

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

C. MARLE

**Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique
des fluides relativistes dissipatifs. II. - Méthodes
de résolution approchée de l'équation de
Boltzmann relativiste**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, n° 2 (1969), p. 127-194

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_2_127_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Sur l'établissement
des équations de l'hydrodynamique
des fluides relativistes dissipatifs.
II. — Méthodes de résolution approchée
de l'équation de Boltzmann relativiste**

par

C. MARLE

Laboratoire de Physique Mathématique,
Collège de France.

RÉSUMÉ. — La description « microscopique » d'un gaz relativiste, par des fonctions de distribution obéissant à des équations de Boltzmann relativistes, a été exposée dans un précédent article. Nous examinons ici comment en déduire une description « macroscopique » moins détaillée, mais plus simple.

Un bref rappel bibliographique montre combien les descriptions proposées par différents auteurs, et les équations auxquelles elles conduisent, sont variées. Il est donc intéressant de chercher à déduire ces descriptions macroscopiques d'une description plus fine, au lieu de les postuler. Nous montrons que les principales descriptions macroscopiques utilisées précédemment peuvent être présentées d'une façon unique : les grandeurs physiques (telles que pression, température, flux de matière, de chaleur, tenseur de contraintes de viscosité) sont définies à partir des moments d'ordre un et deux de la fonction de distribution ; les descriptions proposées par divers auteurs diffèrent essentiellement à cause des définitions différentes adoptées pour ces grandeurs. Deux descriptions classiques

(celle de Eckart et celle de Landau et Lifchitz) sont indiquées ; une troisième, nouvelle, est proposée. Ces descriptions sont toutes également cohérentes, et le choix de l'une de préférence aux autres ne peut être guidé que par des considérations physiques ou des raisons de commodité.

Les deux méthodes classiques de résolution de l'équation de Boltzmann (celle de Chapman-Enskog et celle de Grad) sont ensuite adaptées au cas d'un gaz relativiste. La première, assez complexe dans le cas général, se simplifie considérablement lorsqu'on substitue à l'équation de Boltzmann relativiste, l'équation de Krook relativiste. Les calculs ont été effectués complètement dans ce cas, pour un gaz à un seul, puis à deux constituants. Le système des équations de l'hydrodynamique ainsi obtenu possède, comme en théorie non relativiste, des variétés caractéristiques du genre espace. Ce résultat peu satisfaisant d'un point de vue physique, est dû au degré d'approximation insuffisant de la résolution.

Pour adapter à la relativité la seconde méthode de résolution (celle de Grad) une nouvelle famille de tenseurs a dû être définie, généralisant les polynômes tensoriels de Hermite-Grad. Les calculs ont été faits complètement dans le cas d'un gaz à un seul constituant. Le système des équations de l'hydrodynamique obtenu précise les résultats donnés par la première méthode. L'étude du problème de Cauchy (malheureusement seulement dans un cas particulier, la complexité du système n'ayant pas permis le traitement du cas général) montre que les variétés caractéristiques sont de genre temps.

SUMMARY. — The « microscopic » description of a relativistic gas, by distribution functions, obeying Boltzmann relativistic equations, has been presented in a preceding paper. Here we examine the way to derive from it a less detailed but simpler « macroscopic » description.

A short bibliographical survey shows the variety of the descriptions proposed by different authors and the equations to which they are leading. It is therefore interesting to try to derive these macroscopic descriptions from a more acute description instead of postulating them. We show that the main macroscopic descriptions, preceedingly used, may be presented in a unified manner: The physical quantities (such as pressure, temperature, matter and heat fluxes, tensor of viscous stresses) are defined from moments of order one and two of the distribution function; the descriptions proposed by various authors essentially differ because of the different definitions adopted for these quantities. Two classical descriptions (Eckart's and Landau-Lifchitz's) are indicated; a new third one is proposed. All these descriptions are equally coherent, and the choice

leading us to prefer one to the others can only be guided by physical considerations or by convenience.

Both classical methods to resolve Boltzmann equation (Chapman-Enskog's and Grad's) are then adapted to the relativistic gas. The first one, rather complex in the general case, is considerably simplified when Krook's relativistic equation is substituted to Boltzmann's relativistic equation. The calculations have been thoroughly made in this case, for a gas with only one, then two components. The system of hydrodynamic equations so obtained, possesses like in non-relativistic theory, space-like characteristic manifolds. This result, unsatisfying from a physical point of view, is due to the insufficient degree of approximation of the resolution.

To adapt to relativity the second method of resolution (Grad's one) a new family of tensors had to be defined, generalizing Hermite-Grad's tensorial polynomials. The calculations have been made in the case of a gas with only one component. The system of hydrodynamic equations obtained precises the results given by the first method. Cauchy's problem study (unfortunately only in a particular case, the complexity of the system having not allowed the treatment of the general case) shows that the characteristic manifolds are time-like.

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION	130
1. Présentation de l'étude	130
2. Hydrodynamique relativiste : rappel bibliographique	132
2.1. Fluide parfait	132
2.2. Fluide non visqueux conducteur de la chaleur	133
2.3. Fluide visqueux non conducteur de la chaleur	134
2.4. Diffusion	135
2.5. Discussion	136
II. DESCRIPTION MACROSCOPIQUE D'UN GAZ RELATIVISTE	137
3. Description macroscopique d'un gaz relativiste à deux constituants	137
3.1. Description de Eckart	138
3.2. Description de Landau et Lifchitz	140
3.3. Nouvelle description proposée	141
3.4. Comparaison de ces descriptions	143
4. Description macroscopique d'un gaz relativiste avec collisions élastiques, fusion, fission	144

III. PREMIÈRE MÉTHODE DE RÉOLUTION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE	145
5. Principe de la méthode de Chapman-Enskog	145
5.1. Formation d'une suite d'équations récurrentes	146
5.2. Solution de l'équation d'ordre zéro	147
5.3. Conditions de solubilité de l'équation d'ordre n	148
5.4. Décomposition de $\mathcal{L}(\tilde{Y})_v$	151
6. Cas de l'équation de Krook d'un gaz à un constituant	154
7. Cas de l'équation de Krook d'un gaz à deux constituants	159
8. Étude du problème de Cauchy	162
IV. DEUXIÈME MÉTHODE DE RÉOLUTION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE	165
9. Principe de la méthode de Grad	165
10. Les polynômes de Hermite-Grad relativistes.	166
10.1. Rappel bibliographique	166
10.2. Nouvelle famille de polynômes tensoriels proposée	167
10.3. Expression des premiers polynômes tensoriels H.	174
10.4. Relations entre les tenseurs H et les tenseurs de Hermite-Grad non relativistes.	174
11. Application à la résolution de l'équation de Boltzmann relativiste.	175
11.1. Obtention d'une suite infinie d'équations	175
11.2. L'approximation d'ordre deux	178
11.3. Cas de l'équation de Krook.	182
12. Étude du problème de Cauchy pour un fluide dissipatif simplifié	185
12.1. Les équations	185
12.2. Problème des données initiales	187
12.3. Calcul des dérivées normales	188
12.4. Variétés caractéristiques	189
V. CONCLUSION	190
13. Résultats obtenus	190
14. Développements possibles	192
BIBLIOGRAPHIE	193

I. INTRODUCTION

1. Présentation de l'étude.

Nous nous proposons d'établir les équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs, à partir de l'équation de Boltzmann relativiste, dont les principales propriétés ont été décrites dans la première partie de cette étude (*). Dans la suite, nous emploierons les mêmes nota-

(*) Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs. Première partie : l'équation de Boltzmann relativiste. Cette même revue, n° 1, page 67.

tions que dans cette première partie, et les références à celle-ci seront désignées par [I].

Dans l'équation de Boltzmann relativiste, le gaz est décrit à une échelle « microscopique » par une fonction de distribution des impulsions des particules qui le constituent. Les équations de l'hydrodynamique, au contraire, utilisent une description « macroscopique » où n'interviennent plus que des fonctions du point de l'espace-temps considéré. Ces fonctions sont la vitesse du fluide, les variables thermodynamiques, le flux de chaleur, le tenseur des contraintes de viscosité, etc. Il faut tout d'abord définir ces grandeurs. Un bref rappel bibliographique, en fin d'introduction, montre que les auteurs qui ont examiné ce problème ont adopté diverses définitions, et ont ainsi été conduits à proposer plusieurs systèmes différents des équations de l'hydrodynamique. En rapprochant les grandeurs macroscopiques introduites des moments des premiers ordres de la fonction de distribution, nous pourrions présenter paragraphe II, de façon unifiée les descriptions proposées par différents auteurs, et comparer leurs mérites. Une description nouvelle sera proposée, qui, si elle est un peu moins naturelle que celle due à Eckart, se prête mieux à la méthode de résolution approchée de l'équation de Boltzmann développée paragraphe IV.

Les paragraphes III et IV sont consacrés à deux méthodes différentes d'établissement des équations de l'hydrodynamique par résolution approchée de l'équation de Boltzmann. Ce sont les adaptations à la relativité des méthodes classiques, respectivement de Chapman-Enskog, et de Grad. La première conduit à un système d'équations de l'hydrodynamique parabolique, si on se contente de l'approximation d'ordre 1. Ce résultat est peu satisfaisant du point de vue physique, et c'est ce qui nous a conduits à l'étude de l'autre méthode. Cette dernière avait déjà été adaptée à la relativité par Chernikov [3], qui d'ailleurs n'avait pas conservé tous les termes des équations auxquelles elle conduit, et aboutissait donc à un système parabolique. Nous avons adapté la méthode de Grad à la relativité d'une façon nouvelle, plus satisfaisante à notre avis, et nous avons complètement explicité les équations auxquelles elle conduit, à l'approximation d'ordre 2. Nous n'avons pu faire l'étude du problème de Cauchy pour le système des équations de l'hydrodynamique (assez compliqué) ainsi obtenu. Nous nous sommes donc contentés de l'étude du problème de Cauchy pour un système d'équations plus simple, assez analogue. L'étude montre que ce dernier système n'a pour variétés caractéristiques, que des hypersurfaces de genre temps, et que par conséquent les signaux se propagent, dans le fluide qu'il décrit, à vitesse inférieure à celle de la lumière.

2. Hydrodynamique relativiste : aperçu bibliographique

Nous rappellerons d'abord les équations de l'hydrodynamique des fluides parfaits, pour servir de référence. Puis, pour la clarté de la présentation, nous exposerons séparément les descriptions proposées pour les fluides non visqueux conducteurs de la chaleur, pour les fluides visqueux non conducteurs de la chaleur, et pour les fluides avec diffusion. La description d'un fluide où ces phénomènes ont lieu simultanément s'obtient par une combinaison évidente.

2.1. FLUIDE PARFAIT

Un fluide parfait relativiste est décrit par la donnée d'un champ de vecteurs P^α (vecteur flux de matière) et d'un champ de tenseurs $T^{\alpha\beta}$ (tenseur d'impulsion-énergie) de la forme :

$$(2.1) \quad P^\alpha = r U^\alpha$$

$$(2.2) \quad T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta}$$

r , ρ et p sont respectivement la masse volumique, l'énergie volumique et la pression. Ce sont des grandeurs positives. Le vecteur vitesse, U^α est unitaire et dirigé vers l'avenir :

$$(2.3) \quad U^\alpha U_\alpha = 1$$

L'idée de distinguer entre ρ et r (qui, comme nous le verrons plus loin, est proportionnel à un nombre de particules par unité de volume) est due à Eckart [7]. Elle a été exploitée notamment par Taub [31] à [34] et Lichnerowicz [20]. L'énergie interne spécifique ε est définie par :

$$(2.4) \quad \rho = r \left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2} \right)$$

Deux seulement des grandeurs d'état telles que ρ , r , p , ε , sont indépendantes et les autres sont définies à partir de celles-ci par les mêmes relations qu'en thermodynamique classique. L'entropie spécifique s et la température T , par exemple, sont définies par :

$$(2.5) \quad d\varepsilon = - p d\left(\frac{1}{r}\right) + T ds$$

Les équations qui régissent l'évolution du fluide sont :

$$(2.6) \quad \nabla_\alpha P^\alpha = 0$$

$$(2.7) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

Sur ces bases, plusieurs auteurs, notamment Lichnerowicz [19], [20], Mme Choquet-Bruhat [5], Taub [31] à [34], Synge [30], ont édifié une théorie extrêmement développée et cohérente.

2.2. FLUIDE NON VISQUEUX CONDUCTEUR DE LA CHALEUR

D'après Eckart [7] et Landau et Lifchitz [18], un fluide relativiste conducteur de la chaleur est toujours décrit par P^α et $T^{\alpha\beta}$, obéissant aux équations (2.6) et (2.7). Mais leur expression, plus compliquée, fait intervenir le vecteur flux de chaleur Q^α . Ces auteurs ont proposé deux formulations différentes.

Eckart conserve (2.1) et remplace (2.2) par :

$$(2.8) \quad T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^3} (Q^\alpha U^\beta + Q^\beta U^\alpha)$$

Landau et Lifchitz conservent (2.2) et remplacent (2.1) par :

$$(2.9) \quad P^\alpha = \rho U^\alpha - \frac{1}{c^3} Q^\alpha$$

Dans les deux formulations, Q^α est astreint à :

$$(2.10) \quad Q^\alpha U_\alpha = 0$$

Outre les équations (2.6) et (2.7), une nouvelle équation doit généraliser la loi de conduction de la chaleur de Fourier. Eckart utilise l'équation :

$$(2.11) \quad Q^\alpha = -\kappa T^2 (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \left[\hat{c}_\beta \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\delta \nabla_\delta U_\beta \right]$$

tandis que Landau et Lifchitz utilisent une équation de la forme :

$$(2.12) \quad Q^\alpha = -\kappa T^2 (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \hat{c}_\beta \frac{1 + \frac{g}{c^2}}{T}$$

g étant la fonction de Gibbs spécifique :

$$(2.13) \quad g = \varepsilon + \frac{p}{r} - Ts$$

Dans les deux formulations, la forme de ces équations est telle que la densité de source locale d'entropie s'exprime par une forme quadratique non négative (afin d'assurer la vérification du second principe de la thermodynamique).

Costa de Beauregard [6] a proposé, en relativité restreinte, une formulation très différente de celles qui précèdent. Pham Mau Quan [27] a ensuite proposé, en relativité générale, des équations semblables à celles de Costa de Beauregard : il n'utilise pas le vecteur P^α , ni l'équation (2.6) qu'il remplace par une « équation de conservation de la chaleur » de la forme :

$$(2.14) \quad \nabla_\lambda Q^\lambda = U^\lambda \left(\alpha \rho \hat{c}_\lambda T - \frac{\beta}{\rho} \hat{c}_\lambda \rho \right)$$

Cet auteur utilise toujours l'équation (2.7) avec la même expression que Eckart (2.8) de $T^{\alpha\beta}$, et emploie comme généralisation de la loi de Fourier l'équation :

$$(2.15) \quad Q^\alpha = \kappa (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \hat{c}_\beta T$$

Ce même auteur (Pham Mau Quan [28]) a ultérieurement présenté une formulation nouvelle, utilisant toujours (2.14), (2.15) et (2.7), mais avec une nouvelle expression, non symétrique, du tenseur $T^{\alpha\beta}$:

$$(2.16) \quad T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^3} Q^\alpha U^\beta$$

2.3. FLUIDE VISQUEUX NON CONDUCTEUR DE LA CHALEUR

Eckart [7], Lichnerowicz [19], Pichon [29], introduisent le tenseur des contraintes de viscosité $\theta^{\alpha\beta}$ dans $T^{\alpha\beta}$, en écrivant :

$$(2.17) \quad T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta} - \frac{\theta^{\alpha\beta}}{c^2}$$

$\theta^{\alpha\beta}$, symétrique, étant astreint à

$$(2.18) \quad \theta^{\alpha\beta} U_\alpha = 0.$$

Outre les équations (2.6) et (2.7), ((2.6) étant éventuellement remplacée par (2.14) dans le cas où le fluide est également conducteur de la chaleur, et où la formulation de Pham Mau Quan est adoptée), une équation expri-

mant $\theta^{\alpha\beta}$ au moyen des dérivées des autres variables est nécessaire. Eckart et Pichon l'écrivent :

$$(2.19) \quad \theta^{\alpha\beta} = -\lambda c(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \nabla_\gamma U^\gamma - \mu c(g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma) (g^{\beta\delta} - U^\beta U^\delta) (\nabla_\gamma U_\delta + \nabla_\delta U_\gamma)$$

tandis que Lichnerowicz l'écrit :

$$(2.20) \quad \theta_{\alpha\beta} = -\lambda c(\bar{g}_{\alpha\beta} - C_\alpha C_\beta) \bar{\nabla}_\gamma \bar{C}^\gamma - \mu c(\bar{g}_\alpha^\gamma - C_\alpha \bar{C}^\gamma) (\bar{g}_\beta^\delta - C_\beta \bar{C}^\delta) (\bar{\nabla}_\gamma \bar{C}_\delta + \bar{\nabla}_\delta \bar{C}_\gamma)$$

$\bar{g}_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique pour la métrique auxiliaire :

$$(2.21) \quad \bar{d}s^2 = \frac{1}{c^2} \left(c^2 + \varepsilon + \frac{p}{r} \right) ds^2$$

$\bar{\nabla}_\alpha$ désigne la dérivation covariante pour la connexion associée à cette métrique ; C_α est le vecteur :

$$(2.22) \quad C_\alpha = \frac{1}{c^2} \left(c^2 + \varepsilon + \frac{p}{r} \right) U_\alpha$$

et $\bar{C}^\alpha$ le vecteur contravariant qui lui est associé pour la métrique $\bar{d}s^2$.

2.4. DIFFUSION

Kluitenberg, de Groot et Mazur [10], [11], et Kluitenberg et de Groot [12], [13], [14] ont généralisé la formulation de Eckart présentée ci-dessus, à un gaz comportant plusieurs constituants avec diffusion (et éventuellement réaction chimique, polarisation électrique et magnétique). Nous présentons ici à titre d'exemple la formulation pour un fluide à deux constituants, indicés a et b , sans réaction chimique. Un tel fluide est décrit par deux champs de vecteurs P_a^α et P_b^β (flux de constituant a et b , respectivement) et un tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$. L'expression de ce dernier n'est pas modifiée ((2.2), (2.8) ou (2.17) suivant les cas), et vérifie toujours (2.7), tandis que P_a^α et P_b^β vérifient tous deux une équation de la forme (2.6). L'expression (2.1) de P^α , du fluide à un seul constituant, est remplacé par :

$$(2.21) \quad P_a^\alpha = r c_a U^\alpha + \frac{1}{c} J_a^\alpha$$

$$(2.22) \quad P_b^\alpha = r c_b U^\alpha + \frac{1}{c} J_b^\alpha$$

r est comme précédemment la masse volumique, U^α le vecteur vitesse, toujours astreint à satisfaire (2.3); les flux de diffusion J_a^α et J_b^α vérifient :

$$(2.23) \quad J_a^\alpha U_\alpha = 0$$

$$(2.24) \quad J_a^\alpha + J_b^\alpha = 0$$

et les concentrations c_a et c_b :

$$(2.25) \quad c_a + c_b = 1.$$

Une équation nouvelle généralisant la loi de diffusion de Fick est nécessaire. Les auteurs cités l'écrivent :

$$(2.26) \quad J_a^\alpha = D(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \partial_\beta \left(\frac{\mu_a - \mu_b}{T} \right)$$

μ_a et μ_b étant les potentiels thermodynamiques (définis comme en thermodynamique classique).

Si le fluide est simultanément sujet au transfert de chaleur et à la diffusion, des termes de couplage apparaissent dans les équations (2.11) et (2.26), comme en thermodynamique des phénomènes irréversibles classique.

2.5. DISCUSSION

Les différentes descriptions des fluides relativistes dissipatifs rappelées ci-dessus ont toutes le mérite de se réduire à la description classique, dans le cas limite non relativiste. Mais, comme en hydrodynamique non relativiste, l'étude du problème de Cauchy montre que les systèmes d'équations qu'elles emploient sont paraboliques, et rendent donc possible la propagation de signaux à vitesse infinie (Pichon [29]).

Pour supprimer cette possibilité, plusieurs auteurs, et notamment Cattaneo [1] et Vernotte [35] en physique non relativiste, Kranys [15] à [17] en physique relativiste, ont proposé de modifier la loi de conduction de la chaleur de Fourier, en y introduisant un terme de relaxation. Il est d'ailleurs intéressant de signaler que Maxwell lui-même [24] avait remarqué l'existence de ce terme, puis l'avait négligé en écrivant que « l'établissement du flux de chaleur se faisait rapidement ». Grad [9] a, par ailleurs, proposé une méthode de résolution de l'équation de Boltzmann non relativiste qui conduit, dans l'approximation dite « des 13 moments », à des équations contenant des termes de ce genre. Mais les équations ainsi établies sont bien plus compliquées que celles proposées par Vernotte et Cattaneo. Grad a longuement discuté le fait que ces équations font apparaître, à côté des ondes sonores habituelles, d'autres ondes se propageant à vitesse

finie. Nous pensons qu'un travail analogue est nécessaire en relativité, car l'introduction arbitraire d'un terme supplémentaire dans des équations, devant elles-mêmes être choisies parmi plusieurs formulations différentes, n'est pas une solution satisfaisante.

II. DESCRIPTION MACROSCOPIQUE D'UN GAZ RELATIVISTE

3. Description macroscopique d'un gaz relativiste à deux constituants

Nous allons traiter dans ce paragraphe le cas d'un gaz contenant deux espèces de particules, indicées a et b , n'ayant que des collisions élastiques. Le gaz de particules toutes identiques apparaît comme un cas particulier, et les idées développées ici s'étendent sans difficulté aux cas plus complexes : nous traiterons d'ailleurs, à titre d'exemple, le cas d'un gaz contenant trois espèces de particules susceptibles de fusion et de fission, dans le paragraphe suivant.

Comme en hydrodynamique classique, nous allons substituer à la description du gaz par les deux fonctions de distribution v_a et v_b une autre description, dite « macroscopique », moins précise mais plus simple construite à partir des moments des premiers ordres de ces fonctions de distribution. Les moments d'ordre 1 et 2 sont par définition :

$$(3.1) \quad N_i^\alpha = \int_{\Omega_{m_i \times}} v_i p^\alpha \omega_i$$

($i = a$ ou b)

$$(3.2) \quad T_i^{\alpha\beta} = \int_{\Omega_{m_i \times}} v_i p^\alpha p^\beta \omega_i$$

et ils obéissent aux équations (7.6) et (7.11), que nous rappelons :

$$(3.3) \quad \nabla_\alpha N_i^\alpha = 0$$

($i = a$ ou b)

$$(3.4) \quad \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \nabla_\beta \left(\sum_i T_i^{\alpha\beta} \right) = 0$$

La description la plus simple consiste à assimiler les fonctions de distri-

bution v_a et v_b à des fonctions de distribution de Maxwell, satisfaisant en tout point les conditions d'équilibre thermodynamique (c'est-à-dire correspondant toutes deux à la même température et à la même vitesse du gaz). Les moments d'ordre 1 et 2 ont la forme simple [I, formules (9.6) et (9.7)]. La donnée en tout point de 6 quantités (par exemple la température, les 2 pressions partielles et les 3 composantes indépendantes de la vitesse) suffit alors pour décrire l'état du gaz. Les équations (3.3) et (3.4) sont en même nombre que les fonctions inconnues. C'est le cas du fluide parfait : il a été traité notamment par Synge [30] ; pour un gaz à un seul constituant (c'est-à-dire si la pression partielle d'un des constituants est partout nulle) nous retrouvons la description indiquée au paragraphe 2.1, le vecteur appelé P^α dans ce paragraphe n'étant autre que mN^α .

Le degré d'approximation suivant consiste à retenir pour décrire l'état du gaz les deux moments d'ordre un (3.1) et la somme des deux moments d'ordre deux (3.2), sans nécessairement les supposer de la forme [I, formules (9.6) et (9.7)] ([21], dans le cas d'un gaz à un seul constituant). Nous disposons alors de 18 paramètres (14 dans le cas d'un gaz à un constituant). Il s'agit, afin de leur donner une signification physique, d'identifier 6 d'entre eux (5 dans le cas d'un gaz à un constituant) avec les grandeurs déjà introduites pour décrire un fluide parfait, et les 12 restant (9 pour un gaz à un constituant) aux composantes indépendantes, respectivement, du flux de chaleur (au nombre de 3), du tenseur des contraintes de viscosité (6) des flux de diffusion (3, ou 0 dans le cas d'un gaz à un seul constituant). Plusieurs auteurs, notamment Eckart [7] et Landau et Lifchitz [18], ont proposé différentes façons de faire cette identification (pour un gaz à un seul constituant, mais la généralisation est immédiate). Nous les exposons ci-dessous : on reconnaîtra facilement les descriptions sommairement décrites dans les paragraphes 2.2 à 2.4. Nous présentons ensuite une façon nouvelle de faire cette identification que nous avons dû développer car elle s'adapte mieux que celles déjà existantes à la méthode de résolution approchée de l'équation de Boltzmann utilisée dans le paragraphe IV.

3.1. DESCRIPTION DE ECKART

Cet auteur définit la masse volumique r , la vitesse U^α , les concentrations en masse c_a et c_b , les flux de diffusion en masse J_a^α et J_b^α , en posant :

$$(3.5) \quad rU^\alpha = m_a N_a^\alpha + m_b N_b^\alpha$$

$$(3.6) \quad rc_a = r(1 - c_b) = m_a N_a^\alpha U_\alpha$$

$$(3.7) \quad J_a^\alpha = -J_b^\alpha = c(m_a N_a^\alpha - rc_a U^\alpha)$$

Ces grandeurs vérifient :

$$(3.8) \quad U^\alpha U_\alpha = 1$$

$$(3.9) \quad c_a + c_b = 1$$

$$(3.10) \quad J_a^\alpha U_\alpha = 0$$

$$(3.11) \quad J_a^\alpha + J_b^\alpha = 0$$

Puis il définit l'énergie volumique ρ , le flux de chaleur Q^α et le tenseur des contraintes $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ en décomposant $T^{\alpha\beta}$ selon :

$$(3.12) \quad T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta - \frac{\mathcal{T}^{\alpha\beta}}{c^2} + \frac{1}{c^3} (Q^\alpha U^\beta + Q^\beta U^\alpha)$$

ces grandeurs devant vérifier les conditions, qui assurent l'unicité de la décomposition :

$$(3.13) \quad Q^\alpha U_\alpha = 0$$

$$(3.14) \quad \mathcal{T}^{\alpha\beta} U_\alpha = 0$$

Trois variables thermodynamiques indépendantes (r , ρ et c_a) ayant été définies, toutes les autres s'en déduisent car nous leur imposons de s'exprimer au moyen de celles-ci par les mêmes formules que dans un fluide en équilibre thermodynamique. Nous définissons ainsi notamment la pression p , ce qui nous permet de décomposer le tenseur des contraintes $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ selon :

$$(3.15) \quad \mathcal{T}^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha\beta} + p(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta)$$

$\theta^{\alpha\beta}$ est le tenseur des contraintes de viscosité. Il vérifie :

$$(3.16) \quad \theta^{\alpha\beta} U_\alpha = 0$$

Les 6 équations (3.3) et (3.4) peuvent être mises sous la forme :

Équation de continuité :

$$(3.17) \quad \nabla_\alpha (r U^\alpha) = 0$$

Équations de bilan des constituants a et b :

$$(3.18) \quad \nabla_\alpha (J_i^\alpha + c r c_i U^\alpha) = 0 \quad (i = a \text{ ou } b)$$

Système différentiel aux lignes de courant :

$$(3.19) \quad r f U^\beta \nabla_\beta U^\alpha - \frac{1}{c^2} [(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \hat{c}_\beta p + (g_\gamma^\alpha - U^\alpha U_\gamma) \nabla_\beta \theta^{\gamma\beta}] + \frac{1}{c^3} [Q^\beta \nabla_\beta U^\alpha + Q^\alpha \nabla_\beta U^\beta + (g_\gamma^\alpha - U^\alpha U_\gamma) U^\beta \nabla_\beta Q^\gamma] = 0$$

Équation de bilan d'entropie :

$$(3.20) \quad rcU^\alpha \hat{c}_\alpha s + \nabla_\alpha \left[\frac{Q^\alpha}{T} - \frac{c^2(\gamma_a J_a^\alpha + \gamma_b J_b^\alpha)}{T} \right] = \dots$$

$$= Q^\alpha \left[\hat{c}_\alpha \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\gamma \nabla_\gamma U^\alpha \right] - \frac{c}{T} \theta^{\alpha\beta} \nabla_\beta U_\alpha - c^2 J_a^\alpha \hat{c}_\alpha \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right)$$

Ce système se simplifie un peu dans le cas d'un gaz à un seul constituant : les deux équations (3.18) disparaissent (leur somme (3.17) subsiste), (3.19) est inchangée, les termes en J^α et en γ_a ou γ_b disparaissent dans (3.20).

3.2. DESCRIPTION DE LANDAU ET LIFCHITZ

Ces auteurs définissent la vitesse U^α et l'énergie volumique ρ , comme vecteur propre unitaire de genre temps et valeur propre correspondante de $T^{\alpha\beta}$. $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ désigne toujours le tenseur des contraintes :

$$(3.21) \quad T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta - \frac{\mathcal{T}^{\alpha\beta}}{c^2}$$

U^α et $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ vérifiant toujours (3.8) et (3.14).

Puis ils définissent le flux de chaleur Q^α , la masse volumique r , les concentrations en masse c_a et c_b , les flux de diffusion en masse J_a^α et J_b^α en posant :

$$(3.22) \quad m_a N_a^\alpha + m_b N_b^\alpha = r U^\alpha - \frac{1}{c^3} Q^\alpha$$

$$(3.23) \quad r c_a = r(1 - c_b) = m_a N_a^\alpha U_\alpha$$

$$(3.24) \quad J_i^\alpha = c(m_i N_i^\alpha - r c_i U^\alpha) \quad (i = a \text{ ou } b)$$

Ces grandeurs vérifient toujours (3.9), (3.10) et (3.13), mais plus (3.11), qui doit être remplacé par :

$$(3.25) \quad J_a^\alpha + J_b^\alpha = - \frac{1}{c^2} Q^\alpha$$

Ayant trois variables thermodynamiques indépendantes, on définit toutes les autres comme dans la description de Eckart. Ceci permet de définir le tenseur des contraintes de viscosité $\theta^{\alpha\beta}$ par (3.15). Il vérifie toujours (3.16).

Les 6 équations (3.3) et (3.4) peuvent être mises sous la forme :

Équation de continuité

$$(3.26) \quad \nabla_\alpha \left(r U^\alpha - \frac{1}{c^3} Q^\alpha \right) = 0$$

Équations de bilan des constituants a et b : identiques à (3.18).

Système différentiel aux lignes de courant :

$$(3.27) \quad r f U^\beta \nabla_\beta U^\alpha - \frac{1}{c^2} [(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \hat{c}_\beta p + (g^\alpha_\gamma - U^\alpha U_\gamma) \nabla_\beta \theta^{\gamma\beta}] = 0$$

Équation du bilan d'entropie :

$$(3.28) \quad \nabla_\alpha (r c s U^\alpha) - c^2 \nabla_\alpha \left[\frac{\gamma_a J_a^\alpha + \gamma_b J_b^\alpha}{T} \right] \\ = - c^2 \left[J_a^\alpha \nabla_\alpha \left(\frac{\gamma_a}{T} \right) + J_b^\alpha \nabla_\alpha \left(\frac{\gamma_b}{T} \right) \right] - \frac{c}{T} \theta^{\alpha\beta} \nabla_\beta U_\alpha$$

Ce système se simplifie dans le cas d'un gaz à un seul constituant (*a* par exemple) : les équations de bilan des constituants *a* et *b* disparaissent ; J_b^α disparaît dans l'expression (3.25), de sorte que J_a^α , proportionnel à Q^α , peut être remplacé par son expression en fonction de ce dernier dans l'équation du bilan d'entropie (3.28).

3.3. NOUVELLE DESCRIPTION PROPOSÉE

Nous serons amenés dans le paragraphe IV à faire jouer un rôle important aux moments d'ordre zéro des fonctions de distribution, dont la somme n'est autre que la trace du tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$. C'est pourquoi il sera alors pratique d'utiliser une nouvelle description, construite de façon telle que cette trace ait la même valeur que dans un gaz en équilibre thermodynamique.

Nous définissons r , U^α , J_a^α , J_b^α , c_a et c_b par les équations (3.5) à (3.7), comme dans la description de Eckart. Ces grandeurs vérifient toujours (3.8) à (3.11).

Puis nous décomposons $T^{\alpha\beta}$ selon :

$$(3.29) \quad T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) - \frac{\theta^{\alpha\beta}}{c^2} + \frac{1}{c^3} (Q^\alpha U^\beta + Q^\beta U^\alpha) \\ + \frac{\theta}{c^2} U^\alpha U^\beta$$

qui remplace (3.12). Le tenseur des contraintes de viscosité $\theta^{\alpha\beta}$, le flux de chaleur Q^α , vérifient toujours (3.13) et (3.16), et la pression p s'exprime toujours au moyen des fonctions thermodynamiques ρ , r et c_a grâce à la

même relation que dans un gaz en équilibre thermodynamique ; θ est la trace du tenseur $\theta^{\alpha\beta}$:

$$(3.30) \quad \theta = g_{\alpha\beta} \theta^{\alpha\beta}$$

Ces conditions assurent l'unicité de la décomposition (3.29). Remarquons que :

$$(3.31) \quad g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \rho - \frac{3p}{c^2}$$

comme dans un fluide parfait.

Nous poserons :

$$(3.32) \quad \theta^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta)$$

le tenseur $\tau^{\alpha\beta}$ vérifie donc :

$$(3.33) \quad \tau^{\alpha\beta} U_\alpha = 0$$

$$(3.34) \quad \tau^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 0$$

Les 6 équations (3.3) et (3.4) se mettent, dans cette description, sous la forme :

Équation de continuité : identique à (3.17).

Équations de bilan des constituants a et b : identiques à (3.18).

Système différentiel aux lignes de courant :

$$(3.35) \quad \left(rf + \frac{4\theta}{3c^2} \right) U^\beta \nabla_\beta U^\alpha - \frac{1}{c^2} \left[(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \hat{\partial}_\beta \left(p + \frac{\theta}{3} \right) + (g^\alpha_\gamma - U^\alpha U_\gamma) \nabla_\beta \tau^{\gamma\beta} \right] \\ + \frac{1}{c^3} [Q^\beta \nabla_\beta U^\alpha + Q^\alpha \nabla_\beta U^\beta + (g^\alpha_\gamma - U^\alpha U_\gamma) U^\beta \nabla_\beta Q^\gamma] = 0$$

Équation du bilan d'entropie :

$$(3.36) \quad rc U^\alpha \hat{\partial}_\alpha s + \nabla_\alpha \left[\frac{Q^\alpha}{T} - c^2 \frac{(\gamma_a J^\alpha_a + \gamma_b J^\alpha_b)}{T} + c \frac{\theta U^\alpha}{T} \right] = \dots \\ = Q^\alpha \left[\hat{\partial}_\alpha \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\gamma \nabla_\gamma U_\alpha \right] - \frac{c}{T} \tau^{\alpha\beta} \nabla_\beta U_\alpha - c^2 J^\alpha_a \hat{\partial}_\alpha \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right) \\ + c\theta \left[U^\beta \hat{\partial}_\beta \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{1}{3T} \nabla_\beta U^\beta \right]$$

Dans le cas d'un gaz à un seul constituant, les équations de bilan des constituants a et b disparaissent et les termes en J^α_a et J^α_b disparaissent de l'équation du bilan d'entropie.

3.4. COMPARAISON DE CES DESCRIPTIONS

Il est facile de voir que dans le cas limite non relativiste, les définitions des différentes grandeurs physiques coïncident, dans les trois descriptions, avec les définitions classiques, et les équations (de continuité, de bilan des constituants et d'entropie, aux lignes de courant) se réduisent aux équations classiques. Les trois descriptions sont donc également acceptables de ce point de vue. Elles sont parfaitement cohérentes du point de vue mathématique, et seules des considérations physiques (ou des considérations de commodité) peuvent conduire à préférer l'une aux deux autres.

On peut reprocher à la description de Landau et Lifchitz de faire jouer à Q^α un rôle trop semblable à celui d'un flux de diffusion. Cela apparaît beaucoup plus clairement dans le cas d'un gaz à deux constituants que dans le cas d'un gaz à un seul constituant, traité par ces auteurs : l'équation (3.25) montre en effet que Q^α est intimement lié à J_a^α et J_b^α , et que J_a^α est non nul même dans un gaz ne contenant que des particules d'espèce a (il est alors proportionnel à Q^α). La description de Eckart est plus naturelle de ce point de vue. La nouvelle description proposée, un peu moins naturelle, n'a été introduite que pour des raisons de commodité qui apparaîtront dans le paragraphe IV.

Dans le paragraphe III, nous utilisons une méthode de résolution approchée de l'équation de Boltzmann dans laquelle les grandeurs Q^α , $\theta^{\alpha\beta}$, J_a^α , J_b^α (qui sont nulles à l'équilibre thermodynamique) sont considérées comme des infiniment petits du 1^{er} ordre. Il est alors facile [22] de voir que les grandeurs définies dans les trois descriptions sont en correspondance selon :

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_L \simeq r_E = r_N \\ c_{aL} \simeq c_{aE} = c_{aN} \\ U_L^\alpha - \frac{Q_L^\alpha}{r_L c^3} \simeq U_E^\alpha = U_N^\alpha \\ J_{aL}^\alpha - \frac{c_{aL}}{c^2} Q_L^\alpha \simeq J_{aE}^\alpha = J_{aN}^\alpha \\ f_L Q_L^\alpha \simeq Q_E^\alpha = Q_N^\alpha \\ \rho_L \simeq \rho_E = \rho_N + \frac{\theta_N}{c^2} \\ \theta_L^{\alpha\beta} \simeq \theta_E^{\alpha\beta} \simeq \theta_N^{\alpha\beta} - (g^{\alpha\beta} - U_N^\alpha U_N^\beta) \left(\frac{\partial p_N}{\partial \rho_N} \right)_r \frac{\theta_N}{c^2} \end{array} \right.$$

Les indices L, E, N désignent les grandeurs définies, respectivement, dans la description de Landau et Lifchitz, dans celle de Eckart, et dans la

nouvelle description proposée. Le signe $\simeq$ désigne l'égalité à des infiniment petits d'ordre deux près. Ces règles de correspondance permettront d'exprimer facilement dans les deux autres descriptions les résultats établis, dans le paragraphe III, dans la description de Eckart.

4. Description macroscopique d'un gaz relativiste avec collisions inélastiques, fusion, fission

Afin de montrer qu'il est possible d'étendre le mode de définition des grandeurs physiques décrivant un gaz donné dans le paragraphe précédent à des cas plus généraux, nous allons traiter le cas d'un gaz comportant trois espèces de particules indicées a, b, c , dans lequel, outre les collisions élastiques, les réactions de fusion et fission suivantes sont possibles :

$$(4.1) \quad a \rightleftharpoons b + c$$

Le cas le plus général (avec n espèces de particules, collisions élastiques ou inélastiques, fusion, fission) ne présente pas de difficulté supplémentaire, autre que de nécessiter des notations lourdes. Nous utiliserons, par exemple, la description de Eckart.

Les moments d'ordre 1 (3.1) (avec cette fois, $i = a, b$ ou c au lieu de a et b seulement) et la somme des moments d'ordre 2 (3.2) représentent 22 variables indépendantes. $T^{\alpha\beta}$ vérifie toujours l'équation (3.4), mais les N_i^α ne vérifient plus (3.3) : d'après la remarque [I, paragraphe (5.1) (généralisant le théorème 4)] nous avons maintenant :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \nabla_\alpha(N_a^\alpha + N_b^\alpha) = 0 \\ \nabla_\alpha(N_a^\alpha + N_c^\alpha) = 0 \end{cases}$$

Nous écrirons ces équations en introduisant une nouvelle variable, j , représentant l'intensité de la transformation de particules a en particules b et c :

$$(4.3) \quad \nabla_\alpha N_i^\alpha = \frac{\varepsilon_i}{c} j \quad (\varepsilon_i = -1 \quad \text{si} \quad i = a; \quad \varepsilon_i = 1 \quad \text{si} \quad i = b \text{ ou } c).$$

Nous définissons $r, U^\alpha, c_a, c_b, c_c, J_a^\alpha, J_b^\alpha, J_c^\alpha, \rho, Q^\alpha, \tau^{\alpha\beta}, p, \theta^{\alpha\beta}$ exactement comme dans la description de Eckart.

Les 7 équations (3.4) et (4.3), peuvent, dans cette description, s'écrire sous la forme :

Équation de continuité :

$$(4.4) \quad \nabla_\alpha(rU^\alpha) = \frac{m_b + m_c - m_a}{c} j$$

Équations de bilan des constituants a, b, c :

$$(4.5) \quad \nabla_\alpha (J_i^\alpha + r c c_i U^\alpha) = m_i \varepsilon_{ij} \quad (\varepsilon_i = -1 \text{ si } i=a, +1 \text{ si } i=b \text{ ou } c).$$

Système différentiel aux lignes de courant : identique à (3.19).

Équation du bilan d'entropie :

$$(4.6) \quad \nabla_\alpha (r c s U^\alpha) + \nabla_\alpha \left(\frac{Q^\alpha}{T} - c^2 \frac{\sum_i \gamma_i J_i^\alpha}{T} \right) = \dots$$

$$= Q^\alpha \left[\hat{c}_\alpha \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\gamma \nabla_\gamma U^\alpha \right] - \frac{c}{T} \theta^{\alpha\beta} \nabla_\beta U_\alpha - c^2 \sum_i J_i^\alpha \hat{c}_\alpha \left(\frac{\gamma_i}{T} \right)$$

$$- \frac{c^2 j (m_b \gamma_b + m_c \gamma_c - m_a \gamma_a)}{T}$$

Remarquons la présence, dans l'équation du bilan d'entropie, du terme supplémentaire (par rapport à l'équation (3.20)) :

$$- \frac{c^2 j (m_b \gamma_b + m_c \gamma_c - m_a \gamma_a)}{T}$$

qui représente l'entropie créée par la transformation de particules a en particules b et c . Ce terme est nul lorsque la condition d'équilibre thermodynamique [I, formule (9.29)] est satisfaite.

III. PREMIÈRE MÉTHODE DE RÉOLUTION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE

5. Principe de la méthode de Champan-Enskog

La description macroscopique d'un gaz à deux constituants étudiée dans le paragraphe 3 fait intervenir 18 fonctions inconnues, alors que le système constitué par (3.3) et (3.4) ne comporte que 6 équations indépendantes. De même, la description macroscopique d'un gaz à un seul constituant fait intervenir 14 fonctions inconnues, et le système (3.3), (3.4) comporte alors 5 équations indépendantes. Les équations manquantes doivent être formées par résolution approchée des équations de Boltzmann.

La première méthode de résolution approchée de l'équation de Boltzmann non relativiste a été imaginée indépendamment par Chapman et

Enskog (Chapman et Cowling [2]). Nous allons montrer comment l'adapter au cas de l'équation de Boltzmann relativiste. Pour simplifier, nous traiterons le cas d'un gaz à un seul constituant, et nous emploierons la description macroscopique de Landau et Lifchitz (§ 3.2). C'est en effet avec cette description que l'adaptation relativiste de la méthode de Chapman-Enskog est la plus simple.

5.1. FORMATION D'UNE SUITE D'ÉQUATIONS RÉCURRENTES

L'équation de Boltzmann relativiste [I, formule (4.5)] s'écrit :

$$(5.1) \quad \mathcal{L}(X)v = I(v)$$

avec :

$$(5.2) \quad I(v) = \int [v(p)v(q) - v(p')v(q')]A(p, q, n)\omega_1 \wedge \varepsilon$$

Cherchons une solution de (5.1) pouvant s'exprimer sous la forme d'une série, et voyons s'il est possible de calculer successivement chacun des termes de cette série. Pour cela, posons :

$$(5.3) \quad v = v^{(0)} + v^{(1)} + \dots + v^{(n)} + \dots$$

$$(5.4) \quad I(v) = I^{(0)} + I^{(1)} + \dots + I^{(n)} + \dots$$

avec :

$$(5.5) \quad I^{(n)} = \sum_{m=0}^{m=n} \int [v^{(n-m)}(p)v^{(m)}(q) - v^{(n-m)}(p')v^{(m)}(q')]A(p, q, n)\omega_1 \wedge \varepsilon$$

$I^{(n)}$ ne dépend que de $v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$. Il s'agit maintenant d'exprimer sous forme d'une série le premier membre de (5.1), le terme d'ordre n ne dépendant que de $v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(n-1)}$. Pour cela, décomposons X suivant :

$$(5.6) \quad X = \tilde{Y} + \tilde{Z}$$

$$(5.7) \quad Y^\alpha = U^\alpha U_\xi p^\xi$$

$$(5.8) \quad Z^\alpha = (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) p^\xi$$

U^α est la vitesse macroscopique du fluide. $\tilde{Y}$ et $\tilde{Z}$ sont les champs de vecteurs de P_7 qui correspondent canoniquement aux fonctions vectorielles Y^α et Z^α , comme indiqué dans la première partie [I, § 3.3]. Posons :

$$(5.9) \quad \mathcal{L}(\tilde{Z})v = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(\tilde{Z})v^{(n)}$$

$$(5.10) \quad \mathcal{L}(\tilde{Y})v = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^n \Delta^{(m)} v^{(n-m)} \right\}$$

$\Delta^{(m)}$ étant un opérateur, agissant sur $v^{(n-m)}$, qui sera précisé plus loin (comme nous le verrons, ce n'est plus une dérivée de Lie).

Nous imposons aux termes de la série (5.3) de vérifier la suite d'équations :

$$(5.11) \quad I^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 0 \\ \mathcal{L}(\tilde{Z})v^{(n-1)} + \sum_{m=0}^{n-1} \Delta^{(m)} v^{(n-1-m)} & \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

La première de ces équations (équation d'ordre zéro) est une équation intégrale quadratique homogène, la fonction inconnue étant $v^{(0)}$. L'équation d'ordre n est une équation intégrale linéaire non homogène pour la fonction inconnue $v^{(n)}$, le terme non homogène dépendant des fonctions $v^{(p)}$ ($0 \leq p < n$) connues lorsqu'on a résolu les équations d'ordre inférieur à n . La suite d'équations (5.11) permet donc en principe de déterminer successivement les termes de la série (5.3) jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le désire, la somme de cette série vérifiant l'équation de Boltzmann (5.1). Cependant, pour $n \geq 1$ il existe des conditions de solubilité qui ne sont satisfaites que si la décomposition (5.10) de $\mathcal{L}(\tilde{Y})v$, et les solutions $v^{(p)}$ des équations précédentes d'ordre $p < n$, sont convenablement choisies.

5.2. SOLUTION DE L'ÉQUATION D'ORDRE ZÉRO

L'équation d'ordre zéro s'écrit :

$$(5.12) \quad \int [v^{(0)}(p)v^{(0)}(q) - v^{(0)}(p')v^{(0)}(q')] A(p, q, n) \omega_1 \wedge \varepsilon = 0$$

Les fonctions de distribution de Maxwell [I, formule (6.25)] :

$$(5.13) \quad v^{(0)} = \frac{r}{4\pi m^4 K_2(\xi)} \exp \left(-\frac{\xi}{m} U_x p^x \right)$$

sont évidemment solution de (5.12). D'autre part, si $v^{(0)}$ est une solution de (5.12), il est facile de voir que cette fonction vérifie aussi :

$$\int \text{Log} \frac{v^{(0)}(p)v^{(0)}(q)}{v^{(0)}(p')v^{(0)}(q')} [v^{(0)}(p)v^{(0)}(q) - v^{(0)}(p')v^{(0)}(q')] \cdot A(p, q, n) \omega \wedge \omega_1 \wedge \varepsilon = 0$$

et par suite, les théorèmes 7 et 8 de [I] montrent que les seules solutions continues par rapport à p de (5.12) sont de la forme (5.13). La solution $v^{(0)}$ dépend de 5 fonctions de x, r, ξ et U^x (3 composantes indépendantes), qui peuvent en principe être choisies arbitrairement. Choisissons pour r la masse volumique, pour ξ la quantité liée à la température T par la formule (9.2) de [I], et pour U^x la vitesse du gaz, dans la description de Landau et Lifchitz. Nous avons par conséquent :

$$(5.14) \quad \int_{\Omega_{mx}} (v^{(0)} - v) p^\alpha U_\alpha \omega = 0$$

$$(5.15) \quad \int_{\Omega_{mx}} (v^{(0)} - v) p^\alpha p^\beta U_\beta \omega = 0$$

5.3. CONDITIONS DE SOLUBILITÉ DE L'ÉQUATION D'ORDRE n

L'équation d'ordre n s'écrit :

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int [v^{(n)}(p)v^{(0)}(q) + v^{(n)}(q)v^{(0)}(p) - v^{(n)}(p')v^{(0)}(q') - v^{(n)}(q')v^{(0)}(p')] \cdot A(p, q, n)\omega_1 \wedge \varepsilon \\ \\ = - \sum_{m=1}^{n-1} \int [v^{(n-m)}(p)v^{(m)}(q) - v^{(n-m)}(p')v^{(m)}(q')] A(p, q, n)\omega_1 \wedge \varepsilon \\ \\ + \mathcal{L}(\tilde{Z})v^{(n-1)} + \sum_{m=0}^{n-1} \Delta^{(m)}v^{(n-1-m)} \end{array} \right.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par 1 ou par p^α , et intégrons sur Ω_{mx} . Après cette opération le premier membre et chacun des termes sous le premier signe Σ au second membre donnent un résultat identiquement nul : cette propriété se démontre comme les théorèmes 4 et 5 de [I]. Par conséquent, les égalités :

$$(5.17) \quad \int_{\Omega_{mx}} \mathcal{L}(\tilde{Z})v^{(n-1)}\omega + \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Omega_{mx}} \Delta^{(m)}v^{(n-1-m)}\omega = 0$$

$$(5.18) \quad \int_{\Omega_{mx}} p^\alpha \mathcal{L}(\tilde{Z})v^{(n-1)}\omega + \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Omega_{mx}} p^\alpha \Delta^{(m)}v^{(n-1-m)}\omega = 0$$

sont des conditions nécessaires de solubilité de l'équation d'ordre n .

Posons :

$$(5.19) \quad v^{(n)}(p) = v^{(0)}(p)\varphi(p)$$

L'équation homogène associée à (5.16) est :

$$(5.20) \quad \int v^{(0)}(p)v^{(0)}(q)[\varphi(p) + \varphi(q) - \varphi(p') - \varphi(q')]A(p, q, n)\omega_1 \wedge \varepsilon = 0$$

$\varphi(p)$ étant la fonction inconnue. Les seules solutions continues linéairement indépendantes de (5.20) sont 1 et p^a (cela s'établit grâce à un raisonnement identique à celui présenté ci-dessus pour montrer que les seules solutions continues de (5.12) sont de la forme (5.13)). Comme dans le cas de l'équation de Boltzmann non relativiste (Chapman et Cowling [2], l'équation (5.20) peut se mettre sous la forme :

$$(5.21) \quad F(p)\varphi(p) + \int_{\Omega_{mx}} K(p, q)\varphi(q)\omega_1 = 0$$

le noyau $K(p, q)$ étant symétrique. Il est alors facile de voir que (5.17) et (5.18) sont les conditions nécessaires et suffisantes de solubilité de l'équation (5.16) données par le théorème classique de Fredholm. Nous supposons dans la suite $A(p, q, n)$ tel que l'opérateur intégral intervenant dans (5.21) soit borné, afin de satisfaire les hypothèses du théorème de Fredholm. Nous serons alors assurés de l'existence de solutions de (5.16) si les conditions (5.17) et (5.18) sont satisfaites.

Il reste à montrer que (5.20) peut être mis sous la forme (5.21). Nous devons pour cela supposer $A(p, q, n)$ tel que les intégrales représentant la contribution de $v(p)$, $v(q)$, $v(p')$ et $v(q')$ dans l'intégrale du membre de gauche de (5.20) soient séparément convergentes. La première intégrale :

$$\varphi(p)v^{(0)}(p) \int v^{(0)}(q)A(p, q, n)\omega_1 \wedge \varepsilon$$

est visiblement de la forme :

$$F(p)\varphi(p).$$

La seconde intégrale :

$$\int v^{(0)}(p)v^{(0)}(q)A(p, q, n)\varphi(q)\omega_1 \wedge \varepsilon$$

est, après intégration par rapport à n , de la forme :

$$\int_{\Omega_{mx}} K_1(p, q)\varphi(q)\omega_1$$

le noyau $K_1(p, q)$ étant, comme $A(p, q, n)$, une fonction symétrique de p et q .

Dans la troisième intégrale :

$$(5.22) \quad - \int v^{(0)}(p)v^{(0)}(q)A(p, q, n)\varphi(p')\omega_1 \wedge \varepsilon$$

prenons comme nouvelles variables d'intégration p' et t , t étant un vecteur unitaire de genre temps dirigé vers l'avenir, normal à $(p' - p)$:

$$(5.23) \quad (p'^\alpha - p^\alpha)t_\alpha = 0$$

$$(5.24) \quad t^\alpha t_\alpha = 1.$$

q et q' s'expriment au moyen de p , p' et t par :

$$(5.25) \quad \begin{aligned} q^\alpha &= 2(p^\lambda t_\lambda)t^\alpha - p^\alpha \\ q'^\alpha &= 2(p'^\lambda t_\lambda)t^\alpha - p'^\alpha \end{aligned}$$

De même, n^α s'exprime au moyen de p , p' et t par :

$$(5.26) \quad n^\alpha = \frac{p'^\alpha - p^\alpha}{[-(p'^\lambda - p^\lambda)(p'_\lambda - p_\lambda)]^{1/2}}$$

Faisons le changement de variables $(p, q, n) \rightarrow (p, p', t)$ dans la forme :

$$A(p, q, n)\omega \wedge \omega_1 \wedge \varepsilon.$$

Nous obtenons la forme :

$$G(p, p', t)\omega \wedge \omega' \wedge \theta$$

θ étant l'élément de volume de la pseudo-sphère à 2 dimensions parcourue par t lorsque p et p' sont fixés. p et p' jouant un rôle symétrique, $G(p, p', t)$ est nécessairement une fonction symétrique de p et p' . Par conséquent, en faisant le changement de variables $(q, n) \rightarrow (p', t)$ dans l'intégrale (5.22) nous obtenons :

$$- \int v^{(0)}(p)v^{(0)}(q)G(p, p', t)\varphi(p')\omega' \wedge \theta$$

Mais en remplaçant q par son expression (5.25) dans $v^{(0)}(q)$, dont l'expression est (5.13), nous obtenons :

$$v^{(0)}(p)v^{(0)}(q) = \left[\frac{r\xi}{4\pi m^4 K_2(\xi)} \right]^2 \exp \left[-\frac{\xi}{m} U_x(p^\lambda + p'^\lambda)t_\lambda t^\alpha \right]$$

fonction symétrique de p et p' . L'intégrale (5.22) peut donc, après intégration par rapport à t , s'écrire :

$$- \int_{\Omega_{mx}} K_2(p, p') \varphi(p') \omega'$$

$K_2(p, p')$ étant une fonction symétrique de p et p' .

La dernière intégrale constituant (5.20) se transforme de la même manière. Nous voyons donc que (5.20) peut effectivement s'écrire sous la forme (5.21).

En ajoutant à une solution particulière de (5.16) une solution bien choisie de (5.20), nous pouvons imposer à la solution finalement retenue $v^{(n)}$ de vérifier :

$$(5.27) \quad \int_{\Omega_{mx}} v^{(n)} p^\alpha U_\alpha \omega = 0$$

$$(5.28) \quad \int_{\Omega_{mx}} v^{(n)} p^\alpha p^\beta U_\beta \omega = 0$$

Les égalités (5.14) et (5.15) sont alors automatiquement satisfaites. La solution $v^{(n)}$ de (5.16) vérifiant les conditions (5.27) et (5.28) existe et est unique.

5.4. DÉCOMPOSITION DE $\mathcal{L}(\tilde{Y})v$

Les équations (3.3) et (3.4) peuvent s'écrire sous la forme :

$$(5.29) \quad U^\alpha \nabla_\alpha (N^\xi U_\xi) - U^\alpha N_\xi \nabla_\alpha U^\xi + (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha N^\xi = 0$$

$$(5.30) \quad U^\alpha \nabla_\alpha (T^{\beta\xi} U_\xi) - U^\alpha T_\xi^\beta \nabla_\alpha U^\xi + (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha T^{\beta\xi} = 0$$

Mais, puisque nous avons choisi la description de Landau et Lifchitz :

$$(5.31) \quad N^\xi U_\xi = \frac{r}{m}$$

$$(5.32) \quad T^{\beta\xi} U_\xi = \rho U^\beta$$

et les équations (5.29) et (5.30) s'écrivent :

$$(5.33) \quad \frac{1}{m} U^\alpha \nabla_\alpha r - U^\alpha N_\xi \nabla_\alpha U^\xi + (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha N^\xi = 0$$

$$(5.34) \quad U^\alpha \nabla_\alpha (\rho U^\beta) - T_\xi^\beta U^\alpha \nabla_\alpha U^\xi + (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha T^{\beta\xi} = 0$$

Posons :

$$(5.35) \quad N^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} N^{(n)\alpha}$$

$$(5.36) \quad T^{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)\alpha\beta}$$

avec :

$$(5.37) \quad N^{(n)\alpha} = \int_{\Omega_{mx}} v^{(n)} p^\alpha \omega$$

$$(5.38) \quad T^{(n)\alpha\beta} = \int_{\Omega_{mx}} v^{(n)} p^\alpha p^\beta \omega$$

Nous allons décomposer les dérivées suivant les lignes de courant de r , U^α et ρ en posant :

$$(5.39) \quad \begin{aligned} U^\alpha \nabla_\alpha r &= d^{(0)}r + d^{(1)}r + \dots + d^{(n)}r + \dots \\ U^\alpha \nabla_\alpha U^\beta &= d^{(0)}U^\beta + d^{(1)}U^\beta + \dots + d^{(n)}U^\beta + \dots \\ U^\alpha \nabla_\alpha \rho &= d^{(0)}\rho + d^{(1)}\rho + \dots + d^{(n)}\rho + \dots \end{aligned}$$

et en imposant aux opérateurs $d^{(n)}$ de satisfaire, pour $n = 0$:

$$(5.40) \quad \begin{cases} \frac{1}{m} d^{(0)}r - N_\xi^{(0)} d^{(0)}U^\xi + (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha N^{(0)\xi} = 0 \\ d^{(0)}(\rho U^\beta) - T^{(0)\beta}_\xi d^{(0)}U^\xi + (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha T^{(0)\beta\xi} = 0 \end{cases}$$

et pour $n \geq 1$:

$$(5.41) \quad \begin{cases} \frac{1}{m} d^{(n)}r - \sum_{m=0}^n N^{(m)} d^{(n-m)}U^\xi + (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha N^{(n)\xi} = 0 \\ d^{(n)}(\rho U^\beta) - \sum_{m=0}^n T^{(m)\beta}_\xi d^{(n-m)}U^\xi + (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha T^{(n)\beta\xi} = 0 \end{cases}$$

Le système (5.40) définit $d^{(0)}r$, $d^{(0)}\rho$, $d^{(0)}U^\alpha$. De même, le système (5.41) définit $d^{(n)}r$, $d^{(n)}\rho$, $d^{(n)}U^\alpha$, une fois $d^{(p)}r$, $d^{(p)}\rho$, $d^{(p)}U^\alpha$ définis pour $p < n$. Les équations (5.33) et (5.34) sont visiblement automatiquement vérifiées si les systèmes (5.40) et (5.41) le sont, de sorte que les $d^{(n)}r$, $d^{(n)}\rho$ et $d^{(n)}U^\alpha$ définis comme nous venons de le faire satisfont bien (5.39).

Pour définir la décomposition (5.10) de $\mathcal{L}(\tilde{Y})_v$, nous devons faire l'hypothèse suivante : $\mathcal{L}(\tilde{Y})_v^{(n)}$ s'exprime par une combinaison linéaire de $U^\alpha \nabla_\alpha r$, $U^\alpha \nabla_\alpha U^\beta$ et $U^\alpha \nabla_\alpha \rho$. Cette hypothèse est l'homologue de celle, relative à la méthode de Chapman-Enskog appliquée à l'équation de Boltzmann non

relativiste, selon laquelle les dérivées par rapport au temps de $v^{(n)}$ sont des combinaisons linéaires des dérivées par rapport au temps de la masse volumique, de la température et de la vitesse, car $v^{(n)}$ ne dépend du temps qu'à travers sa dépendance de ces variables. C'est pourquoi la méthode de Chapman-Enskog ne permet de déterminer que des solutions particulières de l'équation de Boltzmann, dites « solutions normales » : la donnée sur une hypersurface de r , ρ et U^α suffit pour définir complètement la solution normale, et il n'est plus possible de retenir comme données de Cauchy sur cette hypersurface la valeur de la fonction v elle-même.

Avec cette hypothèse, nous définissons $\Delta^{(m)}v^{(n-m)}$ de la façon suivante : $\Delta^{(m)}v^{(n-m)}$ s'obtient en remplaçant dans l'expression de $\mathcal{L}(\tilde{Y})v^{(n-m)}$, $U^\alpha \nabla_\alpha r$, $U^\alpha \nabla_\alpha \rho$ et $U^\alpha \nabla_\alpha U^\beta$ respectivement par $d^{(m)}r$, $d^{(m)}\rho$ et $d^{(m)}U^\beta$ précédemment définis.

Il est alors facile de voir que les conditions (5.17) et (5.18) sont automatiquement vérifiées. En effet, d'après la première partie ([I], formule (3.22)) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{mx}} \mathcal{L}(\tilde{Z})v^{(n-1)}\omega &= (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha N^{(n-1)\xi} \\ \int_{\Omega_{mx}} p^\alpha \mathcal{L}(\tilde{Z})v^{(n-1)}\omega &= (g_\xi^\alpha - U^\alpha U_\xi) \nabla_\alpha T^{(n-1)\beta\xi} \\ \int_{\Omega_{mx}} \mathcal{L}(\tilde{Y})v^{(n-1-m)}\omega &= U^\alpha U_\xi \nabla_\alpha N^{(n-1-m)\xi} = \begin{cases} \frac{1}{m} U^\alpha \nabla_\alpha r - N_\xi^{(0)} U^\alpha \nabla_\alpha U^\xi & \text{si } n-1-m=0 \\ -N_\xi^{(n-1-m)} U^\alpha \nabla_\alpha U^\xi & \text{si } n-1-m \neq 0 \end{cases} \\ \int_{\Omega_{mx}} p^\beta \mathcal{L}(\tilde{Y})v^{(n-1-m)}\omega &= U^\alpha U_\xi \nabla_\alpha T^{(n-1-m)\beta\xi} = \begin{cases} U^\alpha \nabla_\alpha (\rho U^\beta) - T^{(0)\beta}_\xi U^\alpha \nabla_\alpha U^\xi & \text{si } n-1-m=0 \\ -T^{(n-1-m)\beta}_\xi U^\alpha \nabla_\alpha U^\xi & \text{si } n-1-m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et en substituant $d^{(m)}r$, $d^{(m)}\rho$ et $d^{(m)}U^\beta$ à $U^\alpha \nabla_\alpha r$, $U^\alpha \nabla_\alpha \rho$ et $U^\alpha \nabla_\alpha U^\beta$ dans ces deux dernières égalités :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{mx}} \Delta^{(m)}v^{(n-1-m)}\omega &= \begin{cases} \frac{1}{m} d^{(m)}r - N_\xi^{(0)} d^{(m)}U^\xi & \text{si } n-1-m=0 \\ -N_\xi^{(n-1-m)} d^{(m)}U^\xi & \text{si } n-1-m \neq 0 \end{cases} \\ \int_{\Omega_{mx}} p^\beta \Delta^{(m)}v^{(n-1-m)}\omega &= \begin{cases} d^{(m)}(\rho U^\beta) - T^{(0)\beta}_\xi d^{(m)}U^\xi & \text{si } n-1-m=0 \\ -T^{(n-1-m)\beta}_\xi d^{(m)}U^\xi & \text{si } n-1-m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons donc que (5.17) et (5.18) sont des conséquences de (5.41).

6. Cas de l'équation de Krook d'un gaz à un constituant

La méthode de Chapman-Enskog se simplifie considérablement si on utilise pour décrire le gaz, au lieu de l'équation de Boltzmann, l'équation de Krook [I, formule (11.3)] :

$$(6.1) \quad \mathcal{L}(X)v \equiv p^\alpha \frac{\hat{c}v}{\hat{c}x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\hat{c}v}{\hat{c}p^\alpha} = \frac{m}{c\tau} (v_M - v)$$

(nous désignons par τ , pour alléger les notations, le paramètre précédemment appelé τ_M).

Cette équation permet en effet immédiatement d'exprimer v par un développement en série : il suffit de la résoudre par rapport au v qui figure au membre de droite, et d'itérer autant de fois qu'on le désire en portant cette expression de v dans l'autre membre :

$$(6.2) \quad v = v_M + \sum_{r=1}^{n-1} \left[-\frac{c\tau}{m} \mathcal{L}(X) \right]^r v_M + \left[-\frac{c\tau}{m} \mathcal{L}(X) \right]^n v$$

le dernier terme représentant le reste de la série, lorsqu'on limite l'approximation aux n premiers termes. Nous nous contentons dans la suite des deux premiers termes :

$$(6.3) \quad v = v_M - \frac{c\tau}{m} \mathcal{L}(X)v_M + 0(\tau^2)$$

($0(\tau^2)$ désigne un terme d'ordre au moins égal à 2 en τ).

Nous supposons dans ce qui suit τ indépendant de p^α , et fonction seulement de la valeur au point x considéré des paramètres r_M et ξ_M dont dépend v_M . Ces hypothèses ne sont pas essentielles, mais permettent d'évaluer simplement les intégrales qui apparaissent dans la suite des calculs.

Calculons N^α et $T^{\alpha\beta}$. D'après [I, formule (11.5)] :

$$(6.4) \quad \begin{aligned} N^\alpha &= \int_{\Omega_{mx}} v p^\alpha \omega = \int_{\Omega_{mx}} v_M p^\alpha \omega \\ T^{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_{mx}} v p^\alpha p^\beta \omega = T_M^{\alpha\beta} - \frac{c\tau}{m} \int_{\Omega_{mx}} (\mathcal{L}(X)v_M) p^\alpha p^\beta \omega + 0^{\alpha\beta}(\tau^2) \end{aligned}$$

ou, d'après [I, corollaire du théorème 2, formule (3.25)] :

$$(6.5) \quad T^{\alpha\beta} = T_M^{\alpha\beta} - \frac{c\tau}{m} \nabla_\gamma M^{\alpha\beta\gamma} + 0^{\alpha\beta}(\tau^2)$$

Nous avons posé :

$$(6.6) \quad T_M^{\alpha\beta} = \int_{\Omega_{mx}} v_M p^\alpha p^\beta \omega$$

$$(6.7) \quad M^{\alpha\beta\gamma} = \int_{\Omega_{mx}} v_M p^\alpha p^\beta p^\gamma \omega$$

Ces quantités, qui sont les moments d'ordre 2 et 3 d'une fonction de distribution de Maxwell, ont précédemment été évaluées [I, formules (9.5) et (9.7)] :

$$(6.8) \quad T_M^{\alpha\beta} = r_M \left[\frac{K_3(\xi_M)}{K_2(\xi_M)} U_M^\alpha U_M^\beta - \frac{1}{\xi_M} g^{\alpha\beta} \right]$$

$$(6.9) \quad M^{\alpha\beta\gamma} = m r_M \left[\frac{K_4(\xi_M)}{K_2(\xi_M)} U_M^\alpha U_M^\beta U_M^\gamma - \frac{K_3(\xi_M)}{\xi_M K_2(\xi_M)} \cdot \right. \\ \left. (g^{\alpha\beta} U_M^\gamma + g^{\alpha\gamma} U_M^\beta + g^{\beta\gamma} U_M^\alpha) \right]$$

r_M , ξ_M , U_M^α désignent respectivement la masse volumique, le paramètre lié à la température par [I, (11.2)], et la vitesse, évalués avec v_M comme fonction de distribution, au lieu de v . Ces quantités ne coïncident avec leurs homologues r , ξ , U^α (qui sont la masse volumique, le paramètre ξ et la vitesse vraie du gaz) que si l'on adopte la description macroscopique proposée au paragraphe 3.3. Les calculs sont un peu plus simples dans ce cas. Nous choisirons pourtant la description de Eckart, plus naturelle. La description de Landau et Lifchitz conduirait à des calculs semblables. Nous désignons par l'indice M les fonctions thermodynamiques évaluées avec v_M , pour les distinguer des fonctions thermodynamiques vraies, évaluées avec v . (6.4) montre que :

$$(6.10) \quad r = r_M$$

$$(6.11) \quad U^\alpha = U_M^\alpha$$

Par contre, $\xi \neq \xi_M$, $\rho \neq \rho_M$, $p \neq p_M$. Pour évaluer $\rho - \rho_M$, il suffit de faire le produit contracté de (6.5) par $U_\alpha U_\beta$. Il est alors facile, grâce aux formules [I, (9.9) et (9.10)], de calculer $\xi - \xi_M$ et $p - p_M$:

$$(6.12) \quad \rho - \rho_M = c\tau \left[3r U^\gamma \partial_\gamma \left(\frac{K_3(\xi_M)}{\xi_M K_2(\xi_M)} \right) - 2 \frac{K_3(\xi_M)}{\xi_M K_2(\xi_M)} U^\gamma \partial_\gamma r \right] + O(\tau^2)$$

$$(6.13) \quad \xi - \xi_M = \left\{ r \left[\frac{K_3(\xi_M)}{\xi_M K_2(\xi_M)} - \frac{K_4(\xi_M)}{K_2(\xi_M)} + \left(\frac{K_3(\xi_M)}{K_2(\xi_M)} \right)^2 + \frac{1}{\xi_M^2} \right] \right\}^{-1} \\ (\rho - \rho_M) + O(\tau^2)$$

$$(6.14) \quad p - p_M = -\frac{rc^2}{\xi_M^2}(\xi - \xi_M) + O(\tau^2)$$

Nous pouvons d'ailleurs, dans le second membre de ces expressions, remplacer ξ_M par ξ , les égalités restant inchangées au second ordre en τ près. Remplaçant alors ρ_M , ξ_M et p_M par leurs expressions en fonction de ρ , ξ , p dans (6.5), nous obtenons une expression approchée de $T^{\alpha\beta}$ au second ordre en τ près, où n'interviennent que les grandeurs thermodynamiques vraies du gaz et, de façon linéaire, leurs dérivées. Décomposant $T^{\alpha\beta}$ suivant (3.12) nous obtenons les expressions du flux de chaleur Q^α et du tenseur des contraintes de viscosité $\theta^{\alpha\beta}$:

$$(6.15) \quad Q^\alpha = -\kappa T^2(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \left[\partial_\beta \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\delta \nabla_\delta U_\beta \right] + O(\tau^2)$$

$$(6.16) \quad \theta^{\alpha\beta} = -c\lambda(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \nabla_\gamma U^\gamma \\ - c\mu(g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma)(g^{\beta\delta} - U^\beta U^\delta)(\nabla_\gamma U_\delta + \nabla_\delta U_\gamma) + O^{\alpha\beta}(\tau^2)$$

κ , λ , μ sont respectivement la conductivité thermique et les deux coefficients de viscosité. Leurs expressions sont :

$$(6.17) \quad \kappa = -c^4 \tau \frac{r}{T} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right) = \frac{c^4 r \tau}{T} \left[\frac{K_4(\xi)}{K_2(\xi)} - \frac{K_3(\xi)}{\xi K_2(\xi)} - \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right)^2 \right]$$

$$(6.18) \quad \mu = c^2 \tau r \frac{K_3(\xi)}{\xi K_2(\xi)}$$

$$(6.19) \quad \lambda = c^2 \tau r \left\{ \xi^2 \left[\frac{K_3(\xi)}{\xi K_2(\xi)} - \frac{K_4(\xi)}{K_2(\xi)} + \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right)^2 + 1 \right] \right\}^{-1} \\ \cdot \left\{ \frac{2K_3(\xi)}{\xi K_2(\xi)} + \left[\left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right)^2 - \frac{K_4(\xi)}{K_2(\xi)} \right] \right. \\ \left. \cdot \left[3 \left[\xi^2 \left(\frac{K_4(\xi)}{K_2(\xi)} - \frac{K_3(\xi)}{\xi K_2(\xi)} - \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right)^2 \right) - 1 \right]^{-1} - 1 \right] \right\}$$

Remarque 1. — Il est facile de voir que l'application de la méthode de Chapman-Enskog à l'équation de Boltzmann proprement dite conduit, au degré d'approximation considéré, à des résultats qualitativement identiques à ceux-ci (une fois transcrits dans la description de Eckart grâce à (3.37) : seules les expressions de κ , λ et μ diffèrent.

Remarque 2. — Les équations (3.17), (3.19) et (3.20) conduisent aux identités :

$$(6.20) \quad U^\gamma \hat{c}_{,\gamma} r + r \nabla_\gamma U^\gamma = 0$$

$$(6.21) \quad \frac{rK_3(\xi)}{K_2(\xi)} U^\gamma \nabla_\gamma U^\alpha - (g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma) \left(\frac{1}{\xi} \hat{\partial}_\gamma r - \frac{r}{\xi^2} \hat{\partial}_\gamma \xi \right) = 0^\alpha(\tau)$$

$$(6.22) \quad r U^\gamma \left[\frac{K_3(\xi)}{\xi K_2(\xi)} - \frac{K_4(\xi)}{K_2(\xi)} + \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right)^2 + \frac{1}{\xi^2} \right] \hat{\partial}_\gamma \xi + \frac{r}{\xi} \nabla_\gamma U^\gamma = 0(\tau)$$

qui permettent de modifier à volonté les expressions de Q^α et $\theta^{\alpha\beta}$ à des termes d'ordre 2 en τ près. Les expressions (6.15) et (6.16) ne représentent donc qu'une possibilité parmi une infinité d'autres, choisie pour les raisons indiquées dans la remarque suivante.

Remarque 3. — Calculons S^α défini par [I (5.13)] ; nous obtenons :

$$(6.23) \quad S^\alpha = r s U^\alpha + \frac{Q^\alpha}{cT} + 0^\alpha(\tau^2)$$

Le théorème [I, formule (5.16)] rapproché de l'équation (3.20) (dans laquelle nous faisons $J_a^\alpha = 0$ puisqu'il n'y a qu'un seul constituant) montre que le second membre de cette équation doit être, à des termes d'ordre 2 en τ près, ≥ 0 . Ce résultat est une des formes du second principe de la thermodynamique. Si nous remplaçons dans le second membre de (3.20) Q^α et $\theta^{\alpha\beta}$ par leurs expressions (6.15) et (6.16), nous obtenons une forme quadratique par rapport aux variables :

$$\hat{\partial}_\beta \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\delta \cdot \nabla_\delta U_\beta \\ \nabla_\beta U^\alpha.$$

C'est la raison du choix de (6.15) et (6.16), parmi toutes les autres expressions possibles de Q^α et $\theta^{\alpha\beta}$. En exprimant que la forme quadratique ainsi obtenue est non négative, nous voyons que κ , λ et μ doivent vérifier les inégalités (comme en théorie classique non relativiste) :

$$(6.24) \quad \kappa \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0$$

Remarque 4. — Les résultats de ce paragraphe sont en accord avec les équations (2.11) et (2.19) proposées par Eckart. Moyennant leur transcription dans la description macroscopique de Landau et Lifchitz grâce à (3.37), ils sont en accord également avec l'équation (2.12) proposée par ces auteurs.

Chernikov [3] [4] a, par une autre méthode de résolution de l'équation de Boltzmann décrite dans le paragraphe IV, obtenu une expression de $\theta^{\alpha\beta}$ analogue à (6.16) mais avec des coefficients λ et μ vérifiant :

$$(6.25) \quad 3\lambda + 2\mu = 0$$

Nous pensons ce résultat inexact, pour des raisons indiquées en détail plus loin (remarque en fin du § 11.2).

Les expressions limites de κ , λ et μ , pour ξ grand (ce qui correspond au gaz non relativiste) sont :

$$(6.26) \quad \begin{aligned} \kappa &\sim \frac{5}{2} \frac{k^2 r T}{m^2} \tau \\ \lambda &\sim \frac{2}{3} \frac{k r T}{m} \tau \\ \mu &\sim \frac{k r T}{m} \tau \end{aligned}$$

Ainsi à la limite non relativiste, λ et μ vérifient bien (6.25) (ce que confirme la théorie non relativiste). Pour comparer plus en détail les expressions (6.26) aux résultats de la théorie cinétique, il faut exprimer τ en fonction des variables thermodynamiques. Cette expression dépend du modèle moléculaire adopté. Pour un gaz de sphères rigides élastiques de diamètre σ , le temps de libre parcours moyen (que nous assimilons à τ) vaut (Chapman et Cowling [2]) :

$$\tau = \frac{m}{4r\sigma^2} \left(\frac{m}{\pi k T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Portant cette expression dans (6.26) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{5}{8\sqrt{\pi}} \frac{k^{\frac{3}{2}} T^{\frac{1}{2}}}{m^{1/2} \sigma^2} \\ \mu &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{(mkT)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2} \end{aligned}$$

alors que les résultats de la théorie cinétique classique sont :

$$\begin{aligned} \kappa &= 1,92 \frac{5}{8\sqrt{\pi}} \frac{k^{\frac{3}{2}} T^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} \sigma^2} \\ \mu &= 1,27 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{(mkT)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Les coefficients numériques trouvés sont donc inexactes. Il est possible d'améliorer un peu l'accord en modifiant le coefficient numérique figurant

dans τ , mais le nombre de Prandtl (C_p est la chaleur spécifique à pression constante) :

$$\frac{\mu C_p}{\kappa} = \frac{5}{2} \frac{k}{m} \frac{\mu}{\kappa}$$

est toujours égal à 1 d'après les résultats obtenus à partir de l'équation de Krook, alors que sa valeur réelle est voisine de 0,7. C'est là une faiblesse bien connue de l'équation de Krook.

7. Cas des équations de Krook d'un gaz à deux constituants

Considérons un gaz comportant deux espèces de particules a et b , de masses m_a et m_b non nulles, ayant des collisions élastiques, et adoptons pour le décrire les équations de Krook [I, (11.9)]. Supposons le déterminant de la matrice :

$$(7.1) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau'_{aa}} & \frac{1}{\tau'_{ab}} \\ \frac{1}{\tau'_{ba}} & \frac{1}{\tau'_{bb}} \end{pmatrix}$$

non nul, et désignons par :

$$(7.2) \quad \begin{pmatrix} \tau_{aa} & \tau_{ab} \\ \tau_{ba} & \tau_{bb} \end{pmatrix}$$

la matrice inverse de (7.1). Les équations [I, (11.9)] peuvent s'écrire :

$$(7.3) \quad \begin{cases} n_a = n_{aM} - c(\tau_{aa}\mathcal{L}(X)n_a + \tau_{ab}\mathcal{L}(X)n_b) \\ n_b = n_{bM} - c(\tau_{ba}\mathcal{L}(X)n_a + \tau_{bb}\mathcal{L}(X)n_b) \end{cases}$$

X désigne maintenant le champ de vecteurs de P_7 construit à partir de u^α , et non plus de p^α , grâce aux règles [I, (3.16)]

$$(7.4) \quad \mathcal{L}(X)n \equiv u^\alpha \frac{\partial n}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\beta^\alpha u^\beta u^\gamma \frac{\partial n}{\partial u^\alpha}$$

La méthode utilisée dans le paragraphe précédent est applicable sans changement à la résolution approchée de (7.3). Nous supposons, comme dans le paragraphe précédent, les paramètres τ indépendants de u^α . Nous employons la description de Eckart décrite dans le paragraphe 3.1. Il est assez facile de trouver les expressions de Q^α , $\theta^{\alpha\beta}$, J_a^α , à des termes d'ordre 2

en τ près : le calcul est un peu plus compliqué que dans le cas précédent car $r \neq r_M$, $U^\alpha \neq U_M^\alpha$. Nous obtenons finalement :

$$(7.5) \quad Q^\alpha = (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \left\{ -\kappa T^2 \left[\hat{\partial}_\beta \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\delta \nabla_\delta U_\beta \right] + \Lambda_{0a} c^2 \hat{\partial}_\beta \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right) \right\} + O^\alpha(\tau^2)$$

$$(7.6) \quad J_a^\alpha = (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \left\{ -\Lambda_{a0} \left[\hat{\partial}_\beta \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\delta \nabla_\delta U_\beta \right] + D c^2 \hat{\partial}_\beta \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right) \right\} + O^\alpha(\tau^2)$$

l'expression de $\theta^{\alpha\beta}$ étant toujours (17.16).

Les expressions des coefficients sont :

$$(7.7) \quad \kappa = \frac{rc^4}{T} \sum_{a,b} \left\{ \frac{c_a}{m_a} (m_a \tau_{aa} + m_b \tau_{ba}) \cdot \left[\frac{c_b}{2} \left(\frac{K_3(\xi_a)}{K_2(\xi_a)} - \frac{K_3(\xi_b)}{K_2(\xi_b)} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{K_3(\xi_a)}{K_2(\xi_a)} \right) \right] \right\}$$

$$(7.8) \quad \mu = rc^2 \sum_{a,b} \left\{ (m_a \tau_{aa} + m_b \tau_{ba}) \frac{c_a}{m_a} \frac{K_3(\xi_a)}{\xi_a K_2(\xi_a)} \right\}$$

$$(7.9) \quad D = \frac{rT c_a c_b}{2} \sum_{a,b} \left(\tau_{aa} - \frac{m_a c_b}{m_b c_a} \tau_{ab} \right)$$

$$(7.10) \quad \Lambda_{a0} = c^2 D \left(\frac{K_3(\xi_a)}{K_2(\xi_a)} - \frac{K_3(\xi_b)}{K_2(\xi_b)} \right)$$

$$(7.11) \quad \Lambda_{0a} = \Lambda_{a0} \left[\sum_{a,b} \left(\tau_{aa} + \frac{m_a}{m_b} \tau_{ab} \right) \right] \left[\sum_{a,b} \left(\tau_{aa} - \frac{m_a c_b}{m_b c_a} \tau_{ab} \right) \right]^{-1}$$

$$(7.12) \quad \lambda = rkT \sum_{a,b} c_a \left\{ - \left[\frac{1}{m_a \xi_a} + M \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{K_3(\xi_a)}{K_2(\xi_a)} - \frac{1}{\xi_a} \right) \right] (\tau_{aa} + \tau_{ba}) \right. \\ - M \left[\frac{2}{m_a} \frac{K_3(\xi_a)}{\xi_a K_2(\xi_a)} - \frac{\xi_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{K_3(\xi_a)}{\xi_a K_2(\xi_a)} \right) \right. \\ \left. \left. - M \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{K_4(\xi_a)}{K_2(\xi_a)} - 3 \frac{K_3(\xi_a)}{\xi_a K_2(\xi_a)} \right) \right] (m_a \tau_{aa} + m_b \tau_{ba}) \right. \\ \left. + M \left[\frac{1}{m_a \xi_a} + M \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{K_3(\xi_a)}{K_2(\xi_a)} - \frac{1}{\xi_a} \right) \right] \right. \\ \left. \left[m_a \left(\frac{K_3(\xi_a)}{K_2(\xi_a)} - \frac{1}{\xi_a} \right) \tau_{aa} + m_b \left(\frac{K_3(\xi_b)}{K_2(\xi_b)} - \frac{1}{\xi_b} \right) \tau_{ba} \right] \right\}$$

Le signe $\sum_{a,b}$ placé devant un terme signifie qu'il faut ajouter à ce terme celui qui s'en déduit par permutation des indices a et b . La quantité M vaut :

$$(7.13) \quad M = - \left(\frac{c_a}{\xi_a} + \frac{c_b}{\xi_b} \right) \left\{ \sum_{a,b} m_a c_a \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{K_3(\xi_a)}{K_2(\xi_a)} - \frac{1}{\xi_a} \right) \right\}^{-1}$$

Notons la similitude de forme des équations (7.5) et (7.6) et l'existence dans ces équations de termes non diagonaux (dont les coefficients sont Λ_{0a} et Λ_{a0}) représentant la diffusion thermique (effet Soret) et le flux de chaleur lié à une non-uniformité de composition du gaz (effet Dufour).

Remarque 1. — Les remarques 2 et 3 du précédent paragraphe sont valables pour le cas présent. Les coefficients κ , λ , μ , doivent vérifier les inégalités (6.24), D , Λ_{a0} et Λ_{0a} doivent vérifier :

$$(7.14) \quad D \geq 0, \quad (\Lambda_{0a} + \Lambda_{a0})^2 - 4\kappa D T^2 \geq 0$$

Ces inégalités imposent des restrictions au choix des coefficients τ (qui peuvent être fonction des variables thermodynamiques). La première inégalité (7.14), jointe à l'expression (7.10) de Λ_{a0} , a une conséquence physique intéressante : le signe de Λ_{a0} est tel que les particules les plus lourdes tendent à se concentrer dans les régions froides.

Remarque 2. — Onsager [25] [26] a montré qu'en thermodynamique des phénomènes irréversibles non relativistes, les coefficients d'effets réciproques tels que Λ_{a0} et Λ_{0a} sont égaux. Ce serait le cas ici si τ_{ab} et τ_{ba} vérifiaient :

$$(7.15) \quad \frac{m_a^2}{c_a} \tau_{ab} + \frac{m_b^2}{c_b} \tau_{ba} = 0$$

La démonstration du théorème d'Onsager paraissant valable en relativité comme en physique classique, il est naturel d'imposer à τ_{ab} et τ_{ba} de vérifier cette relation. L'existence d'une telle relation entre τ_{ab} et τ_{ba} est physiquement plausible puisque ces coefficients représentent deux effets (les variations de n_a et de n_b) d'une même cause (les collisions entre une particule a et une particule b). Il est d'ailleurs probable qu'un modèle cinétique moins arbitraire que les équations de Krook, comme par exemple les équations de Boltzmann, permettrait de montrer sans hypothèse supplémentaire l'égalité de Λ_{a0} et Λ_{0a} .

8. Étude du problème de Cauchy

Nous présentons dans ce paragraphe l'étude formelle, purement locale, du problème de Cauchy, pour les équations hydrodynamiques du gaz à deux constituants. Le cas du gaz à un constituant peut être étudié de la même façon, avec quelques simplifications : il a d'ailleurs été étudié par Pichon [29] mais à partir d'équations différentes.

Le système d'équations comporte :

1) Les équations d'Einstein, qui, d'après un théorème de Lichnerowicz [19] peuvent être mises sous la forme :

$$(8.1) \quad R_{ij} = \chi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T^\lambda_\lambda \right)$$

$$(8.2) \quad S^{0\alpha} = \chi T^{0\alpha} \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

($R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, S^β_α le tenseur d'Einstein, χ la constante de gravitation) sous la condition :

$$(8.3) \quad g^{00} \neq 0.$$

2) L'équation (3.8) exprimant que U^α est unitaire.

3) Les équations (3.17) à (3.20), et les relations qui permettent d'exprimer toutes les variables thermodynamiques au moyen de trois d'entre elles indépendantes, par exemple c_a , T , r .

4) Les équations (7.5), (7.6) et (6.16) dans lesquelles nous négligeons, au second membre, les termes d'ordre 2 en τ .

Le théorème suivant, dû à Lichnerowicz [19], est applicable au présent problème moyennant une légère adaptation (la démonstration est pratiquement identique à celle donnée par Lichnerowicz dans un cas un peu différent).

THÉORÈME 1. — Si sur l'hypersurface Σ , d'équation $x^0 = 0$, la condition (8.3) est vérifiée, et si μ et κ sont non nuls, une solution du système constitué par les équations (8.1), (3.17) à (3.20), (7.5), (7.6), (6.16) et par les relations entre variables thermodynamiques, qui vérifie (8.2), (3.8) et :

$$(8.4) \quad U_\alpha \nabla_\gamma U^\alpha = 0$$

sur Σ , vérifie (8.2) et (3.8) dans un voisinage de Σ .

Ce théorème peut s'étendre, moyennant des hypothèses supplémentaires, au cas où κ et μ ne sont pas tous deux non nuls : si par exemple

$\mu = 0$ et $\kappa \neq 0$, il faut ajouter aux hypothèses : $U^0 \neq 0$ sur Σ . Il nous permet de considérer les équations (8.2), (3.8) et (8.4) comme des conditions (au nombre de 6) que doivent vérifier les données de Cauchy sur Σ . Celles-ci sont :

$$g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}, U^\alpha, \partial_0 U^\alpha, T, \partial_0 T, r, c_a, \partial_0 \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right).$$

Il est en général possible de choisir arbitrairement $g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$, et 7 des 13 données de Cauchy restantes, puis de déterminer les autres grâce à ces équations.

Supposons donc ces données de Cauchy connues et vérifiant ces conditions, et cherchons à calculer les valeurs sur Σ de :

$$\partial_{00} g_{\alpha\beta}, \partial_{00} U^\alpha, \partial_{00} T, \partial_0 r, \partial_{00} \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right)$$

L'équation (3.17) donne $\partial_0 r$ si :

$$(8.5) \quad U^0 \neq 0.$$

Toutes les variables thermodynamiques et leurs dérivées premières sont alors connues sur Σ , ainsi que Q^α , J_a^α , $\theta^{\alpha\beta}$ (grâce à (7.5), (7.6) et (6.16)), et par suite $T^{\alpha\beta}$. L'équation (8.1) permet alors (comme l'a montré Lichnerowicz [19] de calculer $\partial_{00} g_{ij}$ si (8.3) est vérifié, et nous savons par ailleurs que les $\partial_{00} g_{\alpha 0}$ doivent rester indéterminés, car un changement de variables permet de leur attribuer une valeur arbitraire. En portant les expressions de Q^α , $\theta^{\alpha\beta}$ et J_a^α tirées de (7.5), (7.6) et (6.16) dans (3.18), (3.19), (3.20) nous obtenons un système de 6 équations pour les 6 inconnues restantes.

Considérons d'abord les 3 équations qui ne contiennent que $\partial_{00} T$, $\partial_{00} U^0$ et $\partial_{00} \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right)$. Elles s'écrivent :

$$\frac{\Lambda_{a0}}{T^2} (g^{00} - (U^0)^2) \partial_{00} T - \frac{\Lambda_{a0}}{T} U^0 \partial_{00} U^0 + D c^2 (g^{00} - (U^0)^2) \partial_{00} \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right) = (d.c)$$

$$\kappa (g^{00} - (U^0)^2) \partial_{00} T - \kappa T U^0 \partial_{00} U^0 + \Lambda_{0a} c^2 (g^{00} - (U^0)^2) \partial_{00} \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right) = (d.c)$$

$$\begin{aligned} \kappa U^0 (g^{00} - (U^0)^2) \partial_{00} T + [c^2 (\lambda + 2\mu) (g^{00} - (U^0)^2) - \kappa T (U^0)^2] \partial_{00} U^0 \\ + c^2 U^0 (g^{00} - (U^0)^2) \Lambda_{0a} \partial_{00} \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T} \right) = (d.c) \end{aligned}$$

(d.c) désigne des quantités qu'il est possible d'évaluer en fonction des

données de Cauchy. Ces équations permettent le calcul de $\hat{c}_{00}T$, $\hat{c}_{00}U^0$ et $\hat{c}_{00}\left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{T}\right)$ si le déterminant du système est non nul :

$$(8.6) \quad \frac{c^4}{T^2}(\kappa DT^2 - \Lambda_{0a}\Lambda_{a0})(\lambda + 2\mu)(g^{00} - (U^0)^2)^3 \neq 0$$

Nous supposons les coefficients λ , μ , D , Λ_{0a} et Λ_{a0} tels que

$$(xDT^2 - \Lambda_{0a}\Lambda_{a0})(\lambda + 2\mu) \neq 0$$

de sorte que la condition (8.6) devient :

$$(8.7) \quad g^{00} - (U^0)^2 \neq 0.$$

Enfin les trois équations restantes s'écrivent, une fois les inconnues précédentes calculées :

$$[\kappa T(U^0)^2 - \mu c^2(g^{00} - (U^0)^2)]\hat{c}_{00}U^i = (d.c)$$

Il est facile de voir que si, comme nous le supposons, κ et μ sont strictement positifs, le coefficient de $\hat{c}_{00}U^i$ dans cette équation ne peut être nul. L'équation permet donc de déterminer $\hat{c}_{00}U^i$.

En résumé, nous pouvons calculer les dérivées normales des données de Cauchy sur Σ , si celle-ci est telle que (8.3), (8.5) et (8.7) soient vérifiés. Le calcul des dérivées normales d'ordre plus élevé se fait de la même façon, sans introduire de condition supplémentaire.

Revenant à un système de coordonnées locales quelconque dans lequel l'équation de Σ est :

$$(8.8) \quad \varphi = 0$$

nous voyons que les variétés exceptionnelles, pour lesquelles le problème de Cauchy est indéterminé, vérifient :

$$(8.9) \quad g^{z\beta}\hat{c}_z\varphi\hat{c}_\beta\varphi = 0, \quad \text{ondes gravitationnelles}$$

$$(8.10) \quad U^z\hat{c}_z\varphi = 0, \quad \text{hypersurfaces engendrées par des lignes de courant}$$

$$(8.11) \quad (g^{z\beta} - U^zU^\beta)\hat{c}_z\varphi\hat{c}_\beta\varphi = 0.$$

Ces résultats sont identiques à ceux obtenus par Pichon [29] pour un fluide à un constituant sans diffusion (bien que les équations de départ utilisées par cet auteur soient différentes des nôtres). Les hypersurfaces (8.11) sont de genre espace, et impliquent donc une propagation de signaux à vitesse infinie. Ce résultat peu satisfaisant physiquement est dû

à notre avis au fait que les équations (7.5), (7.6) et (6.16), obtenues par résolution approchée de l'équation de Boltzmann, ne conviennent pas, l'approximation étant insuffisamment poussée.

IV. DEUXIÈME MÉTHODE DE RÉOLUTION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN RELATIVISTE

9. Principe de la méthode de Grad

Les résultats du précédent paragraphe laissent supposer qu'on doit, pour former les équations destinées à remplacer (7.5), (7.6) et (6.16), résoudre les équations de Boltzmann à un degré d'approximation plus grand que nous ne l'avons fait. La méthode de Chapman-Enskog devenant alors très compliquée, nous avons préféré en employer une autre, qui est l'adaptation relativiste de la méthode classique de Grad [9].

Cette méthode a d'ailleurs l'avantage, par rapport à la méthode de Chapman-Enskog, de permettre en principe l'obtention d'une solution quelconque des équations de Boltzmann, car à chaque degré nouveau d'approximation elle introduit de nouvelles fonctions inconnues et un nombre égal de nouvelles équations (alors que les solutions « normales » données par la méthode de Chapman-Enskog ne dépendent que de la valeur de 5 fonctions arbitraires sur une hypersurface, quel que soit le degré d'approximation).

Nous allons indiquer comment adapter la méthode de Grad à la relativité, en traitant le cas d'un gaz de particules toutes identiques de masse m non nulle. Nous utiliserons la fonction de distribution des vitesses $n(u^x)$ liée à $v(p^x)$ par [I, formule (9.7)].

La méthode consiste à chercher une solution de l'équation de Boltzmann sous la forme d'un développement en série :

$$(9.1) \quad n = n_0 \left(\alpha + \alpha_\lambda H^\lambda + \dots \frac{1}{p!} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_p} H^{\lambda_1 \dots \lambda_p} + \dots \right)$$

les α étant des tenseurs fonction seulement de x , et les H étant des polynômes tensoriels fonction de p (et des paramètres ξ et U^x qui interviennent dans n_0), n_0 est une fonction de distribution de Maxwell :

$$(9.2) \quad n_0 = a_0 \exp (- \xi U_\lambda u^\lambda).$$

En portant cette expression dans l'équation de Boltzmann, nous obtenons par identification une suite infinie d'équations aux dérivées partielles

dont les α sont les fonctions inconnues. Nous verrons plus loin que ceux-ci sont liés de façon simple aux moments de la fonction de distribution. La méthode de Grad permet donc d'envisager des descriptions macroscopiques d'un gaz plus générales que celles, basées sur les deux premiers moments seulement, étudiées dans le paragraphe 3.

10. Les polynômes de Hermite-Grad relativistes

10.1. RAPPEL BIBLIOGRAPHIQUE

Rappelons d'abord la définition des polynômes employés par Grad [8] pour la résolution de l'équation de Boltzmann non relativiste. Dans l'espace euclidien à N dimensions rapporté à des axes orthonormés, posons :

$$(10.1) \quad \mathcal{H}_{i_1 \dots i_p} = (-1)^p \exp \left(\frac{1}{2} \sum_i (x^i)^2 \right) \cdot \frac{\partial^{(p)} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_i (x^i)^2 \right)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}}$$

Les $\mathcal{H}_{i_1 \dots i_p}$ sont les composantes d'un tenseur entièrement symétrique de rang p , et ce sont aussi des polynômes de degré p en x . Pour $N = 1$, ils se réduisent aux polynômes de Hermite. Ils possèdent la propriété d'orthogonalité :

$$(10.2) \quad \int \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_i (x^i)^2 \right) \mathcal{H}_{i_1 \dots i_p} \mathcal{H}_{j_1 \dots j_q} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N \begin{cases} \neq 0 & \text{si } p = q \\ & \text{et si } (j_1 \dots j_p) \\ & \text{est une permutation de} \\ & (i_1 \dots i_p), \\ = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

Chernikov [3] a proposé une adaptation des polynômes tensoriels de Hermite-Grad à la relativité. Cet auteur procède comme suit. En un point x de V_4 , soient U^α un vecteur fixe, u^α un vecteur variable, tous deux unitaires et dirigés vers l'avenir, et ξ un scalaire positif. Prenons dans T_x un repère orthonormé, l'axe des x^0 étant parallèle à U^α . La composante u^0 peut être considérée comme fonction des trois autres, u^i ($i = 1, 2, 3$). Posons :

$$(10.3) \quad K_{i_1 \dots i_p} = \exp(\xi u^0) \frac{\partial^{(p)} \exp(-\xi u^0)}{\partial u^{i_1} \dots \partial u^{i_p}}$$

Les $K_{i_1 \dots i_p}$, définis seulement lorsque les indices $i_1 \dots i_p$ prennent les

valeurs 1, 2, 3, peuvent être considérés comme les composantes de tenseurs entièrement symétriques du sous-espace à 3 dimensions normal à U^α . Ce ne sont pas des polynômes (u^0 s'exprimant par un radical). En posant :

$$(10.4) \quad K_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \begin{cases} 0 & \text{si un au moins des indices } \alpha \text{ est } 0 \\ K_{i_1 \dots i_p} & \text{si } \alpha_1 = i_1, \dots, \alpha_p = i_p \end{cases}$$

on peut définir une famille de tenseurs symétriques de T_x , qui vérifient :

$$(10.5) \quad U^{\alpha_1} K_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = 0$$

10.2. NOUVELLE FAMILLE DE POLYNÔMES TENSORIELS PROPOSÉE

Les tenseurs de Chernikov ont l'inconvénient de ne posséder aucune propriété d'orthogonalité généralisant (10.2), et d'être des prolongements artificiels dans l'espace-temps à 4 dimensions de tenseurs de l'espace à 3 dimensions. Cela les rend mal adaptés à la représentation des moments des divers ordres de la fonction de distribution, qui possèdent des composantes temporelles aussi bien que spatiales. Nous avons proposé [23] une nouvelle famille de polynômes tensoriels définie par le théorème suivant.

THÉOREME 2. — Les vecteurs unitaires dirigés vers l'avenir U^α et u^α , et une constante $\xi > 0$ étant donnés, il existe une famille unique de tenseurs $H^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ (p allant de 0 à $+\infty$) entièrement symétriques ayant les propriétés suivantes :

a) Les composantes $H^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ sont des polynômes de degré p par rapport aux quatre variables (non indépendantes) u^α , le terme du degré le plus élevé étant : $u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_p}$. Par convention, pour $p = 0$, $H = 1$.

b) Les $H^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ possèdent la propriété d'orthogonalité :

$$(10.6) \quad \int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda) H^{\alpha_1 \dots \alpha_p} H^{\beta_1 \dots \beta_q} \omega = 0 \quad \text{si } p \neq q$$

Démonstration. — Supposons l'existence et l'unicité des $H^{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ établies jusqu'au rang $q = p - 1$. Si $H^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ existe, il est d'après a) nécessairement de la forme :

$$(10.7) \quad H^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_p} - \sum_{q=0}^{p-1} C_{\lambda_1 \dots \lambda_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} H^{\lambda_1 \dots \lambda_q}$$

et d'après b), les coefficients $C_{\lambda_1 \dots \lambda_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ sont solution du système linéaire :

$$(10.8) \quad A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q} C_{\lambda_1 \dots \lambda_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = B^{\alpha_1 \dots \alpha_p, \mu_1 \dots \mu_q}$$

Nous avons posé :

$$(10.9) \quad A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q} = \int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda) H^{\lambda_1 \dots \lambda_q} H^{\mu_1 \dots \mu_q} \omega$$

$$(10.10) \quad B^{\alpha_1 \dots \alpha_p, \mu_1 \dots \mu_q} = \int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda) u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_p} H^{\mu_1 \dots \mu_q} \omega$$

Le système linéaire (10.8) n'est pas en général (pour $\alpha_1 \dots \alpha_p$ fixés) de rang maximal : supposons qu'il existe un certain nombre de relations linéaires entre les coefficients des membres de gauche des équations de ce système, de la forme :

$$(10.11) \quad Q_{\mu_1 \dots \mu_q} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q} = 0$$

Pour démontrer que ce système a cependant au moins une solution, nous utilisons le lemme :

LEMME 1. — (10.11) équivaut à

$$(10.12) \quad Q_{\mu_1 \dots \mu_q} H^{\mu_1 \dots \mu_q} = 0$$

En effet, (10.12) $\Rightarrow$ (10.11) est évident. Inversement, (10.11) entraîne, d'après (10.9) :

$$\int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda) H^{\lambda_1 \dots \lambda_q} (Q_{\mu_1 \dots \mu_q} H^{\mu_1 \dots \mu_q}) \omega = 0$$

ou en faisant le produit contracté du premier membre par $Q_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$:

$$\int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda) (Q_{\mu_1 \dots \mu_q} H^{\mu_1 \dots \mu_q})^2 \omega = 0$$

d'où nous déduisons (10.12), la fonction intégrée étant non négative et continue.

(10.12) entraîne :

$$Q_{\mu_1 \dots \mu_q} B^{\alpha_1 \dots \alpha_p, \mu_1 \dots \mu_q} = 0$$

ce qui montre que le système (10.8) a nécessairement des solutions. Soient $C^{(1)}_{\lambda_1 \dots \lambda_q, \alpha_1 \dots \alpha_p}$ et $C^{(2)}_{\lambda_1 \dots \lambda_q, \alpha_1 \dots \alpha_p}$ deux d'entre elles. Nous avons :

$$(C^{(1)}_{\lambda_1 \dots \lambda_q, \alpha_1 \dots \alpha_p} - C^{(2)}_{\lambda_1 \dots \lambda_q, \alpha_1 \dots \alpha_p}) A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q} = 0$$

$A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q}$ étant symétrique pour l'échange des deux ensembles d'indices $(\lambda_1 \dots \lambda_q)$ et $(\mu_1 \dots \mu_q)$, nous pouvons appliquer le lemme 1, et nous

voyons que lorsqu'on calcule $H^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ grâce à (10.7), on obtient le même résultat, que l'on emploie $C^{(1)}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ ou $C^{(2)}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$.

THÉORÈME 3. — Pour $p \geq 2$:

$$(10.13) \quad g_{\alpha_1 \alpha_2} H^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = 0.$$

Démonstration. — D'après (10.7):

$$g_{\alpha_1 \alpha_2} H^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = u^{\alpha_3} \dots u^{\alpha_p} - \sum_{q=0}^{p-1} g_{\alpha_1 \alpha_2} C_{\lambda_1 \dots \lambda_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} H^{\lambda_1 \dots \lambda_q}$$

Le second membre de cette expression étant un polynôme de degré maximum $p-1$, en u^α , nous pouvons exprimer le premier membre sous forme d'une combinaison linéaire des $H^{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ ($q \leq p-1$), ce qui d'après (10.6) entraîne:

$$\int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda) g_{\alpha_1 \alpha_2} H^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} H^{\beta_1 \dots \beta_q} \omega = 0$$

ou, en faisant le produit contracté du premier membre par $g_{\beta_1 \beta_2}$ et en posant $\alpha_i = \beta_i$ ($3 \leq i \leq p$):

$$\int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda) (g_{\alpha_1 \alpha_2} H^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p})^2 \omega = 0$$

ce qui établit (10.13).

La propriété d'orthogonalité (10.6), applicable aux composantes de deux tenseurs H de rangs différents, n'existe pas pour les composantes différentes d'un même tenseur H (alors que les tenseurs de Hermite-Grad non relativistes possèdent cette propriété). Cependant, la famille des polynômes tensoriels H possède les propriétés essentielles des familles de fonctions orthogonales, comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME 4. — Soit n une fonction de u^α telle que :

$$n \exp\left(\frac{\xi}{2} U_\lambda u^\lambda\right)$$

soit de carré sommable sur Ω_{1x} , pour la mesure associée à la forme élément de volume ω . Il existe un développement unique de la forme (9.1) dont les coefficients $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ sont solution des systèmes linéaires :

$$(10.14) \quad \frac{a_0}{q!} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} = D^{\mu_1 \dots \mu_q}$$

où $A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q}$ est défini par (10.9), et :

$$(10.15) \quad D^{\mu_1 \dots \mu_q} = \int_{\Omega_{1x}} n H^{\mu_1 \dots \mu_q} \omega$$

Ce développement, quel que soit l'ordre p auquel on le limite, est celui qui rend minimum l'expression :

$$(10.16) \quad I_p = \int_{\Omega_{1x}} n_0 \left[\frac{n}{n_0} - \sum_{q=0}^p \frac{1}{q!} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} H^{\lambda_1 \dots \lambda_q} \right]^2 \omega$$

et on a l'inégalité, qui remplace celle de Bessel classique :

$$(10.17) \quad \int_{\Omega_{1x}} \frac{n^2}{n_0} \omega \geq a_0 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_q} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q}$$

Démonstration. — Cherchons à déterminer les coefficients $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ afin de rendre I_p minimum. En différentiant (10.16) nous obtenons, compte tenu de (10.6) et (10.15) :

$$\delta I_p = \sum_{q=0}^p \left(-\frac{2}{q!} \right) \left[D^{\mu_1 \dots \mu_q} - \frac{a_0}{q!} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q} \right] \delta \alpha_{\mu_1 \dots \mu_q}$$

Les coefficients $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ qui rendent I_p minimum sont donc bien solution des systèmes linéaires (10.14). Le lemme 1 permet de montrer que ces systèmes ont toujours des solutions. Bien que $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$, solution de (10.14), ne soit pas déterminé de façon unique, ce lemme montre également que $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} H^{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ est unique.

Compte tenu de (10.6) et (10.14), nous obtenons, en calculant I_p :

$$I_p = \int_{\Omega_{1x}} \frac{n^2}{n_0} \omega - a_0 \sum_{q=0}^p \frac{1}{q!} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_q} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q}$$

Le terme général :

$$\frac{1}{q!} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_q} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q} = \frac{1}{q!} \int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_{\lambda} u^{\lambda}) (\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} H^{\lambda_1 \dots \lambda_q})^2 \omega$$

de la somme figurant au deuxième membre de cette expression étant, de même que I_p , non négatif, la série à termes non négatifs figurant au deuxième membre de (10.17) est convergente, et cette inégalité est établie.

THÉORÈME 5. — La famille de fonctions :

$$(10.18) \quad \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \exp \left(-\frac{\xi}{2} U_\alpha u^\alpha \right) H^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

est complète dans l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω_{1x} . L'inégalité (10.17) est donc à remplacer par l'égalité :

$$(10.19) \quad \int_{\Omega_{1x}} \frac{n^2}{n_0} \omega = a_0 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_q} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q, \mu_1 \dots \mu_q}$$

correspondant à la formule classique de Parseval.

Démonstration. — Au lieu de démontrer que la famille de fonctions (10.18) est complète il revient au même d'établir cette propriété pour la famille de fonctions :

$$\psi^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \exp \left(-\frac{\xi}{2} U_\alpha u^\alpha \right) u^{\lambda_1} \dots u^{\lambda_p}$$

qui sont des combinaisons linéaires des $\varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. Pour cela, étant donné une fonction f telle que :

$$\exp \left(-\frac{\xi}{2} U_\alpha u^\alpha \right) f$$

soit de carré sommable sur Ω_{1x} , il suffit de montrer qu'on peut choisir des coefficients $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ ($q = 0, 1, \dots, n, \dots$) de façon telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{1x}} \exp \left(-\xi U_\lambda u^\lambda \right) \left[f - \sum_{q=0}^n \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} u^{\lambda_1} \dots u^{\lambda_q} \right]^2 \omega = 0$$

Prenons un système d'axes orthonormé dans T_x , l'axe des x^0 étant parallèle à U^α . L'élément de volume ω est, d'après [I, formule (3.9)], le repère étant orthonormé :

$$\omega = \frac{1}{u^0} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$$

Prenons pour nouvelles variables :

$$v^i = \frac{u^i}{u^0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Il est facile de voir que :

$$\frac{D(u^1 u^2 u^3)}{D(v^1 v^2 v^3)} = (u^0)^5$$

de sorte que l'égalité à démontrer s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \left[\exp \left(-\frac{\xi}{2} u^0 \right) (u^0)^2 f - \exp \left(-\frac{\xi}{2} u^0 \right) (u^0)^2 \sum_{q=0}^n \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q} u^{\lambda_1} \dots u^{\lambda_q} \right]^2 dv^1 \wedge dv^2 \wedge dv^3 = 0$$

l'intégrale étant étendue à la boule B :

$$\sum_i (v^i)^2 \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Mais la fonction :

$$\exp \left(-\frac{\xi}{2} u^0 \right) (u^0)^2 f$$

est de carré sommable dans la boule B. Elle peut être approchée (pour la norme de la convergence en moyenne quadratique) par une fonction continue, qui elle-même peut, d'après le théorème de Weierstrass, être approchée uniformément par une suite de polynômes. Pour établir la propriété, il suffit donc de démontrer que pour tout monôme :

$$v^{i_1} \dots v^{i_q} \quad (q \text{ quelconque } \geq 0)$$

on peut trouver des coefficients $\beta_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ tels que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \left[v^{i_1} \dots v^{i_q} - \exp \left(-\frac{\xi}{2} u^0 \right) (u^0)^2 \sum_{p=0}^n \beta_{\lambda_1 \dots \lambda_p} u^{\lambda_1} \dots u^{\lambda_p} \right]^2 dv^1 \wedge dv^2 \wedge dv^3 = 0$$

Prenons les coefficients $\beta_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ nuls pour $p < q$, et prenons pour $p \geq q$, q des indices $(\lambda_1 \dots \lambda_p)$ égaux respectivement à $i_1, \dots, i_q$, et les $p - q$ restants égaux à 0. L'égalité à démontrer s'écrit :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_B (v^{i_1} \dots v^{i_q})^2 \left[1 - \exp \left(-\frac{\xi}{2} u^0 \right) (u^0)^{q+2} \sum_{r=0}^m \beta_r (u^0)^r \right]^2 dv^1 \wedge dv^2 \wedge dv^3 = 0$$

égalité sûrement assurée si :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_B \left[1 - \exp \left(-\frac{\xi}{2} u^0 \right) (u^0)^{q+2} \sum_{r=0}^m \beta_r (u^0)^r \right]^2 dv^1 \wedge dv^2 \wedge dv^3 = 0$$

soit, en revenant aux variables u^α :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{1x}} (u^0)^{2q} \exp(-\xi u^0) \left[\frac{\exp\left(\frac{\xi}{2} u^0\right)}{(u^0)^{q+2}} - \sum_{r=0}^m \beta_r (u^0)^r \right]^2 \omega = 0$$

Prenons comme nouvelles variables φ, θ et ψ définies par [I, formule (3.8)] et intégrons par rapport à φ et θ . Cette égalité s'écrit :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 4\pi \int_0^\infty \text{sh}^2 \psi (\text{ch} \psi)^{2q} \exp(-\xi \text{ch} \psi) \left[\frac{\exp\left(\frac{\xi}{2} \text{ch} \psi\right)}{(\text{ch} \psi)^{q+2}} - \sum_{r=0}^m \beta_r (\text{ch} \psi)^r \right]^2 d\psi = 0$$

ou en prenant comme nouvelle variable $z = \text{ch} \psi$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 4\pi \int_1^\infty z^{2q} \sqrt{z^2 - 1} \exp(-\xi z) \left[\frac{\exp\left(\frac{\xi}{2} z\right)}{z^{q+2}} - \sum_{r=0}^m \beta_r z^r \right]^2 dz = 0$$

La fonction :

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{\exp\left(\frac{\xi}{2} z\right)}{z^{q+2}} & \text{pour } 1 \leq z \end{cases}$$

est de carré sommable entre 0 et $+\infty$. Elle est donc développable en série de fonctions de Laguerre généralisées, correspondant à la fonction de pondération :

$$z^{2q+1} \exp(-\xi z)$$

Il est donc possible de déterminer des coefficients β_r de façon telle que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty z^{2q+1} \exp(-\xi z) \left[F(z) - \sum_{r=0}^m \beta_r z^r \right]^2 dz = 0$$

et, à plus forte raison :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^\infty z^{2q+1} \exp(-\xi z) \left[F(z) - \sum_{r=0}^m \beta_r z^r \right]^2 dz = 0$$

L'égalité à démontrer en résulte, puisque :

$$z^{2q+1} > z^{2q} \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{pour } z \geq 1$$

ce qui établit le théorème 5.

Remarque. — Il est facile de définir une famille de polynômes tensoriels convenant pour résoudre l'équation de Boltzmann relativiste des particules de masse nulle, par une démarche analogue à celle présentée ci-dessus. Il faut dans ce cas utiliser le vecteur impulsion isotrope p^α (et non plus le vecteur vitesse u^α) et prendre la fonction de distribution de Maxwell des particules de masse nulle pour fonction de pondération.

10.3. EXPRESSION DES PREMIERS POLYNÔMES TENSORIELS $H^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$

Grâce à [I, formule (9.5)], on peut facilement (mais au prix de calculs assez longs) obtenir l'expression des polynômes tensoriels H des premiers ordres. Ceux des trois premiers ordres sont :

$$(10.20) \quad H = 1$$

$$(10.21) \quad H^\alpha = u^\alpha - \frac{K_2(\xi)}{K_1(\xi)} U^\alpha$$

$$(10.22) \quad H^{\alpha\beta} = u^\alpha u^\beta - C_\lambda^{\alpha\beta} H^\lambda - C^{\alpha\beta}$$

avec :

$$(10.23) \quad C^{\alpha\beta} = \frac{\xi}{K_1(\xi)} \left[\frac{K_3(\xi)}{\xi} U^\alpha U^\beta - \frac{K_2(\xi)}{\xi^2} g^{\alpha\beta} \right]$$

$$(10.24) \quad C_\lambda^{\alpha\beta} = -\frac{\xi^2}{K_2(\xi)} [g_{\lambda\mu} + Y(\xi) U_\lambda U_\mu] \\ \cdot \left[\left(\frac{K_4(\xi)}{\xi} - \frac{K_2(\xi) K_3(\xi)}{\xi K_1(\xi)} \right) U^\alpha U^\beta U^\mu - \left(\frac{K_3(\xi)}{\xi^2} - \frac{(K_2(\xi))^2}{\xi^2 K_1(\xi)} \right) g^{\alpha\beta} U^\mu \right. \\ \left. - \frac{K_3(\xi)}{\xi^2} (g^{\alpha\mu} U^\beta + g^{\beta\mu} U^\alpha) \right]$$

$Y(\xi)$ étant la fonction définie par :

$$(10.25) \quad [1 + Y(\xi)]^{-1} = 1 + \xi \left[\frac{K_2(\xi)}{K_1(\xi)} - \frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right]$$

10.4. RELATIONS ENTRE LES TENSEURS H ET LES TENSEURS HERMITE-GRAD NON RELATIVISTES

Contrairement au tenseur K introduit par Chernikov, le tenseur H de rang p possède un plus grand nombre de composantes linéairement indépendantes que le tenseur $\mathcal{H}$ de Hermite-Grad de même rang $((p+1)^2$ au lieu de $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$). Comparons donc à $\mathcal{H}$ la projection de H sur le

sous-espace normal à U^α . Prenons un repère orthonormé, l'axe des x^0 étant parallèle à U^α , et posons :

$$(10.26) \quad x^i = \sqrt{\xi} u^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Remplaçons, dans l'expression de $H^{i_1 \dots i_p}$, les u^i par $\frac{x^i}{\sqrt{\xi}}$ et u^0 par

$$\left(1 + \sum_i \frac{x^i}{\sqrt{\xi}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$H^{i_1 \dots i_p}$ s'exprime uniquement au moyen de ξ et des variables x^i , mais ce n'est plus un polynôme en x^i . Faisons tendre ξ vers $+\infty$, les x^i restant finis. L'expression :

$$(10.27) \quad \mathcal{H}^{i_1 \dots i_p} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\xi^{\frac{p}{2}} H^{i_1 \dots i_p})$$

est un polynôme de degré p en x^i , car dans cette expression les u^0 tendent vers 1. Il est facile de voir que le terme de plus haut degré de $\mathcal{H}^{i_1 \dots i_p}$ est $x^{i_1} \dots x^{i_p}$ et que les $\mathcal{H}'$ de rangs p et q différents possèdent la propriété d'orthogonalité (10.2). Or ces deux propriétés suffisent à définir les polynômes de Hermite-Grad : cela résulte d'un raisonnement identique à celui fait pour établir le théorème 2. Les $\mathcal{H}^{i_1 \dots i_p}$ coïncident donc avec les polynômes tensoriels de Hermite-Grad non relativistes.

Remarque. — La propriété d'orthogonalité remarquable des composantes différentes d'un même tenseur de Hermite-Grad n'est pas nécessaire pour les définir, et semble particulière à cette famille de polynômes tensoriels : pour d'autres familles, cette propriété serait incompatible avec celle exprimant que le polynôme d'ordre p a pour terme de degré le plus élevé $x^{i_1} \dots x^{i_p}$.

11. Application à la résolution de l'équation de Boltzmann relativiste

11.1. OBTENTION D'UNE SUITE INFINIE D'ÉQUATIONS

Écrivons l'équation de Boltzmann [I, (4.5)] d'un gaz de particules toutes identiques de masse $m \neq 0$, ayant des collisions élastiques, en prenant pour fonction inconnue la fonction de distribution des vitesses $n(u^\alpha)$:

$$(11.1) \quad \mathcal{L}(X)n \equiv u^\alpha \frac{\partial n}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma \frac{\partial n}{\partial u^\alpha} = I(n)$$

avec :

$$(11.2) \quad \mathbf{I}(n) \equiv \int [n(u')n(v') - n(u)n(v)]A(u, v, n)\omega_1 \wedge \varepsilon$$

(il faut prendre garde au fait que la variable n qui intervient dans A est le vecteur unitaire définissant la collision par les formules [I, (3.26)], et non la fonction de distribution).

Cherchons une solution de cette équation exprimable par un développement de la forme (9.1), et supposons les conditions nécessaires pour que les opérations de dérivation et d'intégration qui interviennent soient faisables terme à terme. En pratique, nous devons d'ailleurs nous contenter de la recherche d'une solution approchée, sous forme d'un développement limité à un nombre fini de termes, et nous pourrions toujours effectuer ces opérations terme à terme.

En développant les deux membres de (11.1) sous une forme analogue à (9.1), et en identifiant les coefficients de tenseurs H de même rang apparaissant dans les deux membres, nous obtenons une suite infinie d'équations, dont les fonctions inconnues sont les coefficients $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$. Les paramètres a_0 , ξ et U_α figurent aussi dans ces équations, mais doivent être considérés comme des données qu'on peut choisir arbitrairement dans une certaine mesure (pourvu que n soit représentable par un développement (9.1)). Appelons « équation d'ordre p » celle qui résulte de l'identification des coefficients du tenseur H d'ordre p : il est facile de la former en faisant le produit des deux membres de (11.1) par $H^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ et en intégrant sur Ω_{1x} . Grâce à [I, formule (5.2)] nous pouvons écrire cette équation :

$$(11.3) \quad \nabla_\beta \left[\int_{\Omega_{1x}} n H^{\lambda_1 \dots \lambda_p} u^\beta \omega \right] - \int_{\Omega_{1x}} n [\mathcal{L}(X)\tilde{H}]^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \omega = \int_{\Omega_{1x}} \mathbf{I}(n) H^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \omega$$

Le premier terme du membre de gauche de cette équation fait intervenir seulement $\alpha_{\mu_1 \dots \mu_q}$ pour $q = p - 1$, p et $p + 1$, et leurs dérivées premières, ainsi que a_0 , ξ et U_α et leurs dérivées premières : en effet il est facile de montrer que $H^{\lambda_1 \dots \lambda_p} u^\beta$ s'exprime par une combinaison linéaire des $H^{\mu_1 \dots \mu_q}$ de rangs $p - 1$, p et $p + 1$. Le second terme du membre de gauche fait intervenir les $\alpha_{\mu_1 \dots \mu_q}$ d'ordre $q \leq p$ mais non leurs dérivées, a_0 , ξ et U^α et leurs dérivées premières. Le membre de droite fait intervenir les $\alpha_{\mu_1 \dots \mu_q}$ de tous ordres, a_0 , ξ et U_α , mais non leurs dérivées. Pour les ordres $p = 0$ et $p = 1$, le second membre de (11.3) est nul, en vertu de [I, théorèmes 4 et 5] : les équations correspondantes sont simplement (3.3) et (3.4).

Nous pouvons utiliser la liberté du choix des paramètres a_0 , ξ et U_α pour simplifier l'expression du développement (9.1). Le choix le plus avantageux semble être celui qui réalise :

$$(11.4) \quad \int_{\Omega_{1x}} n\omega = 4\pi a_0 \frac{K_1(\xi)}{\xi}$$

$$(11.5) \quad \int_{\Omega_{1x}} nu^\alpha \omega = 4\pi a_0 \frac{K_2(\xi)}{\xi} U^\alpha.$$

Si la méthode de Grad est utilisée pour résoudre le problème de Cauchy, n est connue sur l'hypersurface initiale. Les formules (11.4) et (11.5) définissent alors de façon unique a_0 , ξ et U^α sur l'hypersurface initiale : en effet (11.5) définit U^α , puis :

$$\frac{\int_{\Omega_{1x}} nu^\alpha U_\alpha \omega}{\int_{\Omega_{1x}} n\omega} = \frac{K_2(\xi)}{K_1(\xi)}$$

définit ξ de façon unique, puisque $\frac{K_2(\xi)}{K_1(\xi)}$ est une fonction qui décroît de façon monotone de $+\infty$ à 1 lorsque ξ varie entre 0 et $+\infty$ (Synge [30]), et que le premier membre de cette égalité est nécessairement > 1 , $u^\alpha U_\alpha$ étant ≥ 1 . L'une ou l'autre des formules (11.4) et (11.5) définit alors a_0 . En dehors de l'hypersurface initiale, a_0 , U_α et ξ doivent maintenant être considérés comme des fonctions inconnues, au même titre que les $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$. En revanche, il est facile de voir que grâce à (11.4) et (11.5), n et n_0 ont mêmes moments d'ordre 0 et 1, et que par conséquent :

$$(11.6) \quad \alpha = 1$$

$$(11.7) \quad \alpha_\lambda = 0.$$

Ces deux quantités ne sont donc plus à considérer parmi les fonctions inconnues.

Si nous utilisons la description proposée au paragraphe 3.3, U^α est la vitesse du gaz, a_0 et ξ sont liés respectivement à la masse volumique r et à la température T par [I, formules (9.6) et (9.2)], les équations d'ordre 0 et 1 s'écrivent sous la forme (3.17), (3.35) et (3.36) (avec, dans cette dernière, $J_a = J_b = 0$ puisque le gaz considéré est à un seul constituant). C'est pourquoi cette description est mieux adaptée que celles de Eckart ou de Landau et Lifchitz à la méthode de résolution considérée ici.

Lorsqu'on cherche une solution approchée de l'équation de Boltzmann en exprimant n par un développement (9.1) limité au terme d'ordre p , il est facile de voir que le système des équations d'ordre zéro à p comporte autant d'équations indépendantes que l'expression de n comporte de fonctions inconnues. On remplacera bien entendu par zéro, dans ces équations, tous les $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ d'ordre $q \geq p + 1$.

11.2. L'APPROXIMATION D'ORDRE DEUX

Cherchons une solution approchée de (11.1) représentée par un développement de la forme (9.1) limité aux termes d'ordre 2. Compte tenu de (11.6) et (11.7), celui-ci s'écrit :

$$(11.8) \quad n = n_0 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_{\lambda\mu} H^{\lambda\mu} \right)$$

$H^{\lambda\mu}$ devant vérifier (10.13), nous pouvons imposer à $\alpha_{\lambda\mu}$:

$$(11.9) \quad g^{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} = 0$$

Dans la description macroscopique utilisée, l'expression du tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$ est (3.29), le tenseur des contraintes des viscosités étant lui-même exprimé sous la forme (3.32). Nous décomposons $T^{\alpha\beta}$ en $T_0^{\alpha\beta}$ et $T_1^{\alpha\beta}$:

$$(11.10) \quad T_0^{\alpha\beta} = m \int_{\Omega_{1x}} n_0 u^\alpha u^\beta \omega = r f U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta} \\ = r \left[\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} U^\alpha U^\beta - \frac{1}{\xi} g^{\alpha\beta} \right]$$

$$(11.11) \quad T_1^{\alpha\beta} = \frac{m}{2} a_0 \alpha_{\lambda\mu} A^{\lambda\mu, \alpha\beta} = \frac{\theta}{3c^2} (4U^\alpha U^\beta - g^{\alpha\beta}) \\ + \frac{1}{c^3} (Q^\alpha U^\beta + Q^\beta U^\alpha) - \frac{\tau^{\alpha\beta}}{c^2}$$

$\tau^{\alpha\beta}$ et Q^α devant vérifier (3.13), (3.33), (3.34).

L'équation (11.11) montre que $\alpha_{\lambda\mu}$ est lié de façon simple aux grandeurs Q^α , θ et $\tau^{\alpha\beta}$. Nous écrirons les équations d'ordre 0, 1 et 2 sous une forme faisant apparaître ces dernières, auxquelles on attribue une signification physique traditionnelle, plutôt que $\alpha_{\lambda\mu}$. Les équations d'ordre 0 et 1 sont simplement (3.17), (3.35) et (3.36) (avec dans cette dernière $J_a = J_b = 0$). Nous remplaçons l'équation d'ordre 2 par la combinaison avec celles

d'ordre 0 et 1 qui s'obtient en multipliant les deux membres de (11.1) par $u^\alpha u^\beta$ et en intégrant sur Ω_{1x} :

$$\nabla_\gamma \left[\int_{\Omega_{1x}} n u^\alpha u^\beta u^\gamma \omega \right] - \int_{\Omega_{1x}} n [\mathcal{L}(X) \tilde{u} \tilde{u}]^{\alpha\beta} \omega = \int_{\Omega_{1x}} I(n) u^\alpha u^\beta \omega$$

Mais $\mathcal{L}(X) \tilde{u} \tilde{u}$ est nul (car X n'est autre que $\tilde{u}$). D'autre part, d'après (10.7) $u^\alpha u^\beta u^\gamma$ peut s'exprimer par :

$$(11.12) \quad u^\alpha u^\beta u^\gamma = H^{\alpha\beta\gamma} + C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} H^{\lambda\mu} + C_\lambda^{\alpha\beta\gamma} H^\lambda + C^{\alpha\beta\gamma}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{1x}} n u^\alpha u^\beta u^\gamma \omega &= 4\pi a_0 \frac{K_1(\xi)}{\xi} C^{\alpha\beta\gamma} + \frac{a_0}{2} \alpha_{\sigma\tau} A^{\lambda\mu, \sigma\tau} C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} \\ &= 4\pi a_0 \frac{K_1(\xi)}{\xi} C^{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{m} T_1^{\lambda\mu} C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} \end{aligned}$$

où nous avons tenu compte de (11.11).

L'équation cherchée s'écrit donc, en remplaçant a_0 en fonction de r d'après [I, formule (9.6)] :

$$(11.13) \quad \nabla_\gamma \left[r \frac{K_1(\xi)}{K_2(\xi)} C^{\alpha\beta\gamma} + T_1^{\lambda\mu} C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} \right] = m \int_{\Omega_{1x}} I(n) u^\alpha u^\beta \omega$$

Il reste à expliciter $C^{\alpha\beta\gamma}$, $C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma}$ et l'intégrale du second membre de cette équation. $C^{\alpha\beta\gamma}$ s'obtient facilement en faisant le produit des deux membres de (11.12) par $\exp(-\xi U_\lambda u^\lambda)$ et en intégrant sur Ω_{1x} . Nous arrivons à :

$$(11.14) \quad C^{\alpha\beta\gamma} = \frac{K_4(\xi)}{K_1(\xi)} U^\alpha U^\beta U^\gamma - \frac{K_3(\xi)}{K_1(\xi)} (g^{\alpha\beta} U^\gamma + g^{\alpha\gamma} U^\beta + g^{\beta\gamma} U^\alpha)$$

De même, pour calculer $C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma}$, multiplions les deux membres de (11.12) par $H^{\rho\sigma} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda)$ et intégrons sur Ω_{1x} . Nous obtenons ainsi le système linéaire :

$$(11.15) \quad C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} A^{\lambda\mu, \rho\sigma} = \int_{\Omega_{1x}} \exp(-\xi U_\lambda u^\lambda) u^\alpha u^\beta u^\gamma H^{\rho\sigma} \omega$$

qui, d'après le théorème 2, a sûrement une solution. Pour expliciter celle-ci, nous remarquons que $C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma}$ est symétrique en α, β, γ d'une part, λ, μ d'autre part, et qu'on peut imposer à $g_{\alpha\beta} C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma}$ d'être proportionnel à $g_{\lambda\mu}$, car

$$g_{\alpha\beta} C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} H^{\lambda\mu}$$

doit être nul, compte tenu de (10.13). De plus, $C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma}$ s'exprime uniquement

au moyen de ξ , U^α et du tenseur métrique, et ne comporte aucun terme proportionnel à $g_{\lambda\mu}$ (car $C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma}$ n'intervient que par son produit contracté avec $H^{\lambda\mu}$; un tel terme aurait donc d'après (10.13) une contribution nulle). Ces propriétés permettent de montrer que $C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma}$ est nécessairement de la forme :

$$(11.16) \quad \begin{aligned} C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} = & \varphi[6U^\alpha U^\beta U^\gamma - (U^\alpha g^{\beta\gamma} + U^\beta g^{\alpha\gamma} + U^\gamma g^{\alpha\beta})]U_\lambda U_\mu \\ & + \chi\{(g^{\beta\gamma} - 6U^\beta U^\gamma)[(g_\lambda^\alpha - U^\alpha U_\lambda)U_\mu + (g_\mu^\alpha - U^\alpha U_\mu)U_\lambda] \\ & + \text{termes obtenus par permutation circulaire de } \alpha, \beta, \gamma\} \\ & + \psi\{2(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta)U^\gamma U_\lambda U_\mu \\ & + 3[(g_\lambda^\alpha - U^\alpha U_\lambda)(g_\mu^\beta - U^\beta U_\mu) + (g_\mu^\alpha - U^\alpha U_\mu)(g_\lambda^\beta - U^\beta U_\lambda)]U^\gamma \\ & + \text{termes obtenus par permutation circulaire de } \alpha, \beta, \gamma\} \end{aligned}$$

φ , χ et ψ sont des fonctions de ξ que nous déterminons en portant cette expression dans (10.15), après avoir explicité le coefficient $A^{\lambda\mu, \rho\sigma}$ et le second membre de cette équation. Nous utilisons pour cela l'expression (10.22) de $H^{\alpha\beta}$. Après des calculs assez longs, nous obtenons :

$$(11.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi &= \frac{K_4}{6K_3} \\ \chi &= \frac{K_2 K_4 - (K_3)^2}{2[K_2 K_3 - \xi K_2 K_4 + \xi (K_3)^2]} \\ \varphi &= \frac{4 \left[5K_4 - \frac{3K_2 K_3}{K_1} - \left(\frac{K_3}{K_2} - \frac{K_2}{K_1} \right) (2\xi K_4 + 3K_3) \right]}{3 \left[\xi K_4 + 2K_3 - 3\xi \frac{K_2 K_3}{K_1} - 8K_3 \left(\frac{K_3}{K_2} - \frac{K_2}{K_1} \right) \right]} \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules, les K_n sont les fonctions de Bessel modifiées de 2^e espèce de la variable ξ , que nous avons sous-entendue pour alléger l'écriture.

Il est alors facile, compte tenu de (11.11), de calculer $C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} T_1^{\lambda\mu}$:

$$(11.18) \quad \begin{aligned} C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} T_1^{\lambda\mu} = & \varphi[6U^\alpha U^\beta U^\gamma - (U^\alpha g^{\beta\gamma} + U^\beta g^{\alpha\gamma} + U^\gamma g^{\alpha\beta})] \frac{\theta}{c^2} \\ & + 2\chi[(g^{\beta\gamma} - 6U^\beta U^\gamma) \frac{Q^\alpha}{c^3} + \text{termes obtenus en permutant} \\ & \hspace{15em} \alpha, \beta, \gamma] \\ & - \frac{6\psi}{c^2} [\tau^{\alpha\beta} U^\gamma + \tau^{\beta\gamma} U^\alpha + \tau^{\alpha\gamma} U^\beta] \end{aligned}$$

Cette expression sépare les contributions de θ , Q^α et $\tau^{\alpha\beta}$ (la façon (11.16)

d'exprimer $C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma}$ a d'ailleurs été choisie dans ce but). Remarquons que le produit contracté par $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\gamma}$ ou $g_{\beta\gamma}$ de chacun des termes de (11.18) est nul.

Pour finir d'expliciter les termes de l'équation (11.13) il reste à évaluer l'intégrale du second membre. Elle est visiblement somme de trois termes, contenant tous r , ξ et U^α , le premier ne contenant pas $\alpha_{\lambda\mu}$, le second fonction linéaire et le troisième fonction quadratique de ces variables. Nous n'évaluerons pas plus en détail cette intégrale, et nous nous contenterons dans le paragraphe suivant d'étudier le cas simple où on substitue l'équation de Krook à celle de Boltzmann. Cette simplification n'est d'ailleurs pas essentielle : elle ne modifie pas la nature de l'équation (11.13), puisqu'elle affecte un terme contenant seulement les fonctions inconnues, non leurs dérivées. Il serait d'ailleurs possible de l'éviter, moyennant quelques calculs : Chernikov [3] a montré comment évaluer les intégrales telles que celle du second membre de (11.13), et bien qu'il ait utilisé pour représenter la fonction de distribution un développement différent du nôtre, sa méthode reste applicable.

Remarque. — Le produit contracté par $g_{\alpha\beta}$ des deux membres de l'équation (11.13) est une identité. Le système constitué par les équations d'ordre 0, 1 et 2 comporte donc 14 équations indépendantes, autant que de fonctions inconnues. En théorie cinétique non relativiste, l'approximation correspondant à celle développée ici utilise seulement 13 fonctions inconnues et 13 équations (c'est pourquoi Grad l'appelle « approximation des 13 moments »). Cela vient du fait qu'un gaz non relativiste dont les molécules n'ont pas de degré de liberté de rotation ou de vibration a automatiquement un tenseur des contraintes de viscosité de trace nulle, en raison de la définition même de la température. Il n'en est plus de même en relativité. D'autre part, l'expression (11.8) de la fonction de distribution contient 14 fonctions inconnues, bien qu'elle ne comporte que des termes d'ordre 2 au plus ; l'expression non relativiste correspondante, qui comporte 13 fonctions inconnues, contient des termes d'ordre 3, car comme nous l'avons vu précédemment, les tenseurs H ont plus de composantes linéairement indépendantes que les tenseurs de Hermite-Grad non relativistes de même rang. Chernikov [3] [4] a adapté la méthode de Grad à la relativité en utilisant des tenseurs K , définis par (10.4), qui ont le même nombre de composantes indépendantes que les tenseurs de Hermite-Grad non relativistes. Cet auteur a donc dû utiliser, au lieu de (11.8), une expression contenant des termes jusqu'au troisième ordre. L'expression qu'il a choisie comporte seulement 13 fonctions arbitraires, et conduit automatiquement

à un tenseur des contraintes de viscosité de trace nulle. Nous voyons que cela n'est pas un résultat, mais la conséquence directe d'une hypothèse, que nous n'avons pas retenue, sur la forme de la fonction de distribution. Cette remarque est à rapprocher de la remarque 4 du paragraphe 6.

11.3. CAS DE L'ÉQUATION DE KROOK

Supposons l'évolution du gaz décrite par l'équation de Krook relativiste [I, (11.3)]. Celle-ci ne diffère de l'équation de Boltzmann que par l'expression du terme de collisions, qui s'écrit (si nous prenons n comme fonction inconnue):

$$(11.19) \quad I(n) = \frac{1}{c\tau} (n_M - n)$$

n_M étant la fonction de distribution des vitesses de Maxwell « tangente » à n , correspondant par [I, (11.7)] à la fonction de distribution des impulsions v_M définie en [I, § 13.1], et τ le paramètre désigné dans ce paragraphe par τ_M .

Nous supposons τ indépendant de u^α (sans cette hypothèse, la résolution de l'équation de Krook n'est guère plus simple que celle de l'équation de Boltzmann proprement dite). En rapprochant (11.4) et (11.5) de [I, (11.4) et (11.5)], nous voyons que :

$$(11.20) \quad n_M = n_0$$

Nous avons alors :

$$(11.21) \quad m \int_{\Omega_{1x}} u^\alpha u^\beta I(n) \omega = - \frac{m}{c\tau} \frac{a_0}{2} \alpha_{\lambda\mu} A^{\alpha\beta, \lambda\mu} = - \frac{1}{c\tau} T_1^{\alpha\beta}$$

L'équation (11.13) s'écrit donc :

$$(11.22) \quad \nabla_\gamma \left[r \frac{K_1(\xi)}{K_2(\xi)} C^{\alpha\beta\gamma} + T_1^{\lambda\mu} C_{\lambda\mu}^{\alpha\beta\gamma} \right] = - \frac{1}{c\tau} T_1^{\alpha\beta}$$

les différentes quantités intervenant dans cette équation étant explicitées par (11.11), (11.14) et (11.16).

Faisons le produit contracté des deux membres de (11.22), successivement par :

$$\begin{aligned} & U_\lambda U_\mu \\ & (g_\lambda^\alpha - U^\alpha U_\lambda) U_\mu \\ & (g_\lambda^\alpha - U^\alpha U_\lambda) (g_\mu^\beta - U^\beta U_\mu) + \frac{1}{3} (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) U_\lambda U_\mu \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les équations :

$$(11.23) \left\{ \begin{aligned} -\frac{\theta}{c^3\tau} &= r \left[3U^\gamma \partial_\gamma \left(\frac{K_3}{\xi K_2} \right) + \frac{2K_3}{\xi K_2} \nabla_\gamma U^\gamma \right] \\ &+ \frac{5\varphi\theta}{c^2} \nabla_\gamma U^\gamma + \frac{3U^\gamma}{c^2} \partial_\gamma (\varphi\theta) \\ &+ 10 \left[\frac{2\chi Q^\lambda U^\gamma}{c^3} \nabla_\gamma U_\lambda - \frac{1}{c^3} \nabla_\gamma (\chi Q^\gamma) \right] \\ &+ 12 \frac{\psi}{c^2} \tau^{\lambda\gamma} \nabla_\gamma U_\lambda \end{aligned} \right.$$

$$(11.24) \left\{ \begin{aligned} -\frac{Q^\alpha}{c^4\tau} &= r \left(\frac{K_4}{K_2} - \frac{K_3}{\xi K_2} \right) U^\gamma \nabla_\gamma U^\alpha - (g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma) \partial_\gamma \left(\frac{rK_3}{\xi K_2} \right) \\ &+ \frac{5\varphi\theta}{c^2} U^\gamma \nabla_\gamma U^\alpha - \frac{1}{c^2} (g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma) \partial_\gamma (\varphi\theta) \\ &+ \frac{2}{c^3} \{ [(g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma) U_\lambda - 5(g_\lambda^\alpha - U^\alpha U_\lambda) U^\gamma] \nabla_\gamma (\varphi Q^\lambda) \\ &\quad - 6\chi (Q^\alpha \nabla_\gamma U^\gamma + Q^\gamma \nabla_\gamma U^\alpha) \} \\ &- \frac{6}{c^2} [\nabla_\gamma (\psi \tau^{\alpha\gamma}) + \psi (U^\alpha \tau^{\lambda\gamma} - U^\gamma \tau^{\alpha\lambda}) \nabla_\gamma U_\lambda] \end{aligned} \right.$$

$$(11.25) \left\{ \begin{aligned} \frac{\tau^{\alpha\beta}}{c^3\tau} &= \left(\frac{rK_3}{\xi K_2} + \frac{\varphi\theta}{c^2} \right) \left[\frac{2}{3} (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \nabla_\gamma U^\gamma \right. \\ &\quad \left. - (g_\lambda^\alpha - U^\alpha U_\lambda) (g_\mu^\beta - U^\beta U_\mu) (\nabla_\lambda U_\mu + \nabla_\mu U_\lambda) \right] \\ &+ \frac{2}{c^3} \{ [(g^{\beta\gamma} - U^\beta U^\gamma) (g_\lambda^\alpha - U^\alpha U_\lambda) + (g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma) (g_\lambda^\beta - U^\beta U_\lambda) \\ &\quad - \frac{2}{3} (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) (g_\lambda^\gamma + 5U^\gamma U_\lambda)] \nabla_\gamma (\chi Q^\lambda) \\ &\quad - 6\chi U^\gamma (Q^\alpha \nabla_\gamma U^\beta + Q^\beta \nabla_\gamma U^\alpha) \} \\ &+ \frac{2}{c^2} \{ -3U^\gamma \nabla_\gamma (\psi \tau^{\alpha\beta}) + \psi [2(g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \tau^{\lambda\gamma} \\ &\quad - 3(U^\alpha \tau^{\lambda\beta} + U^\beta \tau^{\lambda\alpha}) U^\gamma] \nabla_\gamma U_\lambda \\ &\quad - 3\psi (\tau^{\alpha\beta} \nabla_\gamma U^\gamma + \tau^{\beta\gamma} \nabla_\gamma U^\alpha + \tau^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma U^\beta) \} \end{aligned} \right.$$

Les équations (11.23), (11.24) et (11.25) constituent, avec les équations (3.17), (3.35) et (3.36) un système différentiel du premier ordre à

14 équations indépendantes pour les 14 fonctions inconnues qui décrivent l'état du gaz. C'est le système des équations de l'hydrodynamique du fluide relativiste dissipatif à un seul constituant.

Remarque 1. — Il est possible de mettre les équations (11.23), (11.24) et (11.25) sous diverses formes équivalentes, soit en utilisant les identités (qui découlent de (3.13) et (3.33)) :

$$\begin{aligned} Q^\lambda \nabla_\gamma U_\lambda + U_\lambda \nabla_\gamma Q^\lambda &= 0 \\ \tau^{\lambda\mu} \nabla_\gamma U_\lambda + U_\lambda \nabla_\gamma \tau^{\lambda\mu} &= 0 \end{aligned}$$

soit en les combinant avec les équations d'ordre 0 et 1 (3.17), (3.35), (3.36).

Remarque 2. — Il est facile de voir que la première méthode de résolution de l'équation de Krook relativiste, exposée dans le paragraphe 6 avec la description de Eckart, aurait donné avec la description nouvelle utilisée ici les résultats :

$$(11.26) \quad -\frac{\theta}{c^3\tau} = r \left[3U^\gamma \partial_\gamma \left(\frac{K_3}{\xi K_2} \right) + \frac{2K_3}{\xi K_2} \nabla_\gamma U^\gamma \right] + 0(\tau)$$

$$(11.27) \quad -\frac{Q^\alpha}{c^4\tau} = r \left(\frac{K_4}{K_2} - \frac{K_3}{\xi K_2} \right) U^\gamma \nabla_\gamma U^\alpha - (g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma) \partial_\gamma \left(\frac{rK_3}{\xi K_2} \right) + 0^\alpha(\tau)$$

$$(11.28) \quad \frac{\tau^{\alpha\beta}}{c^3\tau} = \frac{rK_3}{\xi K_2} \left[\frac{2}{3} (g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta) \nabla_\gamma U^\gamma - (g^\alpha_\lambda - U^\alpha U_\lambda)(g^\beta_\mu - U^\beta U_\mu)(\nabla_\lambda U_\mu + \nabla_\mu U_\lambda) \right] + 0^{\alpha\beta}(\tau)$$

les $0(\tau)$ désignant des termes d'ordre 1 au moins en τ . Nous reconnaissons dans ces équations les premiers termes de (11.23), (11.24) et (11.25). La méthode de résolution utilisée dans cette partie donne donc un résultat plus précis que celle décrite dans la quatrième partie.

Il est possible, comme dans le paragraphe 6, d'utiliser (6.20), (6.21) et (6.22) pour modifier la forme des seconds membres des équations (11.26) à (11.28). Nous pouvons utiliser cette possibilité pour exprimer θ et Q^α par des termes proportionnels (au premier ordre en τ) respectivement à :

$$\begin{aligned} &U^\gamma \partial_\gamma \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{1}{3T} \nabla_\gamma U^\gamma \\ &(g^{\alpha\gamma} - U^\alpha U^\gamma) \left[\partial_\gamma \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} U^\delta \nabla_\delta U_\gamma \right] \end{aligned}$$

En portant les expressions de θ , Q^α et $\theta^{\alpha\beta}$ ainsi obtenues dans l'équation du bilan d'entropie (3.36), nous obtenons au second membre une forme quadratique qui, d'après le second principe, doit être non négative.

Mais si nous utilisons les équations plus complètes (11.23) à (11.25), il n'y a pas lieu de faire cette transformation car la quantité $c\nabla_\alpha S^\alpha$ (non négative d'après le théorème H) ne coïncide avec le premier membre de (3.36) qu'au premier ordre en τ (comme nous l'avons indiqué dans la remarque 3 du paragraphe 6). Il n'y a donc plus de raison physique pour que ce dernier soit rigoureusement non négatif.

Remarque 3. — Les résultats de ce paragraphe confirment l'existence des termes prévus par Kranys [15] et [16], mais montrent également l'existence d'autres termes qui rendent les équations (11.23) à (11.25) assez compliquées. Sur ce point, la méthode de Grad donne d'ailleurs, en théorie cinétique non relativiste, des résultats semblables (Grad [9]).

12. Étude du problème de Cauchy pour un fluide dissipatif simplifié

En raison de la relative complexité des équations établies dans le paragraphe précédent, nous allons étudier le problème de Cauchy pour un fluide dissipatif obéissant à des équations plus simples. Nous allons cependant utiliser les équations obtenues comme guides pour choisir les équations simplifiées.

12.1. LES ÉQUATIONS

Le fluide considéré a pour tenseur d'impulsion-énergie :

$$(12.1) \quad T^{\alpha\beta} = r f U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3c^2} (4U^\alpha U^\beta - g^{\alpha\beta})$$

Cette expression est obtenue en rendant nuls Q^α et $\tau^{\alpha\beta}$ dans l'expression (11.10 et 11.11) du tenseur d'impulsion-énergie du fluide précédemment considéré. Le seul phénomène dissipatif retenu est l'existence de θ , trace du tenseur des contraintes de viscosité. La suppression des deux autres phénomènes dissipatifs, décrits respectivement par les variables Q^α et $\tau^{\alpha\beta}$, simplifie considérablement le problème.

D'un point de vue physique, il n'y a évidemment aucune raison de considérer Q^α et $\tau^{\alpha\beta}$ comme négligeables tout en conservant θ , car ces trois variables sont sans doute du même ordre de grandeur. L'intérêt de

l'étude du fluide dissipatif simplifié considéré ici est donc essentiellement théorique: elle peut renseigner sur les propriétés du système d'équations décrivant ce fluide, et donner quelques indications sur les propriétés possibles du système d'équations décrivant le fluide dissipatif complet.

Les équations du problème sont :

— Les équations d'Einstein, que nous écrivons, comme dans le paragraphe 8, sous la forme (8.1) et (8.2), avec l'hypothèse (8.3).

— L'équation (3.8) exprimant que U^α est unitaire, et les relations permettant d'exprimer toutes les variables thermodynamiques au moyen de deux d'entre elles.

— L'équation de continuité (3.17).

— Le système différentiel aux lignes de courant (3.35) et l'équation du bilan d'entropie (3.36) (en réalité, ces équations sont conséquences des équations d'Einstein). Il faut bien entendu remplacer dans ces équations Q^α , $\tau^{\alpha\beta}$ et J_a^α par zéro.

— L'équation donnant θ . Nous adoptons l'équation (11.23), simplifiée par l'hypothèse de la nullité de Q^α et $\tau^{\alpha\beta}$, et mise sous la forme :

$$(12.2) \quad \alpha \nabla_\gamma U^\gamma + \beta U^\gamma \partial_\gamma f + \lambda U^\gamma \partial_\gamma \theta = \frac{\theta}{\tau}$$

Cette équation est bien identique à (11.23) (une fois Q^α et $\tau^{\alpha\beta}$ supprimés) puisque ξ est fonction uniquement de f :

$$(12.3) \quad f = \frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)}$$

les coefficients α , β et λ s'exprimant par :

$$(12.4) \quad \alpha = -c^3 \left[2r \frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} + \frac{5\varphi\theta}{c^2} \right]$$

$$(12.5) \quad \beta = -3c^2 \left[r \frac{d}{d\xi} \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right) + \frac{\theta}{c^2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right] \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right) \right]^{-1}$$

$$(12.6) \quad \lambda = -3c\varphi$$

φ étant toujours donné par (11.17).

Le théorème 1 dû à Lichnerowicz, cité au paragraphe 8, est applicable au problème considéré: si une solution du système constitué par (8.1), (3.17), (3.35), (3.36), (12.2) et par les relations entre variables thermodynamiques, vérifie (8.2) et (3.8) sur l'hypersurface initiale Σ , d'équation

$x^0 = 0$, elle vérifie ces équations dans un voisinage de Σ , sous les conditions (8.3), et :

$$(12.7) \quad \left(\frac{4\theta}{3} + c^2 rf \right) U^0 \neq 0$$

(remarquons qu'il n'est pas nécessaire dans les hypothèses de ce théorème d'imposer à la solution considérée de vérifier (8.4) sur Σ , comme dans le paragraphe 19).

Remarque. — Il est facile de voir que la condition (12.7) se réduit à $U^0 \neq 0$. Prenons en effet un repère local orthonormé, l'axe des x^0 étant parallèle à U^α et orienté vers l'avenir. Nous avons :

$$\begin{aligned} T^{00} &= rf - \frac{p}{c^2} + \frac{\theta}{c^2} = m \int_{\Omega_{1x}} n(u^0)^2 \omega > 0 \\ T^{11} = T^{22} = T^{33} &= \frac{p}{c^2} + \frac{\theta}{3c^2} = m \int_{\Omega_{1x}} n(u^1)^2 \omega > 0 \end{aligned}$$

d'où par addition :

$$\frac{4\theta}{3} + c^2 rf > 0$$

12.2. PROBLÈME DES DONNÉES INITIALES

Les données de Cauchy sur l'hypersurface initiale ($x^0 = 0$) sont : U^α , f , s , θ , $g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$. Elles doivent vérifier (8.2) et (3.8). Un raisonnement analogue à celui fait par Lichnerowicz [19] dans l'étude du problème de Cauchy pour le fluide parfait permet de montrer que la donnée sur Σ de $g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$ et de deux des trois variables f , s , θ , suffit pour déterminer la troisième variable et U^α . L'équation (8.2) s'écrit en effet :

$$\left(rf + \frac{4}{3} \frac{\theta}{c^2} \right) U^0 U_\alpha - \frac{1}{c^2} \left(p + \frac{\theta}{3} \right) g_\alpha^0 = \frac{1}{\chi} S_\alpha^0$$

ou, compte tenu de (3.8) :

$$\begin{aligned} \left(rf + \frac{4}{3} \frac{\theta}{c^2} \right)^2 (U^0)^2 &= g^{\lambda\mu} \left[\frac{1}{\chi} S_\lambda^0 + \frac{1}{c^2} \left(p + \frac{\theta}{3} \right) g_\lambda^0 \right] \left[\frac{1}{\chi} S_\mu^0 + \frac{1}{c^2} \left(p + \frac{\theta}{3} \right) g_\mu^0 \right] \\ &= \left[\Omega^0 \left(p + \frac{\theta}{3} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

où $\Omega^0\left(p + \frac{\theta}{3}\right)$ est une fonction connue de la variable $\left(p + \frac{\theta}{3}\right)$, si les $g_{\alpha\beta}$ et $\partial_0 g_{\alpha\beta}$ sont donnés. Nous en déduisons :

$$U_\alpha = \frac{\frac{1}{\chi} S_\alpha^0 + \frac{1}{c^2} \left(p + \frac{\theta}{3}\right) g_\alpha^0}{\Omega^0\left(p + \frac{\theta}{3}\right)}$$

$$U^0 = \frac{\frac{1}{\chi} S^{00} + \frac{1}{c^2} \left(p + \frac{\theta}{3}\right) g^{00}}{\Omega^0\left(p + \frac{\theta}{3}\right)}$$

$$rf + \frac{4}{3} \frac{\theta}{c^2} = \frac{\left[\Omega^0\left(p + \frac{\theta}{3}\right)\right]^2}{\frac{1}{\chi} S^{00} + \frac{1}{c^2} \left(p + \frac{\theta}{3}\right) g^{00}}$$

Cette dernière équation est une relation entre θ et les deux variables thermodynamiques indépendantes choisies (par exemple f et s). Elle permet de déterminer une de ces variables connaissant les deux autres, et les équations précédentes donnent alors U^0 et U_α .

12.3. CALCUL DES DÉRIVÉES NORMALES

Supposons donc connues sur Σ , et vérifiant (8.2) et (3.8), les quantités $g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$, U^α , f , s , θ . Cherchons à calculer leurs dérivées normales.

Les équations (8.1) permettent, sous la condition (8.3), le calcul des $\partial_{00} g_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), et nous savons que les $\partial_{00} g_{\alpha 0}$ doivent rester indéterminés. Les autres équations, qui doivent servir à déterminer $\partial_0 U^\alpha$, $\partial_0 f$, $\partial_0 s$ et $\partial_0 \theta$, s'écrivent :

$$(12.8) \quad r\partial_0 U^0 + U^0 r'_f \partial_0 f + U^0 r'_s \partial_0 s = (D. C.)$$

$$(12.9) \quad \frac{4\theta}{3} \partial_0 U^0 + rTU^0 \partial_0 s + U^0 \partial_0 \theta = (D. C.)$$

$$(12.10) \quad \left(\frac{4\theta}{3} + c^2 rf\right) U^0 \partial_0 U^\alpha - \gamma^{\alpha 0} p'_f \partial_0 f - \gamma^{\alpha 0} p'_s \partial_0 s - \frac{1}{3} \gamma^{\alpha 0} \partial_0 \theta = (D. C.)$$

$$(12.11) \quad \alpha \partial_0 U^0 + \beta U^0 \partial_0 f + \lambda U^0 \partial_0 \theta = (D. C.)$$

Nous avons posé, pour alléger l'écriture :

$$\gamma^{a0} = g^{a0} - U^a U^0$$

Les $\hat{c}_0 U^i$ ($i = 1, 2, 3$), qui n'interviennent que dans (12.10), pourront être calculés grâce à cette équation, sous la condition (12.7), une fois les autres inconnues déterminées. Les quatre équations devant servir à déterminer ces dernières ont pour déterminant :

$$(12.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \left(\frac{4\theta}{3} + c^2 r f \right) (\lambda r T r'_f + \beta r'_s) (U^0)^2 \\ + \left\{ \lambda r \left[\left(r^2 T c^2 - \frac{4\theta}{3} \right) (c^2 r'_s + T r'_f) \right] + \alpha r \left(c^2 r'_s + \frac{4}{3} T r'_f \right) \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \beta \left(\frac{\theta}{3} r'_s - r^2 T \right) \right\} \gamma^{00} \end{array} \right.$$

Nous avons utilisé les relations :

$$(12.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} p'_f = r c^2 \\ p'_s = -r T \end{array} \right.$$

qui découlent de :

$$(12.14) \quad dp = r c^2 df - r T ds.$$

12.4. VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

Les variétés caractéristiques sont donc les hypersurfaces Σ d'équation ($x^0 = 0$), telles que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

$$\begin{array}{ll} g^{00} = 0 & \text{ondes gravitationnelles} \\ U^0 = 0 & \text{hypersurfaces engendrées par des lignes de courant} \\ \Delta = 0 & \text{ondes acoustiques.} \end{array}$$

La célérité w de ces dernières est :

$$(12.15) \quad w = c \left\{ \frac{\lambda r \left[r^2 T c^2 - \frac{4\theta}{3} (c^2 r'_s + T r'_f) \right] + \alpha r \left(c^2 r'_s + \frac{4T}{3} r'_f \right) + \frac{4}{3} \beta \left(\frac{\theta}{3} r'_s - r^2 T \right)}{(\lambda r T r'_f + \beta r'_s) \left(\frac{4\theta}{3} + c^2 r f \right)} \right\}^{1/2}$$

Si θ est nul, et si α et β tendent vers zéro, λ restant fini, le fluide tend à se comporter comme un fluide parfait, et nous voyons que w tend vers :

$$w_0 = c \sqrt{\frac{r}{fr'_f}} = c \left[\frac{K_2(\xi)}{\xi K_3(\xi)} \frac{\xi^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right)}{1 + \xi^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

d'après les expressions (12.3) de f , [I, (9.10)] de p , et la relation (12.14) qui permettent de calculer facilement r'_f . C'est l'expression classique de la célérité des ondes acoustiques dans un gaz parfait relativiste. Synge [30] a montré que $w_0 < c$. Si α , β et θ ne sont pas trop grands, l'inégalité $w < c$ est donc assurée.

La présente description d'un fluide dissipatif simplifié n'introduit donc pas d'hypersurface caractéristique du genre espace. Ce résultat est physiquement plus satisfaisant que celui obtenu avec la description du paragraphe 8.

Le résultat obtenu est particulièrement simple, puisqu'il n'y a pas d'autres ondes que celles existant déjà dans un fluide parfait : seule la célérité des ondes acoustiques est perturbée par le phénomène dissipatif considéré. Cette simplicité est due au caractère schématique du fluide dissipatif considéré. Il y a lieu de penser que l'étude du problème de Cauchy pour un fluide dissipatif complet, obéissant aux équations du paragraphe 11, mettrait en évidence l'existence d'autres variétés exceptionnelles. Il resterait à vérifier qu'elles sont du genre temps. La complexité des équations ne nous a pas permis d'obtenir jusqu'à présent un résultat net concernant ce problème.

V. CONCLUSION

13. Résultats obtenus

La présente étude permet de répondre à plusieurs des questions posées dans l'introduction de la première partie [I].

En effet, après avoir rappelé les principales propriétés de l'équation de Boltzmann relativiste et indiqué sur ce sujet quelques résultats nouveaux, nous avons montré comment déduire la description macroscopique d'un gaz (par des variables thermodynamiques, un flux de chaleur, un tenseur des contraintes de viscosité, etc.) de sa description microscopique par une fonction de distribution. Nous avons pu ainsi expliquer la diversité des

descriptions macroscopiques proposées : l'identification des moments des premiers ordres de la fonction de distribution avec des expressions contenant des grandeurs macroscopiques, est possible de plusieurs façons, qui toutes dans le cas limite non relativiste donnent la description classique. Sur le plan mathématique, ces diverses descriptions sont également acceptables et cohérentes. Le choix de l'une d'elles doit être dicté surtout par des considérations physiques, ou par la commodité de son application à un problème déterminé. Ainsi, par exemple, la description de Eckart est la plus naturelle; celle de Landau et Lifchitz est la plus facilement utilisable pour la résolution approchée de l'équation de Boltzmann par la méthode développée dans le paragraphe III (qui est une version relativiste de la méthode classique de Chapman-Enskog); une nouvelle description que nous avons proposée est la mieux adaptée à la résolution de l'équation de Boltzmann par l'autre méthode, exposée dans le paragraphe IV (version relativiste de la méthode de Grad).

Parmi les équations qui décrivent l'évolution d'un gaz relativiste, certaines expriment le bilan de l'impulsion-énergie et du nombre de particules. Ce sont des conséquences de propriétés générales de l'équation de Boltzmann [I, théorèmes 4 et 5]; elles s'écrivent sous diverses formes suivant la description macroscopique adoptée, et cette diversité a pu masquer leur origine commune. Nous pensons notamment que « l'équation de conservation de la chaleur » [I, (2.14)] utilisée par Pham Mau Quan est une des formes de ces équations (cela semble d'ailleurs résulter d'une note de cet auteur [28] qui montre comment déduire de cette équation une autre de la forme (3.17)).

Les autres équations de l'hydrodynamique relativiste, liant le flux de chaleur, le tenseur des contraintes de viscosité, aux gradients des variables thermodynamiques, doivent être obtenues par résolution approchée de l'équation de Boltzmann relativiste. Les deux méthodes classiques (de Chapman-Enskog et de Grad) ont été adaptées. La première conduit, dans l'approximation d'ordre un (la seule qui semble praticable) à des équations formant avec les précédentes un système parabolique. La seconde, à l'approximation d'ordre deux, précise le résultat obtenu par la méthode précédente en faisant apparaître certains termes supplémentaires dans les équations. Sans parvenir à prouver que le système d'équations ainsi obtenu était hyperbolique, nous avons pu montrer qu'un système plus simple déduit du précédent en annulant certaines inconnues n'avait que des hypersurfaces caractéristiques de genre temps. Ce résultat répond partiellement à la question posée dans l'introduction, au sujet de la propagation de signaux à des vitesses infinies, possible d'après les équations proposées

antérieurement : ce phénomène inacceptable physiquement n'est dû qu'à l'emploi d'équations incomplètes déduites de l'équation de Boltzmann relativiste par résolution à un ordre d'approximation insuffisant.

14. Développements possibles

Certains points restent cependant à élucider.

Le système d'équations obtenu dans le paragraphe IV, que nous n'avons étudié que sous une forme simplifiée après avoir annulé certaines inconnues, doit être accessible à l'analyse. Il serait intéressant de montrer, en toute généralité, qu'il est hyperbolique et n'a que des hypersurfaces caractéristiques de genre temps.

L'adaptation de la méthode de Chapman-Enskog à la relativité, présentée dans la quatrième partie, n'a pas en fait été utilisée : nous nous sommes en effet contentés de l'appliquer à la résolution de l'équation de Krook, et dans ce cas cette méthode se simplifie tellement qu'elle perd ses caractères essentiels. Bien que son application à l'équation de Boltzmann conduise à des équations de même forme que celles que nous avons obtenues (seuls les coefficients pouvant être modifiés), il serait intéressant de l'étudier plus en détail. Cela ne présente d'ailleurs que des difficultés de calcul. Dans le cas d'un gaz à deux constituants, nous n'avons pu dans le paragraphe 7 qu'indiquer quelles conditions doivent satisfaire les équations de Krook utilisées au départ, pour que les relations d'Onsager soient vérifiées. En appliquant la méthode de résolution aux équations de Boltzmann proprement dites, on pourrait voir si ces relations sont bien toujours vérifiées.

La méthode de résolution (adaptation de celle de Grad) présentée dans la cinquième partie, paraît encore plus intéressante. On pourrait l'appliquer à la résolution des équations de Boltzmann d'un gaz à plusieurs constituants, avec diffusion.

D'autres extensions, nécessitant une modification plus importante des bases de départ, pourraient être envisagées, notamment l'étude des gaz relativistes ionisés dans un champ électromagnétique. En physique non relativiste l'équation de Boltzmann est employée pour cette étude, mais au prix de procédés peu rigoureux, consistant par exemple à limiter à l'intérieur d'une sphère de rayon arbitraire (de l'ordre de la longueur de Debye) des intégrales qui seraient divergentes si elles étaient étendues à tout l'espace. Il serait préférable de faire l'étude correspondante en relativité à partir d'autres bases, telles que par exemple une équation de Fokker-Planck relativiste.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. CATTANEO, Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **247**, n° 4, 1958, p. 431-433.
- [2] S. CHAPMAN et T. G. COWLING, *The mathematical theory of non uniform gases*. Cambridge University Press, 1939.
- [3] N. A. CHERNIKOV, Microscopic foundation of relativistic hydrodynamics. *Acta Physica Polonica*, vol. XXVII, 1964, fasc. 3, p. 465-489.
- [4] N. A. CHERNIKOV, Derivation of the equations of relativistic hydrodynamics from the relativistic transport equation. *Physics Letters*, vol. 5, n° 2 (June 15, 1963), p. 115-117.
- [5] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, Théorèmes d'existence en mécanique des fluides relativistes. *Bull. Soc. Math. France*, t. **86**, 1958, p. 155-175.
- [6] O. COSTA DE BEAUREGARD, La théorie de la relativité restreinte. Masson, Paris, 1949.
- [7] C. ECKART, The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid. *Phys. Rev.*, t. **58**, 1940, p. 919-924.
- [8] H. GRAD, Note on N-dimensional Hermite polynomials. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 2, n° 4, 1949, p. 325-330.
- [9] H. GRAD, On the kinetic theory of rarefied gases. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 2, n° 4, 1949, p. 331-407.
- [10] G. A. KLUITENBERG, S. R. DE GROOT et P. MAZUR, Relativistic thermodynamics of irreversible processes. I. *Physica*, vol. XIX, 1953, p. 689-704.
- [11] G. A. KLUITENBERG, S. R. DE GROOT et P. MAZUR, Relativistic thermodynamics of irreversible processes. II. *Physica*, vol. XIX, 1953, p. 1079-1094.
- [12] G. A. KLUITENBERG et S. R. DE GROOT, Relativistic thermodynamics of irreversible processes. III. *Physica*, vol. XX, 1954, p. 199-209.
- [13] G. A. KLUITENBERG et S. R. DE GROOT, Relativistic thermodynamics of irreversible processes. IV. *Physica*, vol. XXI, 1955, p. 148-168.
- [14] G. A. KLUITENBERG et S. R. DE GROOT, Relativistic thermodynamics of irreversible processes. V. *Physica*, vol. XXI, 1955, p. 169-192.
- [15] M. KRANYS, Relativistic hydrodynamics with irreversible thermodynamics without the paradox of infinite velocity of heat conduction. *Il Nuovo Cimento*, série X, vol. 42 B (11 mars 1966), p. 51-70.
- [16] M. KRANYS, The postulate of the relaxation of non-stationary processes caused by the finite transport velocity of interaction in the matter. *Physics Letters*, vol. 22, n° 3, 1966, p. 285-286.
- [17] M. KRANYS, General relativistic thermodynamics of irreversible processes with finite transport velocity of interaction in matter. *Il Nuovo Cimento*, série X, vol. 50 B, n° 1 (11 juillet 1967), p. 48.
- [18] L. D. LANDAU et E. M. LIFCHITZ, Fluid mechanics. Pergamon Press, London, 1959.
- [19] A. LICHNEROWICZ, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson, Paris, 1955.
- [20] A. LICHNEROWICZ, Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics. W. A. Benjamin, Inc, New York, 1967.
- [21] C. MARLE, Expression du tenseur d'impulsion-énergie d'un gaz visqueux conducteur de la chaleur en relativité générale. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **260**, 1965, p. 6300-6302.
- [22] C. MARLE, Relations entre deux descriptions macroscopiques d'un gaz relativiste visqueux conducteur de la chaleur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **262**, série A, 1966, p. 1431-1433.
- [23] C. MARLE, Sur une nouvelle famille de polynômes généralisant dans l'espace-temps de la relativité restreinte, les polynômes de Hermite-Grad. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **263**, série A, 1966, p. 485-487.

- [24] J. C. MAXWELL, *On the dynamical theory of gases*. Philosophical transactions of the Royal Society of London, vol. 157, part I, 1867, p. 49-88.
- [25] L. ONSAGER, Reciprocal relations in irreversible processes. I. *Phys. Rev.*, vol. 37 (February 15, 1931), p. 405-426.
- [26] L. ONSAGER, Reciprocal relations in irreversible processes. II. *Phys. Rev.*, vol. 38 (December 15, 1931), p. 2265-2279.
- [27] PHAM MAU QUAN, Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques. *Annali di Matematica Pura ed Applicata Bologna*, vol. 38, série 4, 1955, p. 181-204.
- [28] PHAM MAU QUAN, Thermodynamique relativiste. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **261**, 1965, p. 3049-3052.
- [29] G. PICHON, Étude relativiste des fluides visqueux et chargés. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 2, n° 1, 1965, p. 21-85.
- [30] J. L. SYNGE, *The relativistic gas*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1957.
- [31] A. H. TAUB, Relativistic Rankine. Hugoniot equations. *Phys. Rev.*, vol. 74, n° 3 (August 1, 1948), p. 328-334.
- [32] A. H. TAUB, General relativistic variational principle for perfect fluids. *Phys. Rev.*, vol. 94, n° 6 (June 15, 1954), p. 1468-1470.
- [33] A. H. TAUB, Isentropic hydrodynamics in plane symmetric space-times. *Phys. Rev.*, vol. 103, n° 2 (July 15, 1956), p. 454-467.
- [34] A. H. TAUB, Approximate solutions of Einstein equations for isentropic motions of plane-symmetric distributions of perfect fluids. *Phys. Rev.*, vol. 107, n° 3 (August 1, 1957), p. 884-900.
- [35] P. VERNOTTE, Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **246**, 1958, p. 3154-3155.

Manuscrit reçu le 15 octobre 1968.
