ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARIO CASTAGNINO

Champs de spin entier dans l'espace-temps de De Sitter

Annales de l'I. H. P., section A, tome 13, nº 3 (1970), p. 263-270

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__13_3_263_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIII, n° 3, 1970, p. 263-270.

Section A :
Physique théorique.

Champs de spin entier dans l'espace-temps de De Sitter

par

Mario CASTAGNINO (*)

Démonstration de la coïncidence des trois théories sur ce sujet (celles de *Dirac* [*3*], Riemannienne [*8*], et issue de la théorie des groupes [*4*], [*9*], [*1*]). Développement d'une théorie unifiée basée sur l'équation unique $\Delta = 0$, et dans un système quelconque de coordonnées.

1. INTRODUCTION

Diverses théories ont été proposées pour les champs classiques libres dans l'espace-temps de *De Sitter* V_4. On peut les classifier selon les méthodes pour trouver les fonctions d'onde :

a) Les fonctions d'onde se prolongent hors l'espace-temps physique V_4, dans l'espace pseudo-euclidien E_5, comme fonctions homogènes de degré *n*. Dans E_5 elles satisfont la généralisation (de E_4 à E_5) des équations ordinaires [*3*].

b) Les équations qui satisfont les fonctions d'onde sont la généralisation des équations ordinaires (de E_4 à V_4) par la substitution du tenseur métrique plan η_{ij} par le tenseur métrique de V_4, g_{ij} [*8*].

c) Les fonctions d'onde sont simplement les autofonctions de l'opérateur de *Casimir* de second ordre, I_1, de SO(4, 1) ([*4*], [*9*], [*1*]).

Dans ce travail on démontre que toutes ces tentatives sont seulement des aspects d'une théorie unifiée et, par conséquent, les fonctions d'onde sont les mêmes (L'équivalence des théories du type *a* et *c*, pour le cas

(*) Departamento de Física. Facultad de Ciéncias. Universidad de Rosario. Av. Pellegrini, 250. Rosario. Argentina.

spin $\frac{1}{2}$, a déjà été démontrée [5]. Au contraire, l'article [1] nie l'équivalence des théories du type *b* et *c*, ce qui est faux pour les champs bosoniques).

L'utilisation de la méthode de *Dirac* (type *a*) permet de développer la théorie dans un repère quelconque, fait qui simplifie les calculs. On trouve ainsi que la seule équation $\Delta = 0$ (dans E_5) implique l'équation d'onde, et l'annulation des traces et des divergences des tenseurs. On peut donc baser la théorie sur l'hypothèse que les champs de tenseurs soient « physiques », symétriques et qu'ils satisfassent $\Delta = 0$. Les équations obtenues sont satisfaites, en particulier, pour le champ métrique $\mathring{g}_{ij}$.

2. SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Considérons un espace pseudo-euclidien E_5. Les coordonnées cartésiennes de E_5 seront indiquées $\{ x^{\alpha'} \}$ $(\alpha', \beta', \ldots = 0', \ldots, 4')$. Le tenseur métrique $\eta_{\alpha'\beta'}$ est le tenseur diagonal, avec diagonal principal $(1, -1, -1, -1, -1)$. Les points qui satisfassent l'équation :

$$\eta_{\alpha'\beta'}\mathring{x}^{\alpha'}\mathring{x}^{\beta'} = -R^2, \tag{1}$$

forment l'espace-temps de *De Sitter* V_4.

Dans les voisinages ouverts de V_4 on introduit des systèmes de coordonnées quelconques $\{ x^i \}$ $(i, j, \ldots = 0, \ldots, 3)$. Nous appellerons $\{ x^\alpha \}$ $(\alpha, \beta, \ldots = 0, \ldots, 4)$ système de coordonnées « polaires » dans E_5 ; tel que :

$$x^{\alpha'} = x^4\mathring{x}^{\alpha'}(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{2}$$

$\xi^{\beta'} = (x^4 R)^{-1} x^{\beta'}$ est le vecteur radial unitaire, et $\delta^{\beta'}_{\alpha'} + \xi_{\alpha'}\xi^{\beta'}$ le projecteur $\mathscr{P}_\tau$ sur l'espace tangente τ_x à V_4. On appelle T tenseur « physique » si $\mathscr{P}_\tau T = T$, c'est-à-dire toutes les coordonnées de T avec un indice $\alpha = 4$ sont zéro. Logiquement tous les champs à étudier sont « physiques ». Nous désignerons avec un super indice $^\circ$ tous les objets de V_4 : $\mathring{g}_{ij}$, $\mathring{\nabla}_i$, $\mathring{\Delta}$, etc. Nous avons ainsi, pour le tenseur métrique de E_5 :

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (x^4)^2\mathring{g}_{ij} \quad ; \quad g_{i4} = 0 \; ; \\ g_{4i} &= 0 \quad ; \quad g_{44} = -R^2 \; ; \end{aligned} \tag{3}$$

et pour les symboles de *Christoffel* dans les coordonnées « polaires » de E_5

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij} &= \mathring{\Gamma}^k_{ij} \quad ; \quad \Gamma^k_{4j} = \Gamma^k_{j4} = \frac{1}{x^4}\delta^k_j \; ; \\ \Gamma^4_{ij} &= \frac{x^4}{R^2}\mathring{g}_{ij} \quad ; \quad \Gamma^4_{4j} = \Gamma^4_{j4} = \Gamma^k_{44} = \Gamma^4_{44} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

3. REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SO(4, 1) ET DU SOUS-GROUPE SO(3, 1)

Soit $\{ e_{\alpha'} \}$ une base de E_5, $T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_s}(x)$ sont les coordonnées d'un champ tensoriel dans la base $\{ e_{\alpha'_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha'_s} \}$.

A toute application $u: v^{\alpha'} \to \mu^{\alpha'}{}_{\beta'} \cdot v^{\beta'}$ on associe les applications:

$$\mu_A(T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_s}) = \delta^{\alpha'_1}_{\beta'_1} \dots \delta^{\alpha'_{A-1}}_{\beta'_{A-1}} \mu^{\alpha'_A}_{\beta'_A} \delta^{\alpha'_{A+1}}_{\beta'_{A+1}} \dots \delta^{\alpha'_s}_{\beta'_s} T^{\beta'_1 \dots \beta'_s}$$

et à l'application $\mu: v^{\alpha'\beta'} \to \mu^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'\delta'} v^{\gamma'\delta'}$, les applications

$$\mu_{AB}(T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_s}) = \delta^{\alpha'_1}_{\beta'_1} \dots \delta^{\alpha'_{A-1}}_{\beta'_{A-1}} \delta^{\alpha'_{A+1}}_{\beta'_{A+1}} \delta^{\alpha'_{B-1}}_{\beta'_{B-1}} \delta^{\alpha'_{B+1}}_{\beta'_{B+1}} \dots \delta^{\alpha'_s}_{\beta'_s} \mu^{\alpha'_A \alpha'_B}_{\beta'_A \beta'_B} T^{\beta'_1 \dots \beta'_s},$$

(où A, B, ... = 1, ..., s).

Les champs tensoriels engendrent une représentation du groupe SO(4, 1) de la façon suivante:

$$\text{(5)} \quad T^{\lambda'_1 \dots \lambda'_s}(x) \to \overset{\circ}{T}{}^{\lambda'_1 \dots \lambda'_s}(x) = A^{\lambda'_1}_{\mu'_1}(g^{-1}) \dots A^{\lambda'_s}_{\mu'_s}(g^{-1}) T^{\mu'_1 \dots \mu'_s}[g(x)],$$

où $g \in SO(4, 1)$ et $A^{\alpha'_A}_{\beta'_A}$ sont les matrices de la représentation naturelle du groupe. La transformation $T \to \overset{\circ}{T}$ correspond à placer, dans le point x, le tenseur qui se trouvait dans le point $g(x)$. $T[g(x)]$ serait ce tenseur transporté parallèlement de $g(x)$ à x; les matrices A placent T dans la position définitive, au moyen de la rotation correspondante. Les générateurs de la représentation $T \to \overset{\circ}{T}$ sont:

$$\text{(6)} \qquad X_{\alpha'\beta'} = L_{\alpha'\beta'} - \sum_{A=1}^{s} S_{A\alpha'\beta'},$$

où
$$L_{\alpha'\beta'} = - x_{\alpha'} \partial_{\beta'} + x_{\beta'} \partial_{\alpha'},$$

et
$$(S_{A\alpha'\beta'})^{\lambda'_A}_{\mu'_A} = \delta^{\lambda'_A}_{\alpha'} \eta_{\beta'\mu'_A} - \delta^{\lambda'_A}_{\beta'} \eta_{\alpha'\mu'_A}.$$

On trouve immédiatement que les $X_{\alpha'\beta'}$ commutent avec l'opérateur d'*Euler* $x^{\alpha'}\partial_{\alpha'}$ (et aussi avec l'opérateur $R^2 I^0_1 = \frac{1}{2} \eta^{\alpha'\gamma'} \eta^{\beta'\delta'} L_{\alpha'\beta'} L_{\gamma'\delta'}$). Donc, les représentations irréductibles doivent être engendrées par des fonctions homogènes des $x^{\alpha'}$, du degré n.

Envisageons maintenant la relation de cette façon de définir les représentations avec la méthode employée dans les travaux [*9*] et [*1*]. Pour simplifier nous nous bornerons au champ vectoriel. Dans les coordonnées $\{ x^\alpha \}$ on trouve

(7) $$(X_{\alpha\beta})^4{}_i = 0,$$

donc les vecteurs « physiques » sont transformés en vecteurs « physiques ». Ainsi nous pouvons écarter l'indice 4 dans les transformations. Pour les indices « physiques » on a :

(8) $$L_{ij} = 0 \quad ; \quad L_{4i} = R^2(x^4)^2\mathring{\nabla}_i \quad ; \quad (S_{ij})^h{}_k \neq 0 \quad ; \quad (S_{4i})^h{}_k = 0\,;$$

où les $(S_{ij})^h{}_k$ satisfont évidemment les règles de commutation de SO(3, 1), puisque les $(S_{ij})^\alpha{}_\beta$ satisfont celles de SO(4, 1). Ainsi on peut décomposer la rotation infinitésimale $\varepsilon^{\alpha\beta}$ en deux parties :

(9) $$\underset{\mathrm{R}}{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \mathscr{P}_\tau\varepsilon^{\alpha\beta} \quad ; \quad \underset{\mathrm{D}}{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} - \mathscr{P}_\tau\varepsilon^{\alpha\beta}.$$

Donc, on a :

(10) $$(X_{\alpha\beta})^h{}_k\underset{\mathrm{R}}{\varepsilon}^{\alpha\beta} = -\,(S_{\alpha\beta})^h{}_k\varepsilon^{\alpha\beta}\,;$$

c'est une rotation avec x fixe, et :

(11) $$(X_{\alpha\beta})^h{}_k\underset{\mathrm{D}}{\varepsilon}^{\alpha\beta} = 2R^2(x^4)^2\delta^h{}_k\varepsilon^{4i}\mathring{\nabla}_i\,;$$

c'est un déplacement parallèle. $\underset{\mathrm{R}}{\varepsilon}^{ij}$ sont les paramètres du groupe des rotations SO(3, 1), et ε^{4i} correspond à un déplacement coordonné (On trouve donc que $V_4 = SO(4, 1)/SO(3, 1)$).

Si $\underset{\mathrm{D}(xx')}{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ origine un déplacement infinitésimal $x \to x'$, et x_0 est un point infiniment approché à x et x', on peut écrire :

(12) $$\underset{\mathrm{R}}{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} - \underset{\mathrm{D}(xx')}{\varepsilon^{\alpha\beta}} = \varepsilon^{\alpha\beta} + \underset{\mathrm{D}(x_0x)}{\varepsilon^{\alpha\beta}} - \underset{\mathrm{D}(x_0x')}{\varepsilon^{\alpha\beta}}.$$

Par (10), (11) et (12) il vient :

(13) $$\overset{\prime}{T}{}^i(x) = [\delta^i_j - (S_{kh})^i{}_j(\varepsilon^{kh} + \underset{\mathrm{D}(x_0x)}{\varepsilon^{kh}} - \underset{\mathrm{D}(x_0x')}{\varepsilon^{kh}})]\,[1 + 2(x^4)^2R^2\mathring{\nabla}_l(\underset{\mathrm{D}(xx')}{\varepsilon^{4l}})]T^j(x),$$

qui correspond dans le cas de rotation finie à :

(14) $$\overset{\prime}{T}{}^i(x) = \bar{A}^1{}^i{}_j(\bar{g}^1{}_{x_0x'}\cdot g\cdot g_{x_0x})T^j[g(x)],$$

où g_{x_0x} sont déplacements parallèles de x_0 à x. Il est clair maintenant que l'on peut considérer la représentation vectorielle dans V_4 comme le produit d'une matrice de la représentation naturelle du sous-groupe SO(3, 1), rotation avec x_0 fixe, et un déplacement parallèle, élément de la représentation de SO(4, 1) pour les scalaires, (« boost »), à l'usage des travaux [*9*] et [*1*].

4. OPÉRATEURS DE CASIMIR

Pour la représentation $T \to T'$ sur un champ tensoriel homogène, du degré n, l'opérateur de *Casimir* du second degré est :

$$(15)\qquad R^2 I_1 = \frac{1}{2}\eta^{\alpha'\gamma'}\eta^{\beta'\delta'}X_{\alpha'\beta'}X_{\gamma'\delta'} = R^2\Delta - n(n+3) - 2s + 2\sum_{A=1}^{s}(x^{\lambda'_A}\partial_{\mu'_A})_A + \sum_{A\neq B}(g^{\lambda'_A\lambda'_B}g_{\mu'_A\mu'_B} - \delta^{\lambda'_A}_{\mu'_B}\delta^{\lambda'_B}_{\mu'_A})_{AB},$$

où $\Delta = -\eta^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}\partial_{\beta'}$. Si l'on veut que la représentation soit irréductible, dans le sous-groupe SO(3, 1), on doit prendre T totalement symétrique et avec toutes ses traces nulles ; on peut parler donc d'un *spin pur s*. Si on veut, en plus, que la représentation soit irréductible, dans SO(4, 1), I_1 doit être un multiple de la matrice unité, et puisque $R^2 I^0{}_1 = R^2\Delta - n(n+3)$ commute avec les $X_{\alpha'\beta'}$, on a

$$\sum_{A=1}^{s}(x^{\lambda'_A}\partial_{\mu'_A})_A T^{\mu'_1\ldots\mu'_s} = N T^{\lambda'_1\ldots\lambda'_s}$$

qui donne, par contraction, avec $x_{\lambda'_A}$, $\partial_{\mu'_A}T^{\mu'_1\ldots\mu'_s} = 0$. Il en résulte :

$$(16)\qquad R^2 I_1 = R^2\Delta - n(n+3) - s(s+1).$$

Avec le même ensemble d'hypothèses l'opérateur de *Casimir* de quatrième degré vient :

$$(17)\qquad R^2 I_2 = -\eta^{\alpha'\beta'}V_{\alpha'}V_{\beta'} = s(s+1)[R^2\Delta - n(n+3) - 2),$$

où

$$V^{\alpha'} = \frac{1}{8}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'}X_{\beta'\gamma'}X_{\delta'\varepsilon'}.$$

Dans les équations (15) et (17) on a fait $x^4 = 1$.

5. DÉRIVÉS ET LAPLACIENS

Le dérivé covariant dans V_4 est évidemment :

$$\mathring{\nabla}_\alpha T = \mathscr{P}_\tau \nabla_\alpha T. \tag{18}$$

Si on considère les champs « physiques » homogènes, du degré n, la formule inverse est :

$$\nabla_\alpha T_{\beta_1 \ldots \beta_p}{}^{\gamma_1 \ldots \gamma_q} = \mathring{\nabla}_\alpha T_{\beta_1 \ldots \beta_p}{}^{\gamma_1 \ldots \gamma_q} + \frac{1}{Rx^4}\Big\{ - n\xi_\alpha T_{\beta_1 \ldots \beta_p}{}^{\gamma_1 \ldots \gamma_q} + \sum_{A=1}^{p} \xi_{\beta_A} T_{\beta_1 \ldots \beta_{A-1}\alpha\beta_{A+1}\ldots\beta_p}{}^{\gamma_1 \ldots \gamma_q} + \sum_{B=1}^{q} \xi^{\gamma_B} T_{\beta_1 \ldots \beta_p}{}^{\gamma_1 \ldots \gamma_{B-1}}{}_{\alpha}{}^{\gamma_{B+1}\ldots\gamma_q} \Big\}. \tag{19}$$

Le dérivé du champ ξ^β est :

$$\nabla_\alpha \xi^\beta = \frac{1}{Rx^4}(\delta^\beta_\alpha + \xi_\alpha \xi^\beta). \tag{20}$$

Avec (19) et (20) on obtient :

$$(\Delta T)_{i_1 i_2 \ldots i_s} = - \mathring{g}^{hk} \mathring{\nabla}_h \mathring{\nabla}_k T_{i_1 i_2 \ldots i_s} + \frac{1}{(Rx^4)^2}[n(n+3) - s] T_{i_1 i_2 \ldots i_s}, \tag{21}$$

$$(\Delta T)_{4 i_2 \ldots i_s} = \frac{2}{x^4} \mathring{\nabla}_j T^j{}_{i_2 \ldots i_s}, \text{ etc.},$$

$$(\Delta T)_{44 i_3 \ldots i_s} = - \frac{2}{(x^4)^2} T_j{}^j{}_{i_3 \ldots i_s}, \text{ etc.}$$

tous les autres composants sont nuls.

Nous adoptons le laplacien introduit par *Lichnerowicz* [8], qui généralise le laplacien d'une forme au sens de *De Rahm* ; c'est-à-dire :

$$(\mathring{\Delta} T)_{i_1 \ldots i_s} = - \mathring{g}^{hk} \mathring{\nabla}_h \mathring{\nabla}_k T_{i_1 \ldots i_s} + \sum_{A=1}^{s} \mathring{R}_{i_A r} T_{i_1 \ldots i_{A-1}}{}^{r}{}_{i_{A+1} \ldots i_s} - \sum_{A \neq B} \mathring{R}_{i_A r i_B l} T_{i_1 \ldots i_{A-1}}{}^{r}{}_{i_{A+1} \ldots i_{B-1}}{}^{l}{}_{i_{B+1} \ldots i_s}. \tag{22}$$

Pour tout tenseur, satisfaisant l'ensemble d'hypothèses du paragraphe 4, on trouve :

$$\mathring{\Delta} T = \Delta T - \frac{1}{R^2}[n(n+3) + s(s+1)]T,$$

où nous avons fait $x^4 = 1$, comme nous ferons à la suite.

6. DISCUSSION ET CONCLUSION

De (16) et (23) il résulte $I_1 = \mathring{\Delta}$, les théories de type b et c sont donc identiques; si on adopte le laplacien (22) (cette adoption est d'ailleurs justifiée par le principe d'équivalence [2]).

On peut prendre les autovaleurs des opérateurs de *Casimir* d'après l'article [7]:

$$(24)\qquad \begin{aligned} R^2 I_1 &= R^2\Delta - n(n+3) - s(s+1) = -e(e+1) - f(f-1) + 2\,; \\ R^2 I_2 &= s(s+1)[R^2\Delta - n(n+3) - 2] = -e(e+1)f(f-1) \end{aligned}$$

d'où, on a immédiatement que $e = s$ puisque, d'ailleurs, e prend des valeurs entières et semi-entières seulement. Ainsi il vient

$$(25)\qquad R^2\Delta - n(n+3) = -f(f-1) + 2$$

Δ et n sont arbitraires, sauf pour le lien (25). On peut donc faire $\Delta = 0$ d'où

$$(26)\qquad n = f - 2$$

Ainsi on peut interpréter e et f comme le spin et le degré d'homogénéité (moins deux). L'équation $\Delta = 0$ sur les champs des tenseurs « physiques » symétriques implique l'annulation des traces et des divergences (cfr. (21)) et l'équation d'onde. En plus, si on essaie de résoudre $\Delta = 0$ par séparation de variables on trouve le facteur $(x^4)^n$.

Pour $s = 1$, $I_1 = 0$ on a $n = -1$ (ou -2), qui est précisément l'homogénéité de la théorie de *Dirac* pour le champ électromagnétique. Les théories du type a coïncident donc avec celles du type b et c.

Les opérateurs de *Casimir* sont reliés par l'équation (qui a été déjà prévue dans l'article [*1*]):

$$(27)\qquad I_2 = s(s+1)[I_1 + (R^{-2})(s^2 + s - 2)]$$

Notre théorie a comme limite la théorie ordinaire de l'espace-plan, si on fait la contraction $R \to \infty$ [*6*].

Toutes les séries des représentations du groupe SO(4, 1) sont engendrées pour les champs tensoriels, sauf les séries $D^+{}_{ef}$ et $C^{1/2}{}_{er}$ (mais cette dernière sera le sujet d'un autre travail).

Finalement, on peut voir que le champ métrique $\mathring{g}_{ij}$ satisfait identiquement les équations correspondantes. En effet, on trouve:

$$(28)\qquad \mathring{\Delta} g_{ij} = \mathring{R}_{ij}.$$

Si T_{ij} est un tenseur symétrique de trace zéro et T un scalaire, les équations sont respectivement

$$\mathring{\Delta} T_{ij} = \mu^2 T_{ij} \quad ; \quad \mathring{\Delta} T = \mu^2 T. \tag{29}$$

Mais si T_{ij} est un tenseur symétrique avec trace $T \neq 0$, de l'équation :

$$\mathring{\Delta}\left(T_{ij} - \frac{1}{4} T \mathring{g}_{ij}\right) = \mu^2\left(T_{ij} - \frac{1}{4} T \mathring{g}_{ij}\right), \tag{30}$$

la (28) et la (29_2), on trouve que T_{ij} doit satisfaire :

$$\mathring{\Delta} T_{ij} - \frac{1}{4} T \mathring{R}_{ij} = \mu^2 T_{ij}. \tag{31}$$

Ainsi $\mathring{g}_{ij}$, de trace $\mathring{g}^{ij}\mathring{g}_{ij} = 4$, satisfait l'équation (31) avec masse $\mu = 0$, en effet :

$$\mathring{\Delta} g_{ij} - \mathring{R}_{ij} = 0 \tag{32}$$

RÉFÉRENCES

[1] Börner, G. et Dürr, H. P., Classical and quantum fields, in *De Sitter space*. Preprint, June, 1969 et *Nuovo Cim.*, **44**, n° 3, 1969, p. 669.

[2] Castagnino, M., *Rend. Accad. Naz. Lincei*, **44**, 1968, p. 534.

[3] Dirac, P. A. M., *Ann. of Math.*, **36**, n° 3, 1935, p. 657.

[4] Gürsey, F., *Les Houches*, 1963, p. 91. New York, 1964.

[5] Hannabuss, K. C., *J. Phys. A. (Gen. Phys.)*, **2**, 1969, p. 274.

[6] Inonu, E. et Wigner, E. P., *Proc. Nat. Acc. Sci.*, **39**, 1953, p. 510.

[7] Kurigan, J. G. *et al.*, *Commun. Math. Phys.*, **8**, 1968, p. 204.

[8] Lichnerowicz, A., *Inst. Haut. Ét. Sci. Publ. Math.*, n° 10, 1961.

[9] Nachtmann, O., *Commun. Math. Phys.*, **6**, 1967, p. 1.

Manuscrit reçu le 23 mars 1970.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1710*a*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6122. 12-1970.