

Pour un schéma fluide parfait, le tenseur impulsion-énergie a pour forme :

$$T_{\alpha\beta} = (\mu_0 c^2 + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}$$

où u^α est le vecteur vitesse de la matière de norme 1,

μ_0 est la densité de matière propre,

p est la pression propre.

On étudie la cinématique du fluide en décomposant la dérivée covariante du vecteur vitesse de la façon suivante :

$$\nabla_\beta u_\alpha = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} + A_\alpha u_\beta \quad (4-1)$$

où $h^\sigma_\rho = \delta^\sigma_\rho - u_\rho u^\sigma$ est le projecteur associé à u^α et les quantités cinématiques sont :

$$\begin{aligned} A^\alpha &= u^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha && \text{le vecteur accélération} \\ \theta &= \nabla_\sigma u^\sigma && \text{la dilatation} \\ \omega_{\alpha\beta} &= h^\sigma_\alpha h^\tau_\beta \nabla_{[\tau} u_{\sigma]} && \text{le tenseur rotation} \\ \sigma_{\alpha\beta} &= h^\sigma_\alpha h^\tau_\beta \nabla_{(\tau} u_{\sigma)} - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} && \text{le tenseur cisaillement ou tenseur de déformation.} \end{aligned}$$

Définissons également :

$$\begin{aligned} \omega^\alpha &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \omega_{\gamma\delta} u_\beta && \text{le vecteur rotation} \\ \omega^2 &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} && \text{la rotation} \\ [\sigma(u^\alpha)]^2 &= \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} && \text{la cisaillement ou taux de déformation.} \end{aligned}$$

L'équation de conservation (3-5) implique les relations :

$$(\mu_0 c^2 + p) A^\alpha = h^{\sigma\alpha} \partial_{\sigma p} \quad (4-2)$$

$$(\mu_0 c^2 + p) \theta = - u^\beta \partial_\beta \mu_0 c^2 \quad (4-3)$$

Nous pouvons calculer la divergence du tenseur de Weyl :

$$\begin{aligned} P_{\beta\gamma\delta} &= \chi u_\beta u_{[\gamma} \partial_{\delta]} \mu_0 c^2 + \chi (\mu_0 c^2 + p) u_\beta \omega_{\gamma\delta} - \frac{\chi}{3} g_{\beta[\gamma} h^\alpha_{\delta]} \partial_\alpha \mu_0 c^2 \\ &\quad + \chi (\mu_0 c^2 + p) (\omega_{\beta[\delta} + \sigma_{\beta[\delta} u_{\gamma]}) \quad (4-4) \end{aligned}$$

On en déduit les relations suivantes :

$$-\frac{1}{3} h^\alpha_\delta \partial_\alpha \mu_0 c^2 = \frac{1}{\chi} u^\beta u^\gamma P_{\beta\gamma\delta} \quad (4-5)$$

$$(\mu_0 c^2 + p) \omega_{\alpha\gamma} = -\frac{2}{\chi} u^\delta h_{\beta[\alpha} P^\beta_{\gamma]\delta} \quad (4-6)$$

$$(\mu_0 c^2 + p) \sigma_{\alpha\gamma} = -\frac{2}{\chi} u^\delta h_{\beta(\alpha} P^\beta_{\gamma)\delta} \quad (4-7)$$

Ainsi les formules (4-5, 6, 7) et la formule (3-3) vont nous permettre d'obtenir des relations entre les propriétés hydrodynamiques du fluide parfait et les propriétés du tenseur de Weyl.

5. C-ESPACE CONTENANT UN FLUIDE PARFAIT

On appelle C-espace un espace-temps dans lequel la divergence du tenseur de Weyl est nulle [7].

Lorsqu'un C-espace contient un fluide parfait, les relations (4-5, 6, 7) fournissent la forme de la dérivée covariante de u_α (*):

$$\nabla_\alpha u_\beta = D_1 u_\alpha v_\beta + D_2 u_\alpha w_\beta + D_4 u_\alpha u_\beta - D_4 g_{\alpha\beta} \quad (5-1)$$

A partir de l'expression (5-1) nous pouvons obtenir la contraction du tenseur de courbure avec le vecteur u^α par la formule:

$$R^\tau_{\beta\gamma\alpha} u_\tau = -(\nabla_\alpha \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\alpha) u_\beta \quad (5-2)$$

Le tenseur de Ricci vérifie les équations d'Einstein (3-1) pour un schéma fluide parfait, par contraction du tenseur de Riemann dans (5-2), on obtient:

$$v^\alpha \partial_\alpha D_4 = w^\alpha \partial_\alpha D_4 = t^\alpha \partial_\alpha D_4 = 0 \quad (5-3)$$

Introduisons dans (5-2) la relation (2-1) et supposons que le tenseur de Weyl est de type II mais non de type D. Compte tenu des équations d'Einstein et des résultats (5-3), il est facile de voir de l'expression (5-2) que:

$$C^2 = C^1 = 0$$

c'est-à-dire que le tenseur de Weyl est de type D. Nous avons ainsi une contradiction.

Par conséquent il ne peut exister de C-espace contenant un fluide parfait dont le tenseur de Weyl est de type II, III ou N.

6. ESPACE-TEMPS DE TYPE N CONTENANT UN FLUIDE PARFAIT

Nous supposons que le tenseur de Weyl garde le même type dans tout l'espace-temps (ou tout au moins dans un ouvert).

Le champ de vecteurs propres isotropes du tenseur de Weyl n'est défini

(*) Dans un repère orthonormé $(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha, t^\alpha)$ avec w^α et t^α tels que: $t^\beta u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0$.

qu'en direction. On peut toujours choisir localement un champ de repère isotrope (k^α , m^α , $\bar{m}^\alpha$, l^α) avec k^α vecteur propre isotrope du tenseur et un champ de repère orthonormé (u^α , v^α , w^α , t^α) avec u^α vecteur vitesse du fluide, associés par les formules (2-5).

Dans ce repère isotrope les éléments non nuls de la divergence du tenseur de Weyl de type N sont :

$$\begin{aligned} k^\beta m^\gamma l^\delta P_{\beta\gamma\delta} &= a & \bar{m}^\beta m^\gamma l^\delta P_{\beta\gamma\delta} &= b \\ m^\beta k^\gamma l^\delta P_{\beta\gamma\delta} &= a & l^\beta k^\gamma l^\delta P_{\beta\gamma\delta} &= b + \bar{b} \\ m^\beta m^\gamma \bar{m}^\delta P_{\beta\gamma\delta} &= a & l^\beta m^\gamma \bar{m}^\delta P_{\beta\gamma\delta} &= b - \bar{b} \\ m^\beta m^\gamma l^\delta P_{\beta\gamma\delta} &= A & l^\beta m^\gamma l^\delta P_{\beta\gamma\delta} &= B \end{aligned} \quad (6-1)$$

avec les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} 2a &= -C^1{}_\gamma & 2b &= -C^1\sigma(k^\alpha) \\ 2A &= -k^\alpha \partial_\alpha C^1 - C^1 k^\alpha (-m_\gamma \nabla_\alpha \bar{m}^\gamma + l_\delta \nabla_\alpha k^\delta) + C^1 (m_\beta k^\alpha \nabla_\alpha \bar{m}^\beta - \nabla_\alpha k^\alpha - \bar{m}^\alpha m_\beta \nabla_\alpha k^\beta) \\ 2B &= -\bar{m}^\alpha \partial_\alpha C^1 - C^1 \bar{m}^\alpha (-m_\gamma \nabla_\alpha \bar{m}^\gamma + l_\delta \nabla_\alpha k^\delta) + C^1 (k^\alpha l_\beta \nabla_\alpha \bar{m}^\beta - \nabla_\alpha \bar{m}^\alpha - \bar{m}^\alpha l_\beta \nabla_\alpha k^\beta) \end{aligned}$$

Dans le cas du fluide parfait, les propriétés algébriques de la divergence du tenseur de Weyl impliquent que :

$$b - \bar{b} = 0, \quad A = 0 \quad \text{et} \quad B = 3a \quad (6-2)$$

En explicitant les équations d'interaction (4-5, 6, 7) à l'aide des expressions (6-1, 2), il vient :

$$\begin{aligned} v^\delta \partial_\delta \mu_0 c^2 &= -\frac{3}{\chi} \frac{1}{\sqrt{2}} (b + \bar{b}) & v^\beta w^\delta \nabla_\delta u_\beta &= \frac{\sqrt{2}}{\chi(\mu_0 c^2 + p)} (a + \bar{a}) \\ w^\delta \partial_\delta \mu_0 c^2 &= -\frac{3}{\chi} \sqrt{2} (a + \bar{a}) R & w^\beta v^\delta \nabla_\delta u_\beta &= -\frac{\sqrt{2}}{\chi(\mu_0 c^2 + p)} (a + \bar{a}) \\ t^\delta \partial_\delta \mu_0 c^2 &= \frac{3i\sqrt{2}}{\chi} (a - \bar{a}) & v^\beta t^\delta \nabla_\delta u_\beta &= -\frac{i\sqrt{2}}{\chi(\mu_0 c^2 + p)} (a - \bar{a}) \\ t^\beta w^\delta \nabla_\delta u_\beta &= 0 & t^\beta v^\delta \nabla_\delta u_\beta &= \frac{i\sqrt{2}}{\chi(\mu_0 c^2 + p)} (a - \bar{a}) \\ w^\beta t^\delta \nabla_\delta u_\beta &= 0 & & \\ \frac{1}{3} \theta + v^\beta v^\delta \nabla_\delta u_\beta &= \frac{\sqrt{2}}{\chi(\mu_0 c^2 + p)} (b + \bar{b}) & & \\ \frac{1}{3} \theta + w^\beta w^\delta \nabla_\delta u_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}\chi(\mu_0 c^2 + p)} (b + \bar{b}) & & \\ \frac{1}{3} \theta + t^\beta t^\delta \nabla_\delta u_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}\chi(\mu_0 c^2 + p)} (b + \bar{b}) & & \end{aligned} \quad (6-3)$$

Les équations (6-3) peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(\mu_0 c^2 + p)\omega_{\alpha\gamma} &= -\frac{2}{3}w^\delta\partial_\delta\mu_0 c^2 v_{[\alpha}w_{\gamma]} - \frac{2}{3}t^\delta\partial_\delta\mu_0 c^2 v_{[\alpha}t_{\gamma]} \\(\mu_0 c^2 + p)\sigma_{\alpha\gamma} &= -\frac{1}{3}v^\delta\partial_\delta\mu_0 c^2 (3v_\alpha v_\gamma + h_{\alpha\gamma})\end{aligned}\quad (6-4)$$

On déduit également les relations :

$$\begin{aligned}(\mu_0 c^2 + p)\omega &= \sqrt{2} |C^1| |\gamma| \\(\mu_0 c^2 + p)\sigma(u^\alpha) &= \sqrt{3} |C^1| |\sigma(k^\alpha)|\end{aligned}\quad (6-5)$$

Nous allons pouvoir énoncer les premières propriétés que l'on tire des formules précédentes :

Le fluide est sans rotation si et seulement si la trajectoire de k^α est géodésique

$$\omega_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$$

Le fluide est sans cisaillement si et seulement si la trajectoire de k^α est sans distorsion :

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \sigma(u^\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sigma(k^\alpha) = 0$$

Nous allons supposer maintenant que le fluide parfait est soumis à certaines hypothèses.

7. CAS OU LE FLUIDE EST SANS ROTATION ET SANS CISAILLEMENT

Le fluide est sans rotation et sans cisaillement si et seulement si $a = b = 0$. C'est donc équivalent à la nullité de la divergence du tenseur de Weyl.

Par conséquent il ne peut exister d'espace-temps de type N contenant un fluide parfait sans rotation et sans cisaillement.

On en déduit également qu'il ne peut exister de tenseur de Weyl de type N conforme du vide dans un fluide parfait puisque la trajectoire de k^α serait géodésique et sans distorsion.

8. CAS OU LE FLUIDE EST SANS ROTATION

Le fluide est donc nécessairement avec cisaillement.

Les équations (6-3) avec $a = 0$ nous fournissent la forme de la dérivée covariante de :

$$\nabla_\alpha u_\beta = D_1 u_\alpha v_\beta + D_2 u_\alpha w_\beta + D_4 u_\alpha u_\beta + (D_3 - D_4) v_\alpha v_\beta - D_4 g_{\alpha\beta} \quad (8-1)$$

Utilisons la relation (3-4). En calculant $v^\gamma w^\delta \nabla_\beta P^\beta_{\gamma\delta} = 0$ nous trouvons : $w^\delta u^\beta \nabla_\beta y_\delta = 0$, c'est-à-dire : $D_2 = 0$.

Avec $D_2 = 0$ l'équation (8-1) ne change pas de forme par rotation des vecteurs w^α et t^α . On peut les choisir tels que C' soit imaginaire pur.

A partir de l'expression (8-1) nous pouvons obtenir la contraction du tenseur de courbure avec le vecteur u^α par la formule :

$$R^\tau_{\beta\gamma\alpha} u_\tau = -(\nabla_\alpha \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\alpha) u_\beta \quad (8-2)$$

Avec la relation (2-1) entre le tenseur de Weyl et celui de Riemann et avec le tenseur de Ricci vérifiant les équations d'Einstein pour un fluide parfait, on obtient de (8-2) en calculant : $R^\tau_{\beta\gamma\alpha} u_\tau t^\beta v^\gamma w^\alpha$ et $R^\tau_{\beta\gamma\alpha} u_\tau t^\beta u^\gamma w^\alpha$

$$(D_3 - D_4) t^\beta w^\alpha \nabla_\alpha v_\beta = -\tau \quad \text{et} \quad -D_1 t^\beta w^\alpha \nabla_\alpha v_\beta = \tau \quad (8-3)$$

avec $\tau = -\frac{i}{8}(C^1 - \bar{C}^1)$.

Par conséquent de (8-3) on a $D_1 = D_3 - D_4$ et on en déduit que :

$$v^\gamma \partial_\gamma p = v^\gamma \partial_\gamma \mu_0 c^2, \quad w^\gamma \partial_\gamma p = w^\gamma \partial_\gamma \mu_0 c^2 \quad \text{et} \quad t^\gamma \partial_\gamma p = t^\gamma \partial_\sigma \mu_0 c^2$$

Puisque le fluide est sans rotation, il existe un système de coordonnées (x^i, t) avec t orthogonal aux x^i et défini par : $\partial_\alpha t = u_\alpha u^\gamma \partial_\gamma t$.

Nous obtenons donc que :

$$p = \mu_0 c^2 + A(t)$$

On voit immédiatement que ceci explique les résultats négatifs de Kundt et Trümper [4] : il n'existe pas d'espace-temps de type N contenant un fluide parfait sans rotation avec 1) soit une équation d'état de la forme

$$p = p(\mu_0 c^2, t) \quad \text{avec} \quad \partial_\alpha t = u^\gamma \partial_\gamma t \cdot u_\alpha$$

sauf si $p = \mu_0 c^2 + A(t)$; 2) soit u^α de trajectoire géodésique.

Les auteurs éliminent cette équation d'état $p = \mu_0 c^2 + A(t)$ comme non physique. Il faut que $p < \frac{1}{3} \mu_0 c^2$ (la trace du tenseur impulsion-énergie est positive) et il nous semble que l'on puisse choisir un tel $A(t)$.

Remarquons que si la pression est nulle u^α est de trajectoire géodésique mais Szekeres [7*] a montré que l'on peut se passer de l'hypothèse sans rotation.

9. CAS OU LE FLUIDE POSSÈDE UNE ÉQUATION D'ÉTAT $p = p(\mu_0 c^2)$

Notre méthode exposée dans ce travail nous a permis également de démontrer que pour un fluide à pression constante on peut se passer de l'hypothèse sans rotation pour affirmer l'inexistence [5].

Remarquons que notre résultat est équivalent à l'inexistence d'espace-temps de type N contenant un fluide incohérent mais avec des équations d'Einstein avec constante cosmologique puisque celle-ci peut être introduite en remplaçant p par $p + \Lambda$ et $\mu_0 c^2$ par $\mu_0 c^2 - \Lambda$.

Ainsi d'après les résultats précédents, un fluide parfait possédant une équation d'état $p = p(\mu_0 c^2)$ est nécessairement avec rotation et avec la dérivée de la fonction p différente de zéro.

Nous allons montrer que C^1 est réel et donc $\sigma(k^\alpha)$ réel puisque b est réel si et seulement si γ est réel. Bien entendu ceci est sous réserve d'existence.

Les équations (6-3) nous fournissent la forme de la dérivée covariante de u_α , les vecteurs w^α et t^α étant choisis de façon que a soit réel.

$$\nabla_\alpha u_\beta = D_1 u_\alpha v_\beta + D_2 u_\alpha w_\beta + D_4 u_\alpha u_\beta + (D_3 - D_4) v_\alpha v_\beta - D_4 g_{\alpha\beta} + D_5 (v_\alpha w_\beta - v_\beta w_\alpha). \quad (9-1)$$

L'équation d'état implique les relations suivantes sur les coefficients:

$$D_2 = -3p' \cdot D_5 \quad \text{et} \quad D_1 = p' \cdot (D_3 - D_4) \quad (9-2)$$

Utilisons la relation (3-4). En calculant $t^\gamma w^\delta \nabla_\beta P^\beta_{\delta\delta} = 0$ et $v^\gamma t^\delta \nabla_\beta P^\beta_{\gamma\delta} = 0$ nous trouvons: $t^\alpha u^\gamma \nabla_\gamma v_\alpha = t^\alpha v^\gamma \nabla_\gamma w_\alpha = 0$.

A partir de l'expression (9-1) nous pouvons obtenir la contraction du tenseur de courbure avec le vecteur u^α par la formule:

$$R^\tau_{\beta\gamma\alpha} u_\tau = -(\nabla_\alpha \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\alpha) u_\beta \quad (9-3)$$

Avec la relation (2-1) et les équations d'Einstein, en calculant à partir de (9-3) $R^\tau_{\beta\gamma\alpha} u_\tau v^\beta t^\gamma w^\alpha$ et $R^\tau_{\beta\gamma\alpha} u_\tau t^\beta w^\gamma w^\alpha - R^\tau_{\beta\gamma\alpha} u_\tau w^\beta u^\gamma t^\alpha$ on obtient:

$$-(D_3 - D_4) w^\alpha t^\gamma \nabla_\gamma v_\alpha + (D_3 - D_4) t^\alpha w^\gamma \nabla_\gamma v_\alpha - t^\gamma \partial_\gamma D_5 - D_5 t^\gamma w^\alpha \nabla_\alpha w_\gamma = 0 \quad (9-4)$$

$$D_1 w^\beta t^\alpha \nabla_\alpha v_\beta - D_1 t^\beta w^\alpha \nabla_\alpha v_\beta - t^\alpha \partial_\alpha D_2 - D_2 t^\beta w^\alpha \nabla_\alpha w_\beta = 0 \quad (9-5)$$

Dans (9-5) explicitons les relations (9-2) entre coefficients et simplifions par p' puisque: $p' \neq 0$. En comparant avec (9-4) nous obtenons:

$$\begin{aligned} &-(D_3 - D_4) w^\alpha t^\gamma \nabla_\gamma v_\alpha + (D_3 - D_4) t^\beta w^\alpha \nabla_\alpha v_\beta = 0 \\ &t^\gamma \partial_\gamma D_5 + D_5 t^\gamma w^\alpha \nabla_\alpha w_\gamma = 0 \end{aligned} \quad (9-6)$$

Calculons de même : $R_{\beta\gamma\alpha}^{\tau} u_{\tau} w^{\beta} t^{\gamma} v^{\alpha}$ et $R_{\beta\gamma\alpha}^{\tau} u_{\tau} t^{\beta} v^{\gamma} w^{\alpha}$ on en déduit à l'aide de (9-6) que : $t^{\beta} v^{\gamma} \nabla_{\gamma} v_{\beta} = 0$.

Il en résulte que $\bar{m}^{\beta} k^{\gamma} \nabla_{\gamma} k_{\beta}$ est réel. Puisque dans ce repère a est réel ; on a C^1 réel.

A partir de ce résultat, on peut voir facilement que γ n'est réel que dans les repères où a est réel, de même pour C^1 .

Par conséquent γ est réel si et seulement si C^1 est réel.

De façon générale cette relation entre γ et C^1 montre en particulier [7*] que la direction de v^v se propage dans un 2-plan orthogonal au vecteur rotation du fluide.

10. CONCLUSION

Nous avons abordé dans les cas les plus simples le problème de l'interdépendance du tenseur de Weyl et du tenseur impulsion-énergie. Nous espérons pouvoir améliorer, par la suite, les résultats partiels obtenus.

On peut espérer à partir de ces études, d'une part faire progresser l'étude des solutions exactes des équations d'Einstein dans la matière et d'autre part préciser la signification physique du tenseur de Weyl.

J'exprime ma gratitude à MM. KICHENASSAMY et CHEVRETON pour l'aide qu'ils ont bien voulu m'apporter dans l'élaboration de ce travail.

RÉFÉRENCES

- [1] A. AVEZ, Characteristic classes and Weyl Tensor: Applications to General Relativity. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, t. 66, 1970, p. 265.
- [2] L. BEL, Les états de radiation et le problème de l'énergie en relativité générale. *Cahier de Physique*, n° 138, 1962, p. 59.
- [3] S. KICHENASSAMY, Null electromagnetic fields in algebraically special Petrov type spaces. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 9 A, n° 3, 1968, p. 273.
- [4] W. KUNDT et M. TRUMPER, Beitrage zur Theorie du Gravitations-Strahlungsfelder. *Akad. Wiss. Mainz.*, n° 12, 1962.
- [5] B. LINET, Thèse de 3^e cycle : deuxième partie, Paris, 1970.
- [5*] B. LINET, Étude de la structure algébrique du tenseur impulsion-énergie symétrique. *C. R. Acad. Sci. (Paris)* (à paraître).
- [6] L. SHEPLEY et A. TAUB, Space-times containing perfect fluids and having a vanishing conformal divergence. *Comm. Math. Phys.*, t. 5, 1967, p. 237.
- [7] P. SZEKERES, Spaces conformal to a class of spaces in general relativity. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 274 A, 1963, p. 206.
- [7*] P. SZEKERES, On the propagation of gravitationnel fields in matter. *J. Math. Phys.*, t. 7, 1966, p. 751.

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1971).