

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

L. BEL

B. LÉAUTÉ

Champ scalaire et configurations d'équilibre de grosses masses

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, n° 3 (1969), p. 317-348

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_3_317_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Champ scalaire et configurations d'équilibre de grosses masses

par

L. BEL et B. LÉAUTÉ

Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.,
Institut H. Poincaré, Paris.

RÉSUMÉ. — Nous étudions les configurations matérielles à symétrie sphérique en équilibre sous l'action d'une part, du champ de gravitation et d'un champ scalaire répulsif à courte portée, d'autre part. Nous résolvons les équations du modèle aux deux premiers ordres et nous discutons l'existence d'une masse limite. Que cette masse limite existe ou pas, nous montrons que des configurations dépassant largement la $M_{\odot}$ sont parfaitement possibles dans le cadre de ce modèle.

SUMMARY. — The object of study will be spherically symmetric configurations of matter in equilibrium under the influence of the gravitational field on one side, and a scalar field, repulsive at short range, on the other side. The equation of the model will be solved to second order approximation and the existence of a limiting mass will be discussed.

Whether this limiting mass exists or not we will show that configurations surpassing greatly $M_{\odot}$ are quite possible in the framework of this model.

1. INTRODUCTION

Il semble couramment admis aujourd'hui qu'une configuration statique à symétrie sphérique de matière froide, c'est-à-dire ayant épuisé ses ressources énergétiques conventionnelles, ne peut exister que si sa masse

est de l'ordre ou inférieure à une $M_{\odot}$ [1] [2]. Cette opinion est le plus souvent fondée sur l'étude des configurations décrites par un schéma fluide parfait complété par une équation de compressibilité compatible avec la causalité ; c'est-à-dire, conduisant à une vitesse du son inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide ⁽¹⁾.

Il semble aussi couramment admis que même dans le cas où l'on considère que les particules de la configuration agissent les unes sur les autres par des forces à courte portée, ces interactions peuvent être résumées par une équation de compressibilité déduite du tenseur d'impulsion-énergie du champ correspondant, en définissant en particulier la pression par la moyenne des trois tensions principales [5].

Nous envisageons dans cet article des configurations matérielles à symétrie sphérique en équilibre sous l'action du champ de gravitation d'une part et d'un champ scalaire répulsif à courte portée d'autre part. Nous traduisons la notion de matière froide en supposant que la pression cinématique est nulle.

Nous verrons que, d'après ce modèle, dont nous résolvons les équations aux deux premiers ordres, des configurations dépassant très largement une $M_{\odot}$ sont parfaitement possibles sans qu'il y ait violation de la causalité. Malheureusement, la question de savoir s'il existe néanmoins une masse limite restera incertaine du fait que si elle existe elle correspond, pour les valeurs de l'intensité et de la portée du champ scalaire que nous avons choisies comme exemple, à une valeur de la densité centrale pour laquelle la validité de la deuxième approximation devient douteuse. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que nos calculs apportent des fortes présomptions quant à l'existence de cette masse limite.

Nous verrons enfin qu'il n'est pas toujours possible de substituer à notre modèle, toutes choses égales d'ailleurs, un modèle de type fluide parfait complété par une équation de compressibilité appropriée ; il ne semble pas, pour autant, que ceci soit la vraie raison pour laquelle on puisse dépasser largement une $M_{\odot}$. En fait, les valeurs des paramètres que nous avons choisies comme exemple correspondent à un cas où cette substitution est possible, au moins au premier ordre significatif.

Nous ne prétendons pas avoir construit un modèle réaliste. Notre but n'était pas celui-ci, mais de répondre à des questions de principe dont l'intérêt théorique est cependant assez évident.

⁽¹⁾ Une approche très différente est cependant envisagée dans [3] et [4] qui conduit néanmoins à une masse limite du même ordre.

2. ÉQUATIONS DU CHAMP

2.1. Cas général.

Les équations du champ sont, d'une part, les équations d'Einstein :

$$(2-1) \quad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3)$$

et, d'autre part, l'équation de Klein-Gordon qui régit le champ scalaire Φ ⁽¹⁾:

$$(2-2) \quad \square \Phi - \mu^2 \Phi = -\kappa \sigma \quad \text{où} \quad \square = \nabla_\alpha \nabla^\alpha.$$

Dans cette équation : κ est la constante de couplage, μ l'inverse de la portée, σ la densité de charge, source du champ.

Le tenseur d'impulsion énergie total ⁽¹⁾, matière et champ, s'écrit ainsi qu'il suit :

$$(2-3) \quad T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \tau \left[\Phi_\alpha \Phi_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\Phi^\rho \Phi_\rho + \mu^2 \Phi^2) \right], \quad u^\alpha u_\alpha = -1$$

où ρ est la densité de matière, u_α la vitesse unitaire du fluide et τ une constante de dimensions qui sera fixée ultérieurement. $T_{\alpha\beta}$ satisfait à :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

relation qui, compte tenu de (2-2) conduit à :

$$(2-4) \quad \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) + \tau \kappa \sigma u^\alpha \Phi_\alpha = 0$$

et à

$$(2-5) \quad \rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \tau \kappa \sigma (g^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta) \Phi_\alpha = 0$$

qui est l'équation aux lignes de courant.

Nous venons d'écrire les équations relatives au cas intérieur; pour celles relatives au cas extérieur, il nous suffit d'annuler ρ et σ obtenant ainsi :

$$(2-6) \quad S_{\alpha\beta} = \chi \tau T_{\alpha\beta}^{(\text{ch})} \quad , \quad T_{\alpha\beta}^{(\text{ch})} \equiv \Phi_\alpha \Phi_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\Phi^\rho \Phi_\rho + \mu^2 \Phi^2)$$

$$(2-7) \quad \square \Phi - \mu^2 \Phi = 0.$$

⁽¹⁾ Notons que le champ scalaire est traité ici selon une théorie différente de celle la plus couramment utilisée actuellement, nous exposons et justifions notre point de vue en un appendice en fin d'article auquel nous renvoyons le lecteur.

2.2. Cas statique à symétrie sphérique.

2.2.1. CAS STATIQUE

Supposons que l'espace-temps soit statique, il admet alors un groupe d'isométrie à trajectoires orientées dans le temps; si $\vec{\xi}$ est le vecteur générateur de ce groupe, nous considérons le système de coordonnées adaptées à $\vec{\xi}$, tel que :

$$(2-8) \quad \xi^0 = 1 \quad , \quad \xi^i = 0 \quad ; \quad \xi_0 = g_{00} \quad , \quad \xi_i = 0$$

$$\text{et} \quad \vec{\xi}^2 = -\xi^2 = g_{00} \quad (x^0 = ct ; i, j, \dots = 1, 2, 3)$$

ceci équivaut à écrire que, dans ce système de coordonnées :

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0, \quad g_{0i} = 0.$$

Par ailleurs on a aussi :

$$(2-9) \quad \partial_0 \Phi = 0$$

$$(2-10) \quad \partial_0 u_\alpha = 0$$

et

$$(2-11) \quad \vec{\xi} = \xi u.$$

En raison des relations (2-9), (2-10), (2-11), les équations (2-4) et (2-5) s'écrivent, en coordonnées générales, sous les formes suivantes :

$$(2-12) \quad \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = 0$$

$$(2-13) \quad \rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \tau \kappa \sigma \Phi_\beta = 0.$$

Cette dernière équation peut encore être écrite par (2-11) :

$$(2-14) \quad \rho \partial_\beta (\text{Log } \xi) - \tau \kappa \sigma \Phi_\beta = 0.$$

Cette relation, ainsi que nous le verrons, traduit le fait que la configuration est en équilibre.

2.2.2. CAS STATIQUE A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

La forme générale des métriques statiques à symétrie sphérique est la suivante :

$$(2-15) \quad ds^2 = -e^{2\alpha} dT^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2 e^{2\gamma} d\Sigma^2, \quad d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad T = x^0$$

avec α, β, γ fonctions de r seulement; nous avons aussi Φ fonction de r . Indiquons encore que, d'après (2-8) :

$$\alpha = \text{Log } \xi.$$

La métrique (2-15) peut être décomposée sous la forme :

$$(2-16) \quad ds^2 = -(\omega^0)^2 + \sum_i (\omega^i)^2$$

avec

$$(2-17) \quad \omega^0 = e^\alpha dT, \quad \omega^1 = e^\beta dr, \quad \omega^2 = e^\gamma r d\theta, \quad \omega^3 = e^\gamma r \sin \theta d\varphi.$$

On a, dans le repère orthonormé correspondant :

$$(2-18) \quad u^0 = 1, \quad u^i = 0; \quad u_0 = -1, \quad u_i = 0; \quad \Phi_1 = e^{-\beta} \Phi'$$

(le signe ' indique la dérivation par rapport à r).

Écrivons les équations d'Einstein, dans ce repère :

$$(2-19) \quad S_{00} \equiv 2E + D = \chi(\rho + q)$$

$$(2-20) \quad S_{11} \equiv -(2C + D) = \chi p$$

$$(2-21) \quad S_{22} = S_{33} \equiv -(A + E + C) = -\chi q$$

où l'on a posé :

$$(2-22) \quad q = \frac{\tau}{2} (e^{-2\beta} \Phi'^2 + \mu^2 \Phi^2),$$

$$(2-23) \quad p = \frac{\tau}{2} (e^{-2\beta} \Phi'^2 - \mu^2 \Phi^2).$$

Les quantités A, C, D, E sont explicitées en appendice II A.

Aux équations d'Einstein (2-19), (2-20), (2-21), s'ajoute l'équation relative à Φ qui s'écrit maintenant :

$$(2-24) \quad e^{-2\beta} \left[\Phi'' + \left(\frac{2}{r} + 2\gamma' + \alpha' - \beta' \right) \Phi' \right] - \mu^2 \Phi = -\kappa \sigma.$$

Des identités de Bianchi, il résulte la relation suivante :

$$(2-25) \quad e^{-2\beta} \left[\Phi'' + \left(\frac{2}{r} + 2\gamma' + \alpha' - \beta' \right) \Phi' \right] \Phi' - \mu^2 \Phi \Phi' = -\frac{\alpha'}{\tau} \rho$$

Comparant (2-24) et (2-25), on obtient :

$$(2-26) \quad \rho\alpha' - \tau\kappa\sigma\Phi' = 0.$$

Relation que l'on pourra substituer dans le cas intérieur à l'une des équations du système d'Einstein (2-19), (2-20), (2-21), obtenant ainsi un nouveau système équivalent.

2.2.3. NOUVELLE FORMULATION DES ÉQUATIONS DU CHAMP

En vue de reformuler d'une façon plus simple les équations composant le système (2-19), (2-20), (2-21) et (2-24), nous allons faire intervenir, comme intermédiaire de calcul, les coefficients de la métrique $\bar{ds}^2$ conforme à la métrique d'espace :

$$\bar{ds}^2 = \xi^2 \hat{ds}^2 \quad \text{où} \quad \hat{ds}^2 = \sum_i (\omega^i)^2$$

c'est-à-dire

$$(2-27) \quad d\bar{s}^2 = e^{2B} dr^2 + r^2 e^{2C} d\Sigma^2$$

avec

$$(2-28) \quad B = \beta + \alpha, \quad C = \gamma + \alpha.$$

Le système de coordonnées reste encore partiellement indéterminé, il faut ajouter, aux équations du champ, une relation compatible avec les conditions de raccordement. Diverses possibilités existent, nous retiendrons le choix suivant, à savoir, que les coordonnées x, y, z , liées à r, θ, φ comme suit :

$$(2-29) \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

soient harmoniques. Ceci s'exprime par la relation :

$$(2-30) \quad \left(\frac{2}{r} + 2C' - B' \right) e^{-2B} - \frac{2}{r} e^{-2C} = 0.$$

Compte tenu de cette dernière relation et après quelques combinaisons linéaires des équations (2-19), (2-20), (2-21), on obtient un système complet

d'équations indépendantes dont l'écriture explicite est la suivante :

$$(2-31) \quad \alpha'' e^{-2B} + \frac{2}{r} e^{-2C} \alpha' = \frac{1}{2} \xi^{-2} \chi (\rho - \tau \mu^2 \Phi^2)$$

$$(2-32) \quad e^{-2B} \left[\left(\frac{1}{r} + C' \right)^2 - \alpha'^2 \right] \frac{1}{r^2} e^{-2C} = \xi^{-2} \chi p$$

$$(2-33) \quad e^{-2B} \Phi'' + \frac{2}{r} e^{-2C} \Phi' - \mu^2 \xi^{-2} \Phi = \kappa \xi^{-2} \sigma$$

$$(2-34) \quad \rho \alpha' - \tau \kappa \sigma \Phi' = 0$$

$$(2-35) \quad \left(\frac{2}{r} + 2C' - B' \right) e^{-2B} - \frac{2}{r} e^{-2C} = 0.$$

Précisons les formes prises par ce système selon que l'on se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution matérielle.

2.2.3.1. Cas intérieure

Le système précédent fait intervenir ρ , la densité matérielle, et σ la densité de charge, il est physiquement correct d'admettre la proportionnalité de ces grandeurs :

$$(2-36) \quad \sigma = k\rho.$$

En tenant compte de cette relation le système (2-31) ... (2-35) prend la nouvelle forme :

$$(2-37) \quad e^{-2B} \Phi'' + \frac{2}{r} e^{2C} \Phi' + \lambda^2 \xi^{-2} \Phi = \kappa k \tau \lambda^2 \Phi^2 \xi^{-2}$$

$$(2-38) \quad e^{-2B} \left[\left(\frac{1}{r} + C' \right)^2 - \alpha'^2 \right] - \frac{1}{r^2} e^{-2C} = \chi \xi^{-2} p$$

$$(2-39) \quad \alpha' - \tau \kappa k \Phi' = 0$$

$$(2-40) \quad e^{-2B} \left(\frac{2}{r} + 2C' - B' \right) - \frac{2}{r} e^{-2C} = 0$$

$$(2-41) \quad \rho = \lambda^2 \left(\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\kappa k \lambda^2} \Phi - \tau \Phi^2 \right)$$

l'on a posé

$$(2-42) \quad \lambda^2 = - \frac{\chi \mu^2}{2 \kappa^2 k^2 \tau + \chi}.$$

Nous supposerons λ réel et positif, car en fait, on peut démontrer que si λ^2 est négatif, il n'existe pas de configuration d'équilibre.

2.2.3.2. Cas extérieur

Le système des équations relatives au cas extérieur s'obtient à partir de (2-31) ... (2-35), en annulant ρ et σ :

$$(2-43) \quad e^{-2B}\Phi'' + \frac{2}{r}e^{-2C}\Phi' - \mu^2\xi^{-2}\Phi = 0$$

$$(2-44) \quad e^{-2B}\alpha'' + \frac{2}{r}\alpha'e^{-2C} = -\frac{1}{2}\chi\tau\mu^2\xi^{-2}\Phi^2$$

$$(2-45) \quad e^{-2B}\left[\left(\frac{1}{r} + C'\right)^2 - \alpha'^2\right] - \frac{1}{r^2}e^{-2C} = \chi\xi^{-2}p$$

$$(2-46) \quad e^{-2B}\left(\frac{2}{r} + 2C' - B'\right) - \frac{2}{r}e^{-2C} = 0.$$

3. SOLUTION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS

3.1. Écriture approchée du système des équations.

Nous envisageons maintenant d'obtenir une solution approchée ; à cette fin chacune des fonctions inconnues sera écrite sous forme d'un développement limité au second ordre, par rapport à un paramètre ζ , sans dimension, qui sera précisé ultérieurement.

On a ainsi :

$$(3-1) \quad \Phi \simeq \zeta\Phi_1 + \frac{1}{2}\zeta^2\Phi_2, \quad \alpha \simeq \zeta\alpha_1 + \frac{1}{2}\zeta^2\alpha_2$$

d'où

$$(3-2) \quad \xi^{-2} \equiv e^{-2\alpha} \simeq 1 - 2\zeta\alpha_1 + \zeta^2(2\alpha_1^2 - \alpha_2).$$

La considération des équations (2-38), (2-40), (2-45), (2-46), compte tenu de conditions aux limites, que nous expliciterons précisément dans la suite, permet d'écrire B et C comme suit :

$$(3-3) \quad B \simeq \frac{1}{2}\zeta^2B_2, \quad C \simeq \frac{1}{2}\zeta^2C_2$$

Enfin :

$$(3-4) \quad \rho \simeq \zeta\rho_1 + \frac{1}{2}\zeta^2\rho_2.$$

Reportant ces expressions dans les systèmes (2-37) ... (2-41) et (2-43) ... (2-46), on obtient, après séparation des termes d'ordre 1 et 2 en ζ :

3.1.1. CAS INTÉRIEUR

$$(3-5) \quad \Phi_1'' + \frac{2}{r_1} \Phi_1' + \lambda^2 \Phi_1 = 0 \leftrightarrow \alpha_1'' + \frac{2}{r_1} \alpha_1' = \frac{1}{2} \chi \rho_1$$

$$(3-6) \quad \Phi_2'' + \frac{2}{r_2} \Phi_2' + \lambda^2 \Phi_2 = 2\lambda^2 (2\alpha_{11} \Phi_1 + \kappa \tau k \Phi_1^2)$$

$$(3-7) \quad \alpha_1' - \tau \kappa k \Phi_1' = 0$$

$$(3-8) \quad \alpha_2' - \tau \kappa k \Phi_2' = 0$$

$$(3-9) \quad -\frac{1}{r_2^2} B_2 + \frac{1}{r_2} C_2' - \alpha_1'^2 + \frac{1}{r_2^2} C_2 = \frac{1}{2} \chi \tau (\Phi_1'^2 - \mu^2 \Phi_1^2)$$

$$(3-10) \quad 2C_2' - B_2' - \frac{4}{r_2} B_2 + \frac{4}{r_2} C_2 = 0$$

$$(3-11) \quad \rho_1 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\kappa k} \Phi_1$$

$$(3-12) \quad \rho_2 = 2\lambda^2 \left(\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2\kappa k \lambda^2} \Phi_2 - \tau \Phi_1^2 \right)$$

3.1.2. CAS EXTÉRIEUR

Dans ces équations interviennent les fonctions notées $\overset{e}{\Phi}$, $\overset{e}{\alpha}$ relatives à l'extérieur :

$$(3-13) \quad \overset{e}{\Phi}_1'' + \frac{2}{r_1} \overset{e}{\Phi}_1' - \mu^2 \overset{e}{\Phi}_1 = 0$$

$$(3-14) \quad \overset{e}{\Phi}_2'' + \frac{2}{r_2} \overset{e}{\Phi}_2' - \mu^2 \overset{e}{\Phi}_2 = -4\mu^2 \overset{e}{\alpha}_1^2 \overset{e}{\Phi}_1$$

$$(3-15) \quad \overset{e}{\alpha}_1'' + \frac{2}{r_1} \overset{e}{\alpha}_1' = 0$$

$$(3-16) \quad \overset{e}{\alpha}_2'' + \frac{2}{r_2} \overset{e}{\alpha}_2' = -\chi \tau \mu^2 \overset{e}{\Phi}_1^2.$$

Les équations relatives à $\overset{e}{B}$ et $\overset{e}{C}$ s'écriraient sous la même forme que dans le cas intérieur, notons toutefois qu'il y aurait lieu de remplacer, dans ces expressions, α_1' , Φ_1 , Φ_1' par $\overset{e}{\alpha}_1'$, $\overset{e}{\Phi}_1$, $\overset{e}{\Phi}_1'$.

3.1.3. CONDITIONS AUX LIMITES

Pour permettre la détermination complète des solutions intérieures et extérieures, il faut préciser les conditions aux limites auxquelles elles doivent satisfaire. On impose deux séries de conditions :

— à l'origine Φ , α , B et C devront être finies et $\rho(0)$ nulle,

— lorsque r tend vers l'infini Φ , α , B et C devront tendre vers 0. Ces conditions assureront d'une part, la régularité des coefficients $g_{\alpha\beta}$ de la métrique, aussi bien que celle de Φ , dans tout l'intervalle des valeurs de r et, d'autre part, le caractère minkowskien de l'espace-temps à l'infini. En plus de ces conditions aux limites, il y aura lieu de raccorder les solutions intérieures et extérieures; la procédure convenable sera précisée ultérieurement. Notons que la première condition, $\rho(0)$ nulle entraîne :

$$(3-17) \quad \Phi(0) = \frac{2\kappa\tau k\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \Phi^2(0).$$

3.2. Solutions approchées des équations.

3.2.1. PREMIER ORDRE

Les équations (3-5), (3-7), (3-11), (3-13), (3-15), relatives au premier ordre, correspondent à une théorie newtonienne du problème. Si l'on pose :

$$(3-18) \quad V_1 = c^2\alpha_1, \quad V_{\text{New.}} = \zeta V_1; \quad \chi = \frac{8\pi G}{c^2} \quad \text{et} \quad \kappa = -\frac{1}{\tau c^2} = 4\pi g$$

(où g est une constante de couplage relative à Φ), les équations (3-15) et (3-5) sont les équations de Laplace et Poisson portant sur V ; l'équation (3-7) s'écrit :

$$(3-19) \quad c^2\alpha'_1 + k\Phi'_1 = 0$$

à cet ordre d'approximation, elle traduit le fait que la matière est en équilibre sous l'action des champs de gravitation V et scalaire Φ . Les équations du premier ordre sont facilement résolues; compte tenu des conditions aux limites de l'alinéa 3.1.3, leurs solutions s'écrivent :

Pour l'intérieur

$$(3-20) \quad \Phi = A \frac{\sin \lambda r}{r}, \quad c^2\alpha = -Ak \frac{\sin \lambda r}{r} + v_1$$

Pour l'extérieur

$$(3-21) \quad \Phi_1^e = A_1^e \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad c^2 \alpha_1^e = -P_1 \frac{1}{r}.$$

Les expressions (3-20) et (3-21) contiennent plusieurs constantes d'intégration; la satisfaction des conditions de raccordement donnera le moyen de les déterminer.

3.2.2. SECOND ORDRE

Nous devons résoudre les équations (3-6) (3-14) pour Φ , (3-8) (3-16) pour α , (3-9) (3-10) pour B et C ; ce sont des équations différentielles linéaires du second ordre avec second membre, l'obtention des solutions se fait selon une méthode classique bien connue. On trouve les expressions suivantes :

Pour l'intérieur

$$(3-22) \quad \Phi_2 = \frac{\sin \lambda r}{\lambda r} \left(a + \int_0^r F u \cos \lambda u du \right) - \frac{\cos \lambda r}{\lambda r} \int_0^r F u \sin \lambda u du$$

on a posé

$$(3-23) \quad F = 2\lambda^2 \left(2\alpha_1^2 - \frac{k}{c^2} \Phi_1^2 \right), \quad a \equiv \Phi_2(0) = \frac{2\kappa\tau k\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \Phi_1^2(0)$$

c'est-à-dire par (3-18) et (3-20)

$$(3-24) \quad a = - \frac{2k\lambda^4}{c^2(\lambda^2 + \mu^2)} A_1^2$$

$$(3-25) \quad c^2 \alpha_2 = -k \Phi_2 + v_2$$

Pour l'extérieur

$$(3-26) \quad \Phi_2^e = - \frac{e^{-\mu r}}{2\mu r} \left(a^e + \int_R^r H u e^{\mu u} du \right) - \frac{e^{\mu r}}{2\mu r} \int_r^\infty H u e^{-\mu u} du$$

avec

$$(3-27) \quad H = -4\mu^2 \alpha_1^e \Phi_1^e$$

$$(3-28) \quad \alpha_2 = -\frac{2}{c^2 r} - \int_r^\infty J u du + \frac{1}{r} \int_r^\infty J u^2 du$$

avec

$$(3-29) \quad J = \frac{\chi \mu^2}{\kappa c^2} \Phi_1^e \equiv 2 \frac{G}{c^4 g} \mu^2 \Phi_1^e.$$

Les expressions (3-25), (3-26), (3-28) des solutions Φ, α , contiennent diverses

constantes a, v, P dont les valeurs seront obtenues par raccordement des solutions intérieures et extérieures. Indiquons enfin les expressions de C

et B :

$$(3-30) \quad C = -\frac{4}{3} \int_r^\infty I u du - \frac{1}{3r^3} \int_0^r I u^4 du$$

$$(3-31) \quad B = -\frac{4}{3} \int_r^\infty I u du + \frac{2}{3r^3} \int_0^r I u^4 du$$

avec

$$(3-32) \quad I = \alpha_1'^2 + \frac{1}{2} \chi \tau (\Phi_1'^2 - \mu^2 \Phi_1^2).$$

L'écriture de ces fonctions C et B est formellement identique, que l'on considère les cas intérieur ou extérieur; il convient seulement de faire figurer dans I les quantités α', Φ, Φ ou α', Φ, Φ' selon que r est inférieur à R , ou, au contraire, qu'il l'excède.

3.2.3. RACCORDEMENT

Nous envisageons maintenant de décrire la procédure de raccordement des solutions approchées précédemment obtenues. Il y a lieu de requérir la continuité des potentiels α, Φ et celle de leurs dérivées premières à la surface de raccordement; la continuité de B, C et de leurs dérivées B', C' est alors automatiquement assurée.

Soit R la valeur du rayon de la sphère de raccordement, nous devons avoir pour Φ , par exemple :

$$(3-33) \quad \begin{cases} \Phi(R) = \Phi(R) \\ \Phi'(R) = \Phi'(R). \end{cases}$$

Les fonctions Φ, Φ doivent être remplacées par leurs développements limités et R écrit sous la forme :

$$(3-34) \quad R \simeq R_0 + \zeta R_1.$$

Il convient ensuite d'identifier les termes de même ordre disposés de part et d'autre du signe égalité en (3-33), on obtient ainsi :

— *Au premier ordre :*

$$(3-35) \quad \Phi(R) = \overset{e}{\Phi}(R)_{1 \ 0}, \quad \Phi'(R) = \overset{e}{\Phi}'(R)_{1 \ 0}$$

— *Au second ordre :*

$$(3-36) \quad \Phi(R) = \overset{e}{\Phi}(R)_{2 \ 0}, \quad \Phi'(R) - \overset{e}{\Phi}'(R)_{2 \ 0} = 2[\overset{e}{\Phi}''(R)_{1 \ 0} - \overset{e}{\Phi}''(R)_{1 \ 0 \ 1}]R.$$

L'écriture explicite des conditions (3-35) à l'aide des solutions (3-20) (3-21) permet de calculer les constantes R , A et ν . On trouve d'abord :

$$(3-37) \quad \operatorname{tg} \lambda R_0 = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

Notons que cette relation impose des limites aux valeurs de R admissibles *a priori*; compte tenu de la nécessité évidente d'avoir $\rho(r)$ positif pour toute valeur de $r \leq R$, il résulte de (3-37) que R doit être tel que :

$$(3-38) \quad \frac{\pi}{2} < \lambda R_0 < \pi.$$

On a ensuite pour $\overset{e}{A}_1$:

$$(3-39) \quad \overset{e}{A}_1 = A e^{\mu R_0} \sin \lambda R_0.$$

L'écriture des conditions de raccordement pour α et $\overset{e}{\alpha}$ permet de déterminer les constantes P et ν , incluses dans les solutions du premier ordre α et $\overset{e}{\alpha}$. On obtient :

$$(3-40) \quad P_1 = A k (\sin \lambda R_0 - \lambda R_0 \cos \lambda R_0)$$

$$(3-41) \quad \nu_1 = A k \lambda \cos \lambda R_0$$

quantités que l'on peut écrire, par (3-37), comme suit :

$$(3-42) \quad P_1 = A k \frac{\lambda(1 + \mu R_0)}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}}$$

$$(3-43) \quad v_1 = -A_1 k \frac{\lambda \mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}}.$$

Si l'on choisit pour paramètre ζ , la quantité sans dimension :

$$(3-44) \quad \zeta = -\frac{V(0)}{c^2} \equiv -\alpha_1(0)$$

il en résulte la valeur de A_1 :

$$(3-45) \quad A_1 = \frac{c^2}{\lambda k(1 - \cos \lambda R)_0}.$$

3.2.4. REMARQUES

1) La procédure de raccordement, telle qu'elle vient d'être décrite, pour aboutir à la détermination d'un rayon de raccordement R_0 implique que λ^2 soit un nombre réel et l'on peut choisir $\lambda > 0$. Le rappel de l'expression de λ^2 (2-42) :

$$\lambda^2 = -\frac{\chi \mu^2}{2\kappa^2 k^2 \tau + \chi}$$

ou, compte tenu de (3-18) :

$$(3-46) \quad \lambda^2 = \mu^2 \frac{G}{k^2 g} \frac{1}{1 - \frac{G}{k^2 g}}$$

montre que, pour qu'il en soit ainsi ($\lambda^2 > 0$), il est nécessaire que k et g satisfassent à l'inégalité :

$$(3-47) \quad \frac{G}{kg^2} < 1.$$

Admettons qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire que :

$$\frac{G}{k^2 g} > 1$$

alors, au lieu de (3-37), nous obtiendrions :

$$\text{th } \lambda R_0 = -\frac{\lambda}{\mu}$$

cette relation ne saurait conduire à aucune valeur positive de R_0 , d'où la nécessité de supposer l'inégalité (3-47) réalisée.

2) La résolution directe des équations, dans le cadre de la théorie de Newton, permet de déterminer l'expression de ζ ; on obtient :

$$(3-48) \quad \zeta = \frac{4\pi G}{\lambda^2 c^2} \rho(0)(1 - \cos \lambda R).$$

Notons la proportionnalité entre ζ et $\rho(0)$, la densité centrale.

4. MASSE TOTALE

4.1. Étude de la masse grave en seconde approximation. Existence d'une valeur maximum.

4.1.1. Considérons la solution de Schwarzschild écrite en coordonnées harmoniques :

$$(4-1) \quad ds^2 = - \frac{1 - \frac{GM}{c^2 r}}{1 + \frac{GM}{c^2 r}} c^2 dt^2 + \frac{1 + \frac{GM}{c^2 r}}{1 - \frac{GM}{c^2 r}} dr^2 + \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right)^2 r^2 d\Sigma^2$$

Le coefficient que nous avons noté, $e^{2\alpha}$, en général, se trouve valoir ici :

$$(4-2) \quad e^{2\alpha} = \frac{1 - \frac{GM}{c^2 r}}{1 + \frac{GM}{c^2 r}}$$

La quantité M , masse grave du corps source du champ gravitationnel, peut être écrite comme suit :

$$(4-3) \quad M = \frac{c^2}{2G} \lim_{r \rightarrow \infty} r(1 - e^{2\alpha}).$$

Nous allons retenir cette expression comme valeur de la masse, telle qu'elle serait mesurée en termes de mouvement d'une particule d'épreuve à l'infini et l'appliquer à notre étude.

Nous avons posé (3-1) :

$$\alpha = \zeta_1^e \alpha + \frac{1}{2} \zeta_2^e \alpha$$

il en résulte l'expression de M suivante :

$$(4-4) \quad M = -\frac{c^2}{G} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\zeta_1^e \alpha_1^e + \zeta_1^2 \left(\alpha_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2^e \right) \right].$$

Remplaçant α_1^e et α_2^e par leurs expressions (3-21) (3-28) et après passage à la limite, on obtient :

$$(4-5) \quad M = \frac{1}{G} \left(\zeta_1 P_1 + \frac{1}{2} \zeta_2^2 P_2 \right) \equiv \zeta_1 M_1 + \frac{1}{2} \zeta_2^2 M_2$$

P_1 (3-40) a déjà été calculé par raccordement des solutions intérieure et extérieure du premier ordre; P_2 sera obtenu à l'aide des solutions de second ordre.

4.1.2. RACCORDEMENT DES SOLUTIONS DE SECOND ORDRE

Les calculs explicites aboutissant à l'obtention de P_2 sont assez longs, mais sans aucune difficulté, aussi est-il suffisant d'en indiquer seulement quelques éléments.

L'exploitation des conditions de raccordement portant sur Φ_2 (3-36) permet d'obtenir la constante a_1^e , puis R_1 , modification du rayon :

$$(4-6) \quad R_1 = -A_1 \frac{k}{c^2} \left[\frac{\lambda \mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left(R_0 + \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2} \right) + 3 \int_0^R \frac{\sin^3 \lambda u du}{u} \right. \\ \left. + 2 \frac{\lambda \mu^2 (1 + \mu R) e^{\frac{2\mu R}{0}}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \int_0^R \frac{e^{-2\mu u}}{u} du \right].$$

L'étude du signe de cette expression, faite en appendice II B, montre qu'elle est négative quelles que soient les valeurs des constantes μ , g et k pourvu que $\frac{G}{k^2 g} < 1$. Il en résulte donc que le rayon de raccordement R_1 (3-34), des solutions post-newtoniennes, se trouve être inférieur à R_0 , rayon de raccordement des solutions newtoniennes.

La constante P_2 sera maintenant facilement tirée de :

$$(4-7) \quad \alpha_2'(R_1) - \alpha_2'(R_0) = 2[\alpha_1''(R_1) - \alpha_1''(R_0)]R_1$$

seconde relation de raccordement relative à $\alpha(r)$ (3-36). Les fonctions α , α^e et α sont explicitement connues par (3-20), (3-21), (3-25), (3-39), (3-40) et P_2 vaut :

$$(4-8) \quad P_2 = -2A_1^2 \frac{k^2}{c^2} \left\{ \left[\frac{\lambda^2 \mu}{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \mu \right] \frac{\lambda^2(1 + \mu R_0)}{\lambda^2 + \mu^2} - \frac{3}{2} \frac{\lambda^4 \mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \right. \\ \left. + 3 \frac{\lambda \mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \int_0^R \frac{\sin^3 \lambda u}{u} du + \frac{\lambda^2(1 + \mu R_0)}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left(3 \int_0^R \frac{\sin^2 \lambda u \cos \lambda u}{u} du \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\lambda^2 \mu^2 R_0 e^{2\mu R_0}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \int_0^R \frac{e^{-2\mu u}}{u} du \right) \right\}.$$

La comparaison des divers termes composant P (appendice II C) permet de conclure que cette constante est négative pour toutes les valeurs de μ , g , k satisfaisant à $\frac{G}{k^2 g} < 1$.

4.1.3. CONSTATATION D'UN MAXIMUM DE MASSE

L'examen de l'expression de M (4-5) montre l'existence d'un maximum pour la masse M . Ce maximum est caractérisé comme suit, en ce point :

$$(4-9) \quad \left(\frac{dM}{d\zeta} \right)_{\zeta_{\text{Max}}} \equiv \frac{1}{G_1} (P_1 + \zeta P_2) = 0$$

donc

$$(4-10) \quad \zeta = \zeta_{\text{Max}} \equiv -\frac{P_1}{P_2} \quad \text{et} \quad M_{\text{Max}} = -\frac{1}{2G} \frac{P_1^2}{P_2}.$$

A l'aide de P_1 (3-42) et P_2 (4-8), on trouve ζ_{Max} :

$$(4-11) \quad \zeta_{\text{Max}} = \left\{ \frac{2}{1 - \cos \lambda R_0} \left[\left(\frac{\lambda^2 \mu}{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \mu \right) \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \int_0^R \frac{\sin^2 \lambda u \cos \lambda u}{u} du + 2 \frac{\lambda^2 \mu^2 R_0 e^{2\mu R_0}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \int_0^R \frac{e^{-2\mu u}}{u} du \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \frac{\mu}{1 + \mu R_0} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^R \frac{\sin^3 \lambda u}{u} du - \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \right) \right] \right\}^{-1}$$

L'étude de la valeur numérique de cette expression est développée en appendice II C, on montre que :

$$\zeta_{\text{Max}} < 1.$$

Des raisonnements précédents, il y a lieu de retenir, d'une part, que la masse déduite de notre solution approchée des équations de la R. G., est inférieure à M_0 , obtenue dans un cadre newtonien, et d'autre part, que M présente un maximum de valeur pour une densité centrale $\rho(0)$ correspondant à ζ_{Max} (3-48).

4.2. Masse inerte.

4.2.1. ÉVALUATION DE LA CONTRIBUTION DU SECOND ORDRE

La contribution du contenu matériel à l'énergie totale peut être exprimée comme suit :

$$m = \int_v \rho d\tau$$

soit, en explicitant $d\tau$,

$$(4-12) \quad m = \int_v \rho \sqrt{g} dr d\theta d\varphi$$

cette intégrale est calculée en utilisant l'élément de volume relatif à la métrique d'espace $\widehat{ds}^2$; soit, d'après (2-27) :

$$\widehat{ds}^2 \equiv \xi^{-2} \bar{ds}^2 = \xi^{-2} (e^{2B} dr^2 + r^2 e^{2C} d\Sigma^2) \quad , \quad \xi^2 = e^{2\alpha}$$

d'où

$$\sqrt{g} = \xi^{-3} e^{B+2C} r^2 \sin \theta.$$

Substituant aux quantités ρ , α , B et C leurs développements limités et ne retenant finalement que les termes du second ordre au plus, (4-12) s'écrit, après intégration sur θ et φ :

$$(4-13) \quad m \equiv \zeta m_1 + \frac{1}{2} \zeta^2 m_2 = 4\pi \left[\int_0^R \zeta \rho r^2 dr + \frac{1}{2} \zeta^2 \int_0^R (\rho - 6\rho\alpha) r^2 dr + \zeta^2 \rho(R) R^2 R \right].$$

Cette expression se compose de trois termes; le premier du premier ordre vaut M_1 , le second doit être calculé effectivement, le troisième est connu, puisque R l'est par (4-6).

Le calcul effectif du second terme de (4-13) ne présentant aucune difficulté particulière, nous l'omettons ici, passant directement à l'expression du résultat que nous donnons sous la forme suivante :

$$(4-14) \quad \begin{aligned} M &= m \\ 1 & \quad 1 \\ M &= m_2 - \frac{2}{c^2 g} A_1^2 \left[\mu(1 + \mu R_0) + \frac{1}{2} \lambda^2 R_0 \right]. \end{aligned}$$

On constate ainsi que M se compose de deux termes : le premier m , la contribution du second ordre à l'énergie matérielle, et le second terme, négatif, représentant l'énergie des champs gravitationnel et scalaire.

4.2.2. COMPARAISON DE M AVEC m

Si nous faisons l'hypothèse que $\frac{G}{k^2 g}$ est *nettement* inférieur à l'unité (notons que $\frac{G}{k^2 g}$ doit déjà être plus petit que 1 (3-47)) alors, un procédé, sensiblement analogue à celui développé en appendice II C, permettrait de montrer que m est négatif. Il en résulte que m , de même que M , présente un maximum dont les coordonnées sont les suivantes

$$(4-15) \quad \zeta_{\max} = -\frac{m}{2}, \quad m_{\max} = -\frac{m^2}{2}.$$

Comme $m < 0$, la relation (4-14) entre M et m permet une comparaison des maxima de M et m ; on obtient :

— pour les valeurs du paramètre ζ correspondant à $m_{\max}$ et $M_{\max}$

$$(4-16) \quad (m) \quad \zeta_{\max} > \zeta_{\max} (M)$$

— pour les valeurs maxima de M et m

$$(4-17) \quad m_{\max} > M_{\max}.$$

Les variations comparées de M et m semblent donc montrer que l'énergie totale M croît dans une moindre proportion que celle de son contenu matériel m lorsque la densité centrale $\rho(0)$ augmente, ceci vaut tout au moins lorsque $\frac{G}{k^2 g} \ll 1$ et pour $\zeta \ll 1$.

4.3. Application.

En vue de compléter l'étude formelle précédente, nous allons préciser numériquement nos résultats permettant ainsi d'en apprécier plus correctement l'intérêt. Comme il s'agit seulement d'indiquer des ordres de grandeur, nous prenons les valeurs suivantes pour k^2g et μ :

$$(4-18) \quad \frac{G}{k^2g} = 10^{-42}, \quad \mu = 10^{13} \text{ cm}^{-1}.$$

On a par ailleurs :

$$G = 6,67 \cdot 10^8 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}.$$

La formule (3-46) donne :

$$(4-19) \quad \lambda^2 \simeq \frac{G}{k^2g} \mu^2 \quad \text{soit} \quad \lambda = 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$$

et (3-37)

$$(4-20) \quad \text{tg } \lambda R_0 \equiv -\frac{\lambda}{\mu} = -10^{-21}, \quad \lambda R_0 \simeq \pi$$

c'est-à-dire que R_0 est de l'ordre de 3 000 km, rappelons que $R_\odot$ vaut $6,953 \cdot 10^5 \text{ km}$.

L'expression du paramètre ζ se réduit à

$$(4-21) \quad \zeta \simeq \frac{8\pi G}{c^2 \mu^2 \frac{G}{k^2g}} \rho(0) = 1,86 \cdot 10^{-11} \rho(0).$$

Évaluons la valeur de ζ correspondant à la masse maximum, en raison du fait que $\frac{G}{k^2g} \ll 1$, l'expression (4-11) de ζ_{Max} peut être écrite comme suit :

$$(4-22) \quad \zeta_{\text{Max}} \simeq \left(1 + 3 \int_0^\pi \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du + \frac{3}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^3 u}{u} du \right)^{-1}.$$

L'usage de tables permet le calcul des intégrales définies et l'on obtient pour ζ_{Max} : $1/2,76$. Il en résulte, selon (4-21), la valeur suivante de la densité

centrale $\rho(0) : 2.10^{10} \text{ g cm}^{-3}$; calculons maintenant la valeur M_{Max} correspondant à cette densité centrale, de la formule (4-10), il ressort que :

$$(4-23) \quad M_{\text{Max}} = \frac{1}{2} M_1^{\zeta_{\text{Max}}}.$$

Soit, d'après l'expression de $P_1 \left(M = \frac{1}{G_1} P_1 \right)$ (3-42) et ζ (3-48) :

$$M_{\text{Max}} \simeq \frac{2\pi}{\lambda^2} R_0 \rho(0)$$

et avec les valeurs de R_0 et $\rho(0)$ déjà précisées, on obtient :

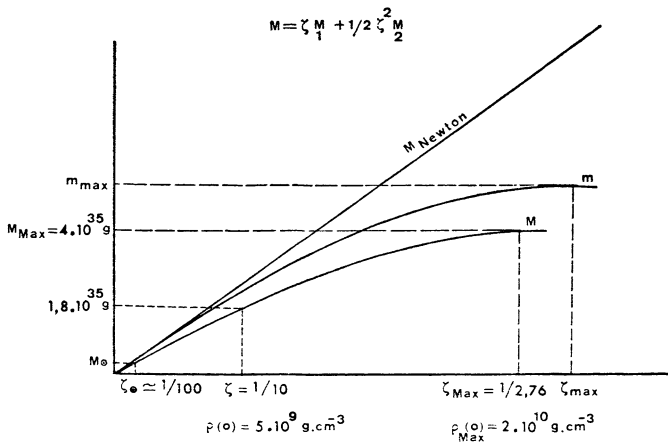
$$M_{\text{Max}} \simeq 4.10^{35} \text{ g} ;$$

si nous comparons ce chiffre à celui de la masse solaire

$$M_{\odot} = 1,982.10^{33}$$

nous voyons que notre modèle conduit à des ordres de grandeur d'une *centaine de masses solaires*.

Traçons maintenant le graphe de M en fonction de $\rho(0)$



Sur cette courbe, nous avons porté les points correspondant à M_{Max} , ζ_{Max}

$$(4-25) \quad M = 1,8.10^{35} \text{ g} \quad \zeta = \frac{1}{10} \quad \text{et enfin} \quad M = M_{\odot} \quad \zeta_{\odot} \simeq \frac{1}{100}.$$

A titre purement indicatif, nous avons ajouté le tracé de la courbe de

$$m = \zeta_1 m + \frac{1}{2} \zeta_2^2 m$$

ceci seulement afin de préciser graphiquement les situations respectives des points représentatifs de $M_{\max}$ et $m_{\max}$.

4.4. Validité des solutions approchées.

4.4.1. EXAMEN DES SOLUTIONS INTÉRIEURES ET EXTÉRIEURES

Tout au long des développements précédents, nous n'avons utilisé que des solutions approchées, il convient d'en apprécier la validité.

Nous le ferons dans le cas où, comme dans l'exemple du paragraphe 4.3 les constantes g et k sont telles que :

$$(4-25) \quad \frac{G}{k^2 g} \ll 1.$$

Ceci impliquant, selon (4-20) :

$$(4-26) \quad \frac{\lambda}{\mu} \ll 1 \quad , \quad \lambda R \simeq \pi_0.$$

Dans ces conditions, nous allons examiner les expressions de Φ , α , Φ^e et α^e , préciser les ordres de grandeur des deux termes les composant, puis B et C , qui ne comportent qu'un terme du second ordre. Considérant en premier lieu Φ :

$$(4-27) \quad \Phi(r) = \zeta_1 \Phi(r) + \frac{1}{2} \zeta_2^2 \Phi(r)$$

que l'on peut écrire encore :

$$(4-28) \quad \Phi(r) = \Phi(0) \left(\zeta_1 \frac{\Phi(r)}{\Phi(0)} + \frac{1}{2} \zeta_2^2 \frac{\Phi(r)}{\Phi(0)} \right).$$

On a ainsi formé deux quantités sans dimension $\frac{\Phi(r)}{\Phi(0)}$ et $\frac{\Phi(r)}{\Phi(0)}$; à l'aide des formules des alinéas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, nous obtenons d'abord :

$$(4-29) \quad \frac{\Phi(r)}{\Phi(0)} = \frac{\sin \lambda r}{\lambda r}$$

quantité qui décroît de 1 à $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}}$, r allant de 0 à R , puis :

$$(4-30) \quad \frac{\Phi(r)}{\Phi(0)} = - \frac{2}{1 - \cos \lambda R} \left[\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \frac{\sin \lambda r}{\lambda r} + \frac{\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left(\frac{\sin \lambda r}{\lambda r} - \cos \lambda r \right) - 3 \left(\frac{\cos \lambda r}{\lambda r} \int_0^{\lambda r} \frac{\sin^3 u du}{u} - \frac{\sin \lambda r}{\lambda r} \int_0^{\lambda r} \frac{\sin^2 u \cos u du}{u} \right) \right].$$

A l'aide des tables, nous pouvons préciser les valeurs suivantes :

$$(4-31) \quad \frac{\Phi(0)}{\Phi(0)} \simeq - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \quad \frac{\Phi(R/2)}{\Phi(0)} \simeq - 1,5$$

$$(4-32) \quad \frac{\Phi(R)}{\Phi(0)} \simeq - 1,91 \quad (\text{soit } -2)$$

soit finalement

$$\left| \frac{\Phi(r)}{\Phi(0)} \right| < 2 \quad r \text{ appartenant à l'intervalle } [0, R].$$

Indiquons maintenant les résultats relatifs aux fonctions α, Φ, α

$$|\alpha(r)| < 1, \quad \alpha(r) < 1,4$$

r étant compris entre 0 et R

$$\frac{\Phi(r)}{\Phi(0)} \leq \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}}, \quad \left| \frac{\Phi(r)}{\Phi(0)} \right| < 2$$

$$|\alpha(r)| < 0,5, \quad \alpha(r) < 1,4$$

avec $r \geq R$.

Enfin pour B et C nous avons :

$$|B(r)| < 1,6 \quad |C(r)| < 0,8$$

r allant de 0 à l'infini.

4.4.2. CONCLUSION

De cette brève analyse, il résulte que nos solutions approchées deviennent relativement peu satisfaisantes pour des valeurs du paramètre ζ de l'ordre $\zeta_{\text{Max}} = 1/2,76$, et ceci en raison de l'importance prise alors par les termes relatifs au second ordre (4-32). Le fait que nous ne puissions accepter, sans formuler des réserves quant à la validité des solutions obtenues, des valeurs de ζ de l'ordre de ζ_{Max} rend l'existence de la masse limite M_{Max} quelque peu incertaine.

Indiquons encore que les valeurs de ζ , très acceptables celles-là, de $1/5$ ou $1/10$ conduisent à des configurations de plusieurs dizaines de $M_{\odot}$.

5. PRESSION. ÉQUATION D'ÉTAT EFFECTIVE

5.1. Position et solution du problème.

Nous envisageons maintenant de répondre à la question suivante : quelle pression isotrope p conviendrait-il de substituer au champ scalaire Φ pour que l'équilibre subsiste, avec la distribution de matière fixée par la fonction densité $\rho(r)$?

Nous posons ce problème en termes purement newtoniens en partant de l'équation d'équilibre bien connue :

$$(5-1) \quad \frac{dp}{dr} = - \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$$

avec

$$(5-2) \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(u) u^2 du.$$

A la relation (5-1), on peut substituer la suivante, écrite à l'aide du potentiel newtonien V :

$$(5-3) \quad \frac{dp}{dr} = - \rho(r) \frac{dV}{dr}$$

et selon les formules (3-11), (3-19) et (3-48), nous avons :

$$(5-4) \quad \frac{dp}{dr} = \frac{4\pi G}{\lambda^2} \rho \frac{d\rho}{dr}.$$

Expression que l'on peut immédiatement intégrer en tenant compte du fait que

la pression doit s'annuler à la surface de la sphère de rayon R_0 , il vient ainsi :

$$(5-5) \quad p = \frac{2\pi G}{\lambda^2} [\rho^2(r) - \rho^2(R_0)].$$

5.2. Commentaires.

L'équation de compressibilité, ci-dessus obtenue, présente une forme particulière; en effet, le modèle de configuration statique à symétrie sphérique auquel elle conduirait, dépendrait de deux paramètres : la densité centrale $\rho(0)$, comme il est usuel, et la densité périphérique $\rho(R_0)$.

Notons enfin que l'équation (5-5) conduit à une expression de la vitesse du son v satisfaisante; en effet, nous avons :

$$(5-6) \quad v \equiv \left(\frac{dp}{d\rho} \right)^{1/2} = \left[\frac{4\pi G}{\lambda^2} \rho(r) \right]^{1/2}$$

quantité dont le maximum $\left(\frac{4\pi G}{\lambda^2} \rho_{\text{Max}}(0) \right)^{1/2}$ vaut, d'après les données numériques du paragraphe 4.3, $1,3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ soit une valeur inférieure à c donc bien admissible.

APPENDICE I

Le champ scalaire.

La théorie du champ scalaire utilisée dans cet article n'est pas celle qui est, apparemment, actuellement en vogue (O. Bergmann [A 1]). Cette dernière est basée sur un fait qui est tout à fait fortuit dans la théorie du champ vectoriel et elle n'est pas, à notre avis, une bonne théorie du champ scalaire. Nous rappelons brièvement ci-dessous de quel fait il s'agit et nous exposons les éléments de la théorie du champ scalaire que nous avons utilisée ⁽¹⁾.

Champ électromagnétique : principes variationnels.

Considérons une particule de charge e qui décrit une trajectoire spatio-temporelle d'équations $z^\alpha = z^\alpha(\lambda)$, λ/c étant le temps propre de la particule. Les équations du champ électromagnétique, dont la source est e , sont :

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= -4\pi e \int \dot{z}^\beta \delta(x - z(\lambda)) d\lambda, \quad \dot{z}^\beta \equiv \frac{dz^\beta}{d\lambda} \\ F_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha. \end{aligned}$$

Considérons maintenant une particule de charge e' qui est soumise à un champ électromagnétique φ_α . Si nous négligeons le champ propre de la charge e' , cette particule décrira une trajectoire $y^\alpha = y^\alpha(\mu)$, μ/c étant son temps propre, solution du système d'équations :

$$(2) \quad mc^2 \frac{du^\alpha}{d\mu} = e' F^\alpha_\beta u^\beta, \quad u^\alpha \equiv \frac{dy^\alpha}{d\mu}.$$

Les équations du champ (1) peuvent se déduire du Lagrangien :

$$(3) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{e}{c} \varphi_\alpha \int \dot{z}^\alpha \delta(x - z(\lambda)) d\lambda$$

en variant φ_α . Et les équations du mouvement (2) peuvent se déduire du Lagrangien :

$$(4) \quad L = -mc^2 (-c^{-2} \eta_{\alpha\beta} \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta)^{1/2} + \frac{e'}{c} \varphi_\alpha [y(\mu)] \dot{y}^\alpha$$

en variant y^α . Nous avons posé :

$$(5) \quad \eta_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = -c^2 dt^2 + \sum_i (dy^i)^2, \quad y^0 = ct.$$

⁽¹⁾ Pour ne pas compliquer inutilement les notations, nous supposerons le cadre de la Relativité Restreinte.

Apparemment, il existe un Lagrangien unique qui permet de déduire et les équations du champ (1) et les équations du mouvement (2). Ce Lagrangien serait :

$$(6) \quad \Lambda = -\frac{1}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{q}{c} \varphi_{\alpha} \int \dot{s}^{\alpha} \delta(x - s(\tau)) d\tau - mc^2 \int (-c^{-2} \eta_{\alpha\beta} \dot{s}^{\alpha} \dot{s}^{\beta})^{1/2} \delta(x - s(\tau)) d\tau.$$

Si ceci est vrai comme recette, ceci est complètement faux du point de vue conceptuel; car, pour obtenir (1) à partir de (6), nous devons poser $q = e$, $s^{\alpha} = z^{\alpha}$ et pour obtenir (2), nous devons poser $q = e'$, $s^{\alpha} = y^{\alpha}$. Dans ces conditions, on peut se demander si l'existence du Lagrangien (6) n'est pas un fait fortuit particulier à l'interaction vectorielle. Nous croyons que tel est le cas.

Champ scalaire : principes variationnels.

Considérons une particule de charge scalaire e qui décrit une trajectoire spatio-temporelle d'équations $z^{\alpha} = z^{\alpha}(\lambda)$.

L'équation du champ scalaire, dont la source est e , est :

$$(7) \quad \square \Phi = -4\pi g e \int \delta(x - z(\lambda)) d\lambda \quad (g : \text{const.}).$$

Cette équation peut être déduite du Lagrangien :

$$(8) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi c} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \Phi \partial_{\beta} \Phi + g \frac{e}{c} \Phi \int \delta(x - z(\lambda)) d\lambda.$$

Pour compléter la théorie, nous devons maintenant formuler les équations du mouvement d'une particule de charge scalaire e' soumise à un champ scalaire Φ . Nous présentons ci-dessous deux choix possibles :

a) La théorie qui est, apparemment, en vogue aujourd'hui consiste à dire : « Il doit exister un Lagrangien unique à partir duquel on puisse déduire et l'équation du champ (7) et les équations du mouvement. » Ce Lagrangien serait :

$$(9) \quad \Lambda = -\frac{1}{8\pi c} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \Phi \partial_{\beta} \Phi + \left(g \frac{q}{c} \Phi - mc^2 \right) \int (-c^{-2} \eta_{\alpha\beta} \dot{s}^{\alpha} \dot{s}^{\beta})^{1/2} \delta(x - s(\tau)) d\tau.$$

Si nous varions Φ et nous posons $q = e$, $s^{\alpha} = z^{\alpha}$ nous obtenons (7). Si nous varions s^{α} et nous posons $q = e$, $s^{\alpha} = y^{\alpha}$, nous obtenons :

$$(10) \quad \left(mc^2 - g \frac{e'}{c} \Phi \right) \frac{du^{\alpha}}{d\mu} = \frac{ge'}{c} (\eta^{\alpha\beta} + u^{\alpha} u^{\beta}) \partial_{\beta} \Phi, \quad u^{\alpha} = \frac{dy^{\alpha}}{d\mu}.$$

Nous voulons remarquer premièrement que pour obtenir ces équations du mouvement, il faut supposer que dans un Lagrangien, les grandeurs qui y figurent peuvent prendre différentes significations suivant les grandeurs qu'on varie, supposition qui pour nous est dépourvue de tout fondement. Et, deuxièmement que ces équations ne sont pas invariantes par la transformation de jauge $\Phi \rightarrow \Phi + \text{const.}$, alors que l'équation du champ (7) possède cette invariante de jauge. Ceci est à l'origine de difficultés qui ont été déjà remarquées par O. Bergmann.

b) La théorie du champ scalaire utilisée dans cet article est basée sur l'équation du champ (7) et les équations du mouvement :

$$(11) \quad mc^2 \frac{du^\alpha}{d\mu} = -e'(\eta^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta) \partial_\beta \Phi.$$

Ces équations sont invariantes par la transformation de jauge $\Phi \rightarrow \Phi + \text{const.}$ et peuvent être déduites du Lagrangien

$$(12) \quad L = -mc^2 e^{\frac{e'\Phi}{mc^2}} \left(-c^{-2} \eta_{\alpha\beta} \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta \right)^{1/2}.$$

Naturellement, dans ce cas, il n'existe pas de « Lagrangien unique » à partir duquel on puisse déduire et l'équation du champ (7) et les équations du mouvement (11). Mais nous avons déjà dit ce que nous pensions de la nécessité d'un tel Lagrangien.

On remarque que telle que la théorie a été formulée, le caractère attractif ou répulsif du champ scalaire de deux charges de même signe dépend du signe de g .

Dans un milieu continu chargé scalairement dont les lignes de courant sont solution des équations (11) le tenseur d'impulsion-énergie de la matière et du champ est

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \tau \left[\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi) \right] \quad (\tau : \text{const.}).$$

C'est l'analogue de ce tenseur dans le cas où le champ scalaire est à courte portée qui a été utilisé dans cet article.

APPENDICE II

A. Composantes du tenseur de courbure

Les quantités A, C, D, E sont les composantes du tenseur de courbure écrites par rapport au repère orthonormé déduit de (2-17); elles ont les valeurs suivantes :

$$A = -e^{-2\beta}(\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta')$$

$$C = -e^{-2\beta}\alpha'\left(\frac{1}{r} + \gamma'\right)$$

$$D = -e^{-2\beta}\left(\frac{1}{r} + \gamma'\right)^2 + \frac{1}{r^2}e^{-2\gamma}$$

$$E = -e^{-2\beta}\left[\gamma'' + \frac{2}{r}\gamma' + \gamma'^2 - \beta'\left(\frac{1}{r} + \gamma'\right)\right].$$

B. Étude du signe de R₁

Rappelons la valeur de R₁ (4-6)

(B₁)

$$R_1 = -A_1 \frac{k}{c^2} \left[\frac{\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left(R_0 + \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2} \right) + 3 \int_0^R \frac{\sin^3 \lambda u}{u} du + 2 \frac{\lambda\mu^2(1 + \mu R)_0 e^{2\mu R}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \int_0^R \frac{e^{-2\mu u}}{u} du \right]$$

En appliquant la majoration suivante :

$$(B_2) \quad \int_R^\infty \frac{e^{-2\mu u}}{u} du < \frac{1}{R} \int_R^\infty e^{-2\mu u} du \left(= \frac{1}{2\mu R} e^{-2\mu R} \right)$$

on peut écrire (B₁) comme suit :

$$(B_3) \quad R_1 < -A_1 \frac{k}{c^2} \left[\frac{\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left(R_0 + \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2} \right) + 3 \int_0^R \frac{\sin^3 \lambda u}{u} du - \frac{\lambda\mu(1 + \mu R)_0}{R(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \right]$$

soit finalement :

$$(B_4) \quad R_1 < -A_1 \frac{k}{c^2} \left[\frac{\mu}{\lambda R(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left(\lambda^2 R^2 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right) + 3 \int_0^R \frac{\sin^3 \lambda u}{u} du \right]$$

D'après les hypothèses faites, λR appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, de ce fait, on constate, par simple inspection, que la somme des trois termes inclus dans le crochet précédent (B_3) est positive, donc R est négatif.

C. Signe de P

Nous envisageons de montrer maintenant que P est négatif et que $\zeta_{\text{Max}} = -\frac{1}{P}$ est inférieur à un; comme P (3-42) est positif, il est équivalent de démontrer que ζ_{Max} satisfait la double inégalité :

$$0 < \zeta_{\text{Max}} < 1$$

La valeur de ζ_{Max} est (4-11)

$$(C_1) \quad \zeta_{\text{Max}} = \frac{1 - \cos \lambda R}{2} \left[\left(\frac{\lambda^2 \mu}{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \mu \right) \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + 3 \int_0^R \frac{\sin^2 \lambda u \cos \lambda u}{u} du \right. \\ \left. + 2 \frac{R \lambda^2 \mu^2 e^{-2\mu R}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \int_0^R \frac{e^{-2\mu u}}{u} du + \frac{3\mu}{1 + \mu R} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^R \frac{\sin^3 \lambda u}{u} du - \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \right) \right]^{-1}.$$

Notons Q l'expression entre les crochets; étudions son signe. Après usage de la majoration (B_2), la quantité Q est bornée comme suit :

$$(C_2) \quad Q > \left[\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} + \mu \right) \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} - \frac{3\mu}{2(1 + \mu R)} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} + \frac{3\mu}{\lambda(1 + \mu R)} \int_0^{\lambda R} \frac{\sin^3 u}{u} du \right. \\ \left. + 3 \int_0^{\lambda R} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du \right].$$

La somme des quatre premiers termes du second membre de (C_2) est positive; il est aisé de le constater; considérons la contribution du dernier terme :

$$(C_3) \quad \int_0^{\lambda R} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du > \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du$$

car on sait que

$$\lambda R \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Après avoir effectué le changement de variable d'intégration

$$u = \pi - x$$

(C_3) s'écrit

$$(C_4) \quad \int_0^{\lambda R} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du > \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x \cos x}{\pi - x} dx.$$

Il est clair que le second membre de (C₄) est positif, donc Q l'est aussi et ainsi on a la première conclusion :

$$(C_5) \quad \zeta_{\text{Max}} > 0 \quad (\leftrightarrow P_2 < 0).$$

Revenons à ζ_{Max} , compte tenu de l'application de (B₁), (C₂) devient :

$$(C_6) \quad \zeta_{\text{Max}}^{-1} > \frac{2}{1 - \cos \lambda R_0} \left[\left(\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \mu \right) \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + 3 \int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du \right. \\ \left. + \frac{3\mu}{1 + \mu R_0} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^3 u}{u} du - \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \right) \right].$$

Pour apprécier la valeur des deux intégrales définies incluses en (C₅), on est contraint de recourir à des tables; on constate, en usant de ce moyen, que :

$$\int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^3 u}{u} du > 0,6 \quad , \quad \lambda R_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Il en résulte que (C₆) peut être modifié comme suit :

$$(C_7) \quad \zeta_{\text{Max}}^{-1} > \frac{2}{1 - \cos \lambda R_0} \left[\left(\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \mu \right) \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + 3 \int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du \right] \\ > \frac{2}{1 - \cos \lambda R_0} \left(1 + 3 \int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^3 u \cos u}{u} du \right)$$

donc finalement

$$\zeta_{\text{Max}}^{-1} > 1.$$

Nous avons le résultat cherché : $\zeta_{\text{Max}} < 1$ et au total :

$$0 < \zeta_{\text{Max}} < 1$$

dans le cas

$$\frac{G}{k^2 g} \ll 1 \quad ; \quad \zeta_{\text{Max}} \simeq \frac{1}{3}.$$

RÉFÉRENCES

- [1] J. R. OPPENHEIMER et G. M. VOLKOFF, *Phys. Rev.*, t. **55**, 1939, p. 374.
- [2] J. A. WHEELER, B. K. HARRISON, K. S. THORNE et M. WAKANO, *Gravitation theory and gravitational collapse* (Ce livre comporte une importante bibliographie).
- [3] S. BONAZZOLA et F. PACINI, *Phys. Rev.*, t. **148**, 1966, p. 1269.
- [4] S. BONAZZOLA, Thèse, Paris, 1967.
- [5] Ya. B. ZEL'DOVICH, *J. E. T. P.*, t. **41**, novembre 1961, p. 1609-1615.

- [A 1] Otto BERGMANN, Scalar field as a theory of gravitation, *Am. Journ. of Physics*, vol. **24**, n° 1, 1956.
- [A 2] G. NORDSTROM, *Phys. Zeitschr.*, t. **13**, 1912, p. 1126.
- [A 3] G. NORDSTROM, *Ann. d. Phys.*, n° 856, 1913.

Manuscrit reçu le 3 janvier 1969.
